
RON LARSON ◇ BRUCE H. EDWARDS
Novena edición
De varias variables
CÁLCULO 2
Mc
Graw
Hill

Cálculo 2

REVISORES TÉCNICOS

MÉXICO

José de Jesús Ángel Ángel
Universidad Anáhuac Norte

Miguel Ángel Arredondo Morales
Universidad Iberoamericana León

Víctor Armando Bustos Peter
Instituto Tecnológico y de Estudio Superiores de Monterrey, Campus Toluca

Aureliano Castro Castro
Universidad Autónoma de Sinaloa

Javier Franco Chacón
Tecnológico de Monterrey, Campus Chihuahua

Sergio Fuentes Martínez
Universidad Anáhuac México Norte

Enrique González Acosta
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Sonora Norte

Miguel Ángel López Mariño
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Central de Veracruz

Eleazar Luna Barraza
Universidad Autónoma de Sinaloa

Tomás Narciso Ocampo Paz
Instituto Tecnológico de Toluca

Velia Pérez González
Universidad Autónoma de Chihuahua

Ignacio Ramírez Vargas
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Hidalgo

Héctor Selley
Universidad Anáhuac Norte

Jorge Alberto Torres Guillén
Universidad de Guadalajara

Enrique Zamora Gallardo
Universidad Anáhuac Norte

COLOMBIA

Petr Zhevandrov
Universidad de La Sabana

Jorge Augusto Pérez Alcázar
Universidad EAN

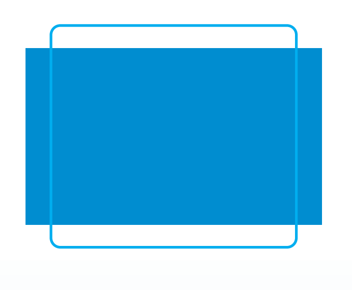
Liliana Barreto Arciniegas
Pontificia Universidad Javeriana

Gustavo de J. Castañeda Ramírez
Universidad EAFIT

Jairo Villegas G.
Universidad EAFIT

PERÚ

Carlos Enrique Peralta Santa Cruz
Universidad Continental de Ciencias e Ingeniería



Cálculo 2
de varias variables

Novena edición

Ron Larson
The Pennsylvania State University
The Behrend College

Bruce H. Edwards
University of Florida

Revisión técnica

Marlene Aguilar Abalo
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Ciudad de México

José Job Flores Godoy
Universidad Iberoamericana

Joel Ibarra Escutia
Instituto Tecnológico de Toluca

Linda M. Medina Herrera
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Ciudad de México



MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • MADRID • NUEVA YORK
SAN JUAN • SANTIAGO • SÃO PAULO • AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL
NUEVA DELHI • SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TORONTO

Director Higher Education: Miguel Ángel Toledo Castellanos
Editor sponsor: Pablo E. Roig Vázquez
Coordinadora editorial: Marcela I. Rocha Martínez
Editora de desarrollo: Ana L. Delgado Rodríguez
Supervisor de producción: Zeferino García García
Traducción: Joel Ibarra Escutia, Ángel Hernández Fernández, Gabriel Nagore Cázares, Sergio Antonio Durán Reyes

CÁLCULO 2 DE VARIAS VARIABLES
Novena edición



Edificio Punta Santa Fe
Prolongación Paseo de la Reforma Núm. 1015, Torre A
Piso 17, Colonia Desarrollo Santa Fe
Delegación Álvaro Obregón
C.P. 01376, México, D.F.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

ISBN 978-970-10-7134-2

1234567890 109876543210

Impreso en China *Printed in China*

Contenido

Unas palabras de los autores

¡Bienvenido a la novena edición de *Cálculo*! Nos enorgullece ofrecerle una nueva versión revisada de nuestro libro de texto. Mucho ha cambiado desde que escribimos la primera edición hace más de 35 años. En cada edición los hemos escuchado a ustedes, esto es, nuestros usuarios, y hemos incorporado muchas de sus sugerencias para mejorar el libro.

A lo largo de los años, nuestro objetivo ha sido siempre escribir con precisión y de manera legible conceptos fundamentales del cálculo, claramente definidos y demostrados. Al escribir para estudiantes, nos hemos esforzado en ofrecer características y materiales que desarrollen las habilidades de todos los tipos de estudiantes. En cuanto a los profesores, nos enfocamos en proporcionar un instrumento de enseñanza amplio que emplea técnicas pedagógicas probadas, y les damos libertad para que usen en forma más eficiente el tiempo en el salón de clase.

También hemos agregado en esta edición una nueva característica denominada ejercicios *Para discusión*. Estos problemas conceptuales sintetizan los aspectos clave y proporcionan a los estudiantes mejor comprensión de cada uno de los conceptos de sección. Los ejercicios *Para discusión* son excelentes para esa actividad en el salón de clase o en la preparación de exámenes, y a los profesores puede resultarles valioso integrar estos problemas dentro de su repaso de la sección. Éstas y otras nuevas características se unen a nuestra pedagogía probada en el tiempo, con la meta de permitir a los estudiantes y profesores hacer el mejor uso del libro.

Esperamos que disfrute la novena edición de *Cálculo*. Como siempre, serán bienvenidos los comentarios y sugerencias para continuar mejorando la obra.

Ron Larson

Bruce H. Edwards

Agradecimientos

Nos gustaría dar las gracias a muchas personas que nos ayudaron en varias etapas de este proyecto a lo largo de los últimos 35 años. Su estímulo, críticas y sugerencias han sido invaluables.

Revisores de la novena edición

Ray Cannon, *Baylor University*
Sadeq Elbaneh, *Buffalo State College*
J. Fasteen, *Portland State University*
Audrey Gillant, *Binghamton University*
Sudhir Goel, *Valdosta State University*
Marcia Kemen, *Wentworth Institute of Technology*
Ibrahima Khalil Kaba, *Embry Riddle Aeronautical University*
Jean-Baptiste Meilhan, *University of California Riverside*
Catherine Moushon, *Elgin Community College*
Charles Odion, *Houston Community College*
Greg Oman, *The Ohio State University*
Dennis Pence, *Western Michigan University*
Jonathan Prewett, *University of Wyoming*
Lori Dunlop Pyle, *University of Central Florida*
Aaron Robertson, *Colgate University*
Matthew D. Sosa, *The Pennsylvania State University*
William T. Trotter, *Georgia Institute of Technology*
Dr. Draga Vidakovic, *Georgia State University*
Jay Wiestling, *Palomar College*
Jianping Zhu, *University of Texas at Arlington*

Miembros del Comité de Asesores de la novena edición

Jim Braselton, *Georgia Southern University*; Sien Deng, *Northern Illinois University*; Dimitar Grantcharov, *University of Texas*, *Arlington*; Dale Hughes, *Johnson County Community College*; Dr. Philippe B. Laval, *Kennesaw State University*; Kouok Law, *Georgia Perimeter College*, *Clarkson Campus*; Mara D. Neusel, *Texas Tech University*; Charlotte Newsom, *Tidewater Community College*, *Virginia Beach Campus*; Donald W. Orr, *Miami Dade College*, *Kendall Campus*; Jude Socrates, *Pasadena City College*; Betty Travis, *University of Texas at San Antonio*; Kuppalapalle Vajravelu, *University of Central Florida*

Revisores de ediciones anteriores

Stan Adamski, *Owens Community College*; Alexander Arhangelskii, *Ohio University*; Seth G. Armstrong, *Southern Utah University*; Jim Ball, *Indiana State University*; Marcelle Bessman, *Jacksonville University*; Linda A. Bolte, *Eastern Washington University*; James Braselton, *Georgia Southern University*; Harvey Braverman, *Middlesex County College*; Tim Chappell, *Penn Valley Community College*; Oiyin Pauline Chow, *Harrisburg Area Community College*; Julie M. Clark, *Hollins University*; P.S. Crooke, *Vanderbilt University*;

Jim Dotzler, *Nassau Community College*; Murray Eisenberg, *University of Massachusetts at Amherst*; Donna Flint, *South Dakota State University*; Michael Frantz, *University of La Verne*; Sudhir Goel, *Valdosta State University*; Arek Goetz, *San Francisco State University*; Donna J. Gorton, *Butler County Community College*; John Gosselin, *University of Georgia*; Shahryar Heydari, *Piedmont College*; Guy Hogan, *Norfolk State University*; Ashok Kumar, *Valdosta State University*; Kevin J. Leith, *Albuquerque Community College*; Douglas B. Meade, *University of South Carolina*; Teri Murphy, *University of Oklahoma*; Darren Narayan, *Rochester Institute of Technology*; Susan A. Natale, *The Ursuline School, NY*; Terence H. Perciante, *Wheaton College*; James Pommersheim, *Reed College*; Leland E. Rogers, *Pepperdine University*; Paul Seeburger, *Monroe Community College*; Edith A. Silver, *Mercer County Community College*; Howard Speier, *Chandler-Gilbert Community College*; Desmond Stephens, *Florida A&M University*; Jianzhong Su, *University of Texas at Arlington*; Patrick Ward, *Illinois Central College*; Diane Zych, *Erie Community College*

Muchas gracias a Robert Hostetler, de The Behrend College, en The Pennsylvania State University, y a David Heyd, de la misma institución, por sus importantes contribuciones a las ediciones previas de este texto.

Una nota especial de agradecimiento a los profesores que respondieron nuestra encuesta y a los más de dos millones de estudiantes que han usado las ediciones anteriores de la obra.

También quisiéramos agradecer al personal de Larson Texts, Inc., que apoyó en la preparación del manuscrito, realizó el diseño editorial, levantó la tipografía y leyó las pruebas de las páginas y suplementos en la edición en inglés.

En el ámbito personal, estamos agradecidos con nuestras esposas, Deanna Gilbert Larson y Consuelo Edwards, por su amor, paciencia y apoyo. Además, una nota especial de gratitud para R. Scott O'Neil.

Si usted tiene sugerencias para mejorar este texto, por favor siéntanse con la libertad de escribirnos. A lo largo de los años hemos recibido muchos comentarios útiles tanto de los profesores como de los estudiantes, y los valoramos sobremanera.

Ron Larson

Bruce H. Edwards

Características

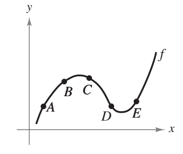
Herramientas pedagógicas

PARA DISCUSIÓN

¡NUEVO! Los ejercicios para discusión que aparecen ahora en cada sección sintetizan los conceptos principales de cada una y muestran a los estudiantes cómo se relacionan los temas. A menudo constituyen problemas de varias partes que contienen aspectos conceptuales y no computacionales, y que pueden utilizarse en discusiones de clase o en la preparación de exámenes.

Para discusión

72. Utilizar la gráfica para responder a las siguientes preguntas.



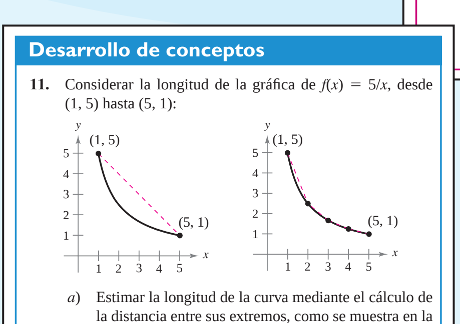
a) ¿Entre qué par de puntos consecutivos es mayor la razón de cambio promedio de la función?

b) ¿La razón de cambio promedio de f entre A y B es mayor o menor que el la razón de cambio instantáneo en B?

c) Trazar una recta tangente a la gráfica entre los puntos C y D cuya pendiente sea igual a la razón de cambio promedio de la función entre C y D.

Desarrollo de conceptos

11. Considerar la longitud de la gráfica de $f(x) = 5/x$, desde (1, 5) hasta (5, 1):



a) Estimar la longitud de la curva mediante el cálculo de la distancia entre sus extremos, como se muestra en la primera figura.

b) Estimar la longitud de la curva mediante el cálculo de las longitudes de los cuatro segmentos de recta, como se muestra en la segunda figura.

c) Describir cómo se podría continuar con este proceso a fin de obtener una aproximación más exacta de la longitud de la curva.

DESARROLLO DE CONCEPTOS

Los ejercicios de desarrollo de conceptos son preguntas diseñadas para evaluar la comprensión de los estudiantes en torno a los conceptos básicos de cada sección. Estos ejercicios animan a los estudiantes a verbalizar y escribir respuestas, lo que promueve habilidades de comunicación técnica que serán invaluables en sus futuras carreras.

AYUDAS DE ESTUDIO

Las ayudas de estudio distinguen errores comunes, indican casos especiales que pueden provocar confusión, y amplían a conceptos importantes. Estas ayudas proporcionan a los estudiantes información puntual, similar a los comentarios del profesor en clase.

AYUDA DE ESTUDIO Cuando se use la definición para encontrar la derivada de una función, la clave consiste en volver a expresar el cociente incremental (o cociente de diferencias), de manera que Δx no aparezca c... denominador.

AYUDA DE ESTUDIO El ejemplo 3 también se puede resolver sin hacer uso de la regla de la cadena, si se observa que ... $+ 3x^4 + 3x^2 + 1$

AYUDA DE ESTUDIO Tener en cuenta que se puede comprobar la respuesta de un problema de integración al derivar la

EJEMPLO 1 Levantamiento de un objeto

Determinar el trabajo realizado al levantar un objeto de 50 libras a 4 pies.

Solución La magnitud de la fuerza requerida F es el peso del objeto, como se muestra en la figura 7.48. Así, el trabajo realizado al levantar el objeto 4 pies es

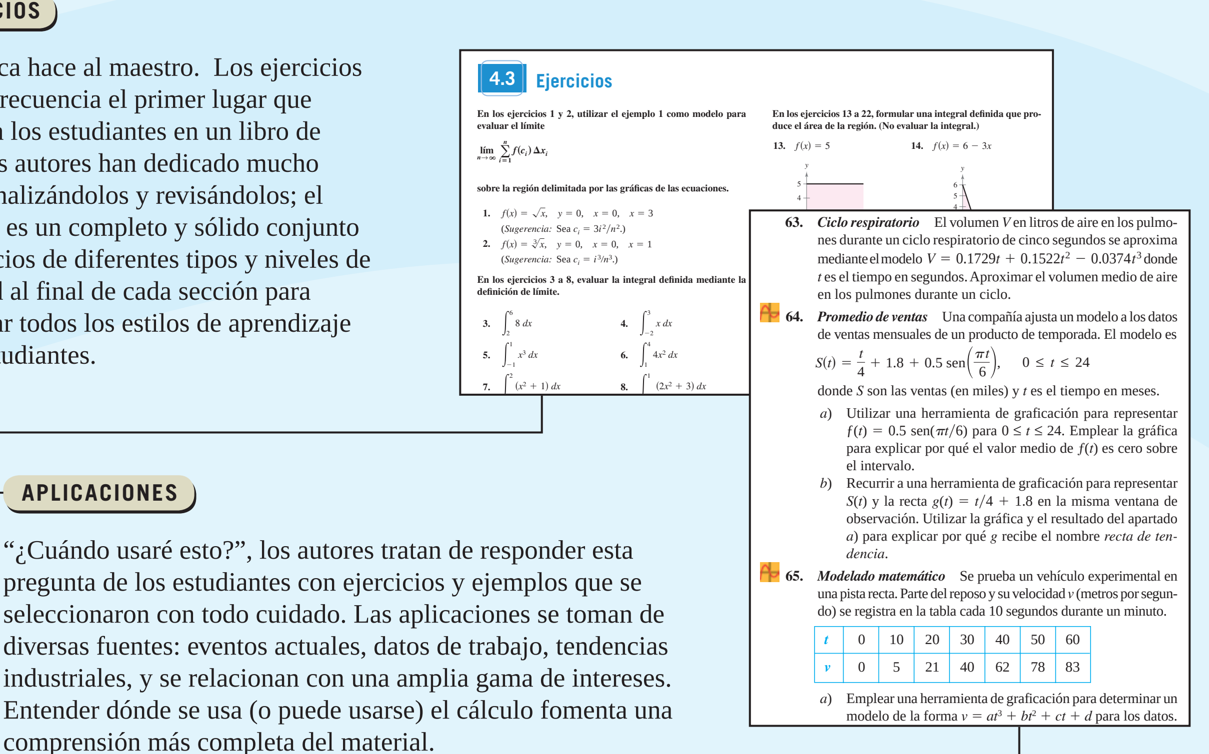
$$
\begin{aligned}
W &= FD && \text{Trabajo = (fuerza)(distancia).}\\
&= 50(4) && \text{Fuerza = 50 libras, distancia = 4 pies.}\\
&= 200 \text{ libras-pies.}
\end{aligned}
$$

EJEMPLOS

A lo largo del texto, se trabajan ejemplos paso a paso, que muestran los procedimientos y técnicas para resolver problemas, y dan a los estudiantes una comprensión amplia de los conceptos del cálculo.

EJERCICIOS

La práctica hace al maestro. Los ejercicios son con frecuencia el primer lugar que consultan los estudiantes en un libro de texto. Los autores han dedicado mucho tiempo analizándolos y revisándolos; el resultado es un completo y sólido conjunto de ejercicios de diferentes tipos y niveles de dificultad al final de cada sección para considerar todos los estilos de aprendizaje de los estudiantes.



4.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 y 2, utilizar el ejemplo 1 como modelo para evaluar el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$

sobre la región delimitada por las gráficas de las ecuaciones.

1. $f(x) = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$
   (*Sugerencia:* Sea $c_i = 3i^2/n^2$.)
2. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$
   (*Sugerencia:* Sea $c_i = i^3/n^3$.)

En los ejercicios 3 a 8, evaluar la integral definida mediante la definición de límite.

3. $\int_2^6 8\,dx$
4. $\int_{-2}^3 x\,dx$
5. $\int_{-1}^1 x^3\,dx$
6. $\int_1^4 4x^2\,dx$
7. $\int^2 (x^2 + 1)\,dx$
8. $\int^1 (2x^2 + 3)\,dx$

En los ejercicios 13 a 22, formular una integral definida que produce el área de la región. (No evaluar la integral.)

13. $f(x) = 5$
14. $f(x) = 6 - 3x$

63. ***Ciclo respiratorio*** El volumen V en litros de aire en los pulmones durante un ciclo respiratorio de cinco segundos se aproxima mediante el modelo $V = 0.1729t + 0.1522t^2 - 0.0374t^3$ donde t es el tiempo en segundos. Aproximar el volumen medio de aire en los pulmones durante un ciclo.

64. ***Promedio de ventas*** Una compañía ajusta un modelo a los datos de ventas mensuales de un producto de temporada. El modelo es

$$S(t) = \frac{t}{4} + 1.8 + 0.5\,\text{sen}\left(\frac{\pi t}{6}\right), \qquad 0 \le t \le 24$$

donde S son las ventas (en miles) y t es el tiempo en meses.

a) Utilizar una herramienta de graficación para representar $f(t) = 0.5\,\text{sen}(\pi t/6)$ para $0 \le t \le 24$. Emplear la gráfica para explicar por qué el valor medio de $f(t)$ es cero sobre el intervalo.

b) Recurrir a una herramienta de graficación para representar $S(t)$ y la recta $g(t) = t/4 + 1.8$ en la misma ventana de observación. Utilizar la gráfica y el resultado del apartado *a*) para explicar por qué g recibe el nombre *recta de tendencia*.

65. ***Modelado matemático*** Se prueba un vehículo experimental en una pista recta. Parte del reposo y su velocidad v (metros por segundo) se registra en la tabla cada 10 segundos durante un minuto.

t	0	10	20	30	40	50	60
v	0	5	21	40	62	78	83

a) Emplear una herramienta de graficación para determinar un modelo de la forma $v = at^3 + bt^2 + ct + d$ para los datos.

APLICACIONES

"¿Cuándo usaré esto?", los autores tratan de responder esta pregunta de los estudiantes con ejercicios y ejemplos que se seleccionaron con todo cuidado. Las aplicaciones se toman de diversas fuentes: eventos actuales, datos de trabajo, tendencias industriales, y se relacionan con una amplia gama de intereses. Entender dónde se usa (o puede usarse) el cálculo fomenta una comprensión más completa del material.

318 CAPÍTULO 4 Integración

4 Ejercicios de repaso

En los ejercicios 1 y 2, utilizar la gráfica de f' para dibujar una gráfica de f.

1. 2.

En los ejercicios 3 a 8, encontrar la integral indefinida.

3. $\int (4x^2 + x + 3)\,dx$
4. $\int \frac{2}{\sqrt[3]{3x}}\,dx$
5. $\int \frac{x^4 + 8}{x^3}\,dx$
6. $\int \frac{x^4 - 4x^2 + 1}{x^2}\,dx$
7. $\int (2x - 9\,\text{sen}\,x)\,dx$
8. $\int (5\cos x - 2\sec^2 x)\,dx$
9. Encontrar la solución particular de la ecuación diferencial $f'(x) = -6x$ cuya gráfica pasa por el punto $(1, -2)$.
10. Encontrar la solución particular de la ecuación diferencial $f''(x) = 6(x - 1)$ cuya gráfica pasa por el punto $(2, 1)$ y es tangente a la recta $3x - y - 5 = 0$ en ese punto.

Campos de pendientes **En los ejercicios 11 y 12 se da una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes. *a*) Dibujar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial en el campo de pendiente, una de las cuales pase a través del punto indicado. *b*) Utilizar la integración para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y utilizar una herramienta de graficación para representar la solución.**

11. $\frac{dy}{dx} = 2x - 4$, $(4, -2)$
12. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^2 - 2x$, $(6, 2)$

una distancia de 264 pies. Encontrar la distancia en la cual el automóvil puede llegar al reposo a partir de una velocidad de 30 millas por hora, suponiendo la misma desaceleración constante.

15. ***Velocidad y aceleración*** Se lanza una pelota hacia arriba verticalmente desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 96 pies por segundo.
   a) ¿Cuánto tardará la pelota en alcanzar su altura máxima? ¿Cuál es la altura máxima?
   b) ¿Cuándo la velocidad de la pelota es la mitad de la velocidad inicial?
   c) ¿A qué altura está la pelota cuando su velocidad es la mitad de la velocidad inicial?
16. ***Modelado matemático*** La tabla muestra las velocidades (en millas por hora) de dos carros sobre una rampa de acceso a una carretera interestatal. El tiempo t está en segundos.

t	0	5	10	15	20	25	30
v_1	0	2.5	7	16	29	45	65
v_2	0	21	38	51	60	64	65

   a) Reescribir las velocidades en pies por segundo.
   b) Usar las capacidades de regresión de una herramient graficación para encontrar los modelos cuadráticos par datos en el apartado *a*).
   c) Aproximar la distancia recorrida por cada carro durant 30 segundos. Explicar la diferencia en las distancias.

En los ejercicios 17 y 18, utilizar la notación sigma para escr la suma.

17. $\frac{1}{3(1)} + \frac{1}{3(2)} + \frac{1}{3(3)} + \cdots + \frac{1}{3(10)}$
18. $\left(\frac{3}{n}\right)\left(\frac{1+1}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{n}\right)\left(\frac{2+1}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$

En los ejercicios 19 a 22, utilizar las propiedades de las sum el teorema 4.2 para calcular las sumas.

19. $\sum_{i=1}^{20} 2i$
20. $\sum_{i=1}^{20} (4i - 1)$
21. $\sum_{i=1}^{20} (i + 1)^2$
22. $\sum_{i=1}^{12} i(i^2 - 1)$
23. Escribir en notación sigma *a*) la suma de los primeros diez teros impares positivos, *b*) la suma de los cubos de los prim n enteros positivos y *c*) $6 + 10 + 14 + 18 + \cdots + 42$.
24. Calcular cada suma para $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 5$, $x_4 =$

EJERCICIOS DE REPASO

Los ejercicios de repaso ubicados al final de cada capítulo proporcionan a los estudiantes más oportunidades para practicar. Estos conjuntos de ejercicios constituyen una revisión completa de los conceptos del capítulo y son un medio excelente para que los estudiantes preparen un examen.

SP Solución de problemas

1. Sea $(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$, $x > 0$.
   a) Encontrar $L(1)$.
   b) Encontrar $L'(x)$ y $L'(1)$.
   c) Utilizar una herramienta de graficación para aproximar el valor de x (hasta tres lugares decimales) para el cual $L(x) = 1$.
   d) Demostrar que $L(x_1\ x_2) = L(x_1) + L(x_2)$ para todos los valores positivos de x_1 y x_2.
2. Sea $(x) = \int_2^x \text{sen}\,t^2\,dt$.
   a) Utilizar una herramienta de graficación para completar la tabla.

x	0	1.0	1.5	1.9	2.0
$F(x)$					

x	2.1	2.5	3.0	4.0	5.0
$F(x)$					

   b) Sea $G(x) = \frac{1}{x-2}F(x) = \frac{1}{x-2}\int_2^x \text{sen}\,t^2\,dt$. Utilizar una herramienta de graficacón para completar la tabla y estimar $\lim_{x\to 2} G(x)$.

x	1.9	1.95	1.99	2.01	2.1
$G(x)$					

   c) Utilizar la definición de la derivada para encontrar el valor exacto del límite $\lim_{x\to 2} G(x)$.

En los ejercicios 3 y 4, *a*) escribir el área bajo la gráfica de la función dada definida sobre el intervalo indicado como un límite. Después *b*) calcular la suma del apartado *a*) y *c*) calcular el límite

6. La **aproximación gaussiana de dos puntos** para f es
   $$\int_{-1}^1 f(x)\,dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$
   a) Utilizar esta fórmula para aproximar $\int_{-1}^1 \cos x\,dx$. Encontrar el error de la aproximación.
   b) Utilizar esta fórmula para aproximar $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$.
   c) Probar que la aproximación gaussiana de dos puntos es exacta para todos los polinomios de grado 3 o menor.
7. Arquímedes demostró que el área de un arco parabólico es igual a $\frac{2}{3}$ del producto de la base y la altura (ver la figura).

   a) Graficar el arco parabólico delimitado por $y = 9 - x^2$ y el eje x. Utilizar una integral apropiada para encontrar el área A.
   b) Encontrar la base y la altura del arco y verificar la fórmula de Arquímedes.
   c) Demostrar la fórmula de Arquímedes para una parábola general.
8. Galileo Galilei (1564-1642) enunció la siguiente proposición relativa a los objetos en caída libre:
   El tiempo en cualquier espacio que se recorre por un cuerpo acelerado uniformemente es igual al tiempo en el cual ese mismo espacio se recorrería por el mismo cuerpo movién-

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Estos conjuntos de ejercicios al final de cada capítulo prueban las habilidades de los estudiantes con preguntas desafiantes que retan su pensamiento.

Cálculos clásicos con relevancia contemporánea

TEOREMAS

Los teoremas proporcionan el marco conceptual del cálculo; se enuncian claramente y se distinguen del resto del texto por medio de recuadros para tener una rápida referencia visual. Las demostraciones más importantes muchas veces siguen al teorema, y se proporcionan otras más en un apéndice.

TEOREMA 4.9 EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y F es una antiderivada de f en el intervalo $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

DEFINICIONES

Al igual que con los teoremas, las definiciones se enuncian claramente utilizando palabras sencillas y precisas; también se separan del texto mediante recuadros para tener una rápida referencia visual.

DEFINICIÓN DE LONGITUD DE ARCO

Sea la función dada por $y = f(x)$ que represente una curva suave en el intervalo $[a, b]$. La longitud del arco de f entre a y b es

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

Similarmente, para una curva suave dada por $x = g(y)$, la **longitud de arco** de g entre c y d es

$$s = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\,dy.$$

PROCEDIMIENTOS

Los procedimientos aparecen separados del texto para brindar una referencia fácil. Estas líneas proporcionan a los estudiantes instrucciones paso a paso que les ayudarán a resolver problemas de manera rápida y eficiente.

La regla de L'Hôpital también puede aplicarse a los límites unilaterales, como se demuestra en los ejemplos 6 y 7.

EJEMPLO 6 Forma indeterminada 0^0

Encontrar $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x$.

Solución Porque la sustitución directa produce la forma indeterminada 0^0, proceder como se muestra abajo. Para empezar, asumir que el límite existe y es igual a y.

$$y = \lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x \qquad \text{Forma indeterminada } 0^0.$$
$$\ln y = \ln\Big[\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x\Big] \qquad \text{Tomar un logaritmo natural de cada lado.}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} [\ln(\operatorname{sen} x)^x] \qquad \text{Continuidad.}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} [x \ln(\operatorname{sen} x)] \qquad \text{Forma indeterminada } 0\cdot(-\infty).$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{1/x} \qquad \text{Forma indeterminada } -\infty/\infty.$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cot x}{-1/x^2} \qquad \text{Regla de L'Hôpital.}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{\tan x} \qquad \text{Forma indeterminada } 0/0.$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x}{\sec^2 x} = 0 \qquad \text{Regla de L'Hôpital.}$$

Ahora, porque $\ln y = 0$, concluir que $y = e^0 = 1$, y se sigue que

$$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x = 1.$$

NOTAS

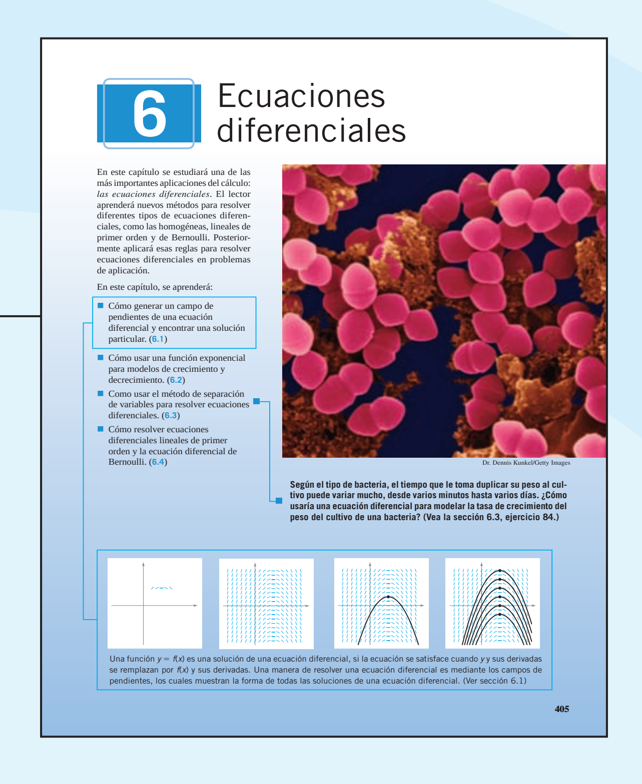
Las notas proporcionan detalles adicionales acerca de los teoremas, definiciones y ejemplos. Ofrecen una profundización adicional o generalizaciones importantes que los estudiantes podrían omitir involuntariamente. Al igual que las ayudas de estudio, las notas resultan invaluables para los estudiantes.

NOTA Al aplicar la fórmula para la longitud de arco a una curva, hay que asegurarse de que la curva se recorra una sola vez en el intervalo de integración. Por ejemplo, el círculo dado por $x = \cos t$ y $y = \operatorname{sen} t$, recorre una sola vez el intervalo $0 \le t \le 2\pi$, pero recorre dos veces el intervalo $0 \le t \le 4\pi$. ■

Ampliar la experiencia del cálculo

ENTRADAS DE CAPÍTULO

Las entradas de capítulo proporcionan motivación inicial para el material que se abordará en el capítulo. Además de los objetivos, en la entrada de cada capítulo un concepto importante se relaciona con una aplicación del mundo real. Esto motiva a los estudiantes a que descubran la relevancia del cálculo en la vida.


6 Ecuaciones diferenciales

En este capítulo se estudiará una de las más importantes aplicaciones del cálculo: *las ecuaciones diferenciales*. El lector aprenderá nuevos métodos para resolver diferentes tipos de ecuaciones diferenciales, como las homogéneas, lineales de primer orden y de Bernoulli. Posteriormente aplicará esas reglas para resolver ecuaciones diferenciales en problemas de aplicación.

En este capítulo, se aprenderá:

- Cómo generar un campo de pendientes de una ecuación diferencial y encontrar una solución particular. (6.1)
- Cómo usar una función exponencial para modelos de crecimiento y decrecimiento. (6.2)
- Como usar el método de separación de variables para resolver ecuaciones diferenciales. (6.3)
- Cómo resolver ecuaciones diferenciales lineales de primer orden y la ecuación diferencial de Bernoulli. (6.4)

Dr. Dennis Kunkel/Getty Images

Según el tipo de bacteria, el tiempo que le toma duplicar su peso al cultivo puede variar mucho, desde varios minutos hasta varios días. ¿Cómo usaría una ecuación diferencial para modelar la tasa de crecimiento del peso del cultivo de una bacteria? (Vea la sección 6.3, ejercicio 84.)

Una función $y = f(x)$ es una solución de una ecuación diferencial, si la ecuación se satisface cuando y y sus derivadas se remplazan por $f(x)$ y sus derivadas. Una manera de resolver una ecuación diferencial es mediante los campos de pendientes, los cuales muestran la forma de todas las soluciones de una ecuación diferencial. (Ver sección 6.1)

405

EXPLORACIÓN

Converso del teorema 4.4 ¿Es verdadero el converso del teorema 4.4 ? Esto es, si una función es integrable, ¿tiene que ser continua? Explicar el razonamiento y proporcionar ejemplos.

Describir las relaciones entre continuidad, derivabilidad e integrabilidad. ¿Cuál es la condición más fuerte? ¿Cuál es la más débil? ¿Qué condiciones implican otras condiciones?

EXPLORACIÓN

Suponer que se pide encontrar una de las siguientes integrales. ¿Cuál elegiría? Explicar la respuesta.

a) $\int \sqrt{x^3+1}\,dx$ o $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$

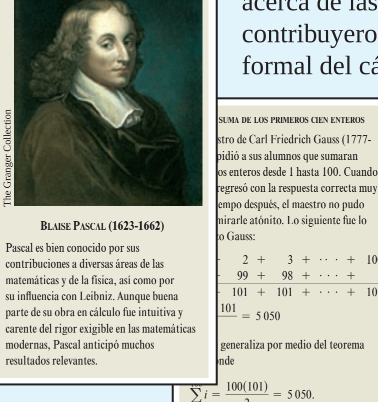
b) $\int \tan(3x)\sec^2(3x)\,dx$ o $\int \tan(3x)\,dx$

EXPLORACIONES

Las exploraciones proporcionan a los estudiantes retos únicos para estudiar conceptos que no se han cubierto formalmente. Les permiten aprender mediante el descubrimiento e introducen temas relacionados con los que están estudiando en el momento. Al explorar temas de esta manera, se estimula a que los estudiantes piensen de manera más amplia.

NOTAS HISTÓRICAS Y BIOGRAFÍAS

Las notas históricas proporcionan a los estudiantes información sobre los fundamentos del cálculo; las biografías les ayudan a sensibilizar y a enseñarles acerca de las personas que contribuyeron a la creación formal del cálculo.



BLAISE PASCAL (1623-1662)

Pascal es bien conocido por sus contribuciones a diversas áreas de las matemáticas y de la física, así como por su influencia con Leibniz. Aunque buena parte de su obra en cálculo fue intuitiva y carente del rigor exigible en las matemáticas modernas, Pascal anticipó muchos resultados relevantes.

SUMA DE LOS PRIMEROS CIEN ENTEROS

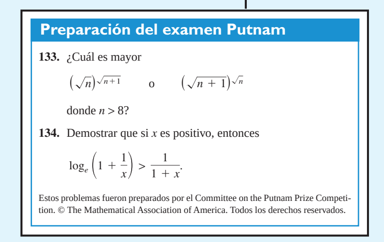
...stro de Carl Friedrich Gauss (1777-... pidió a sus alumnos que sumaran ...os enteros desde 1 hasta 100. Cuando ...regresó con la respuesta correcta muy ...empo después, el maestro no pudo ...mirarle atónito. Lo siguiente fue lo ...o Gauss:

$$\begin{array}{l} \ldots 2 + 3 + \cdots + 100 \\ \ldots 99 + 98 + \cdots + 1 \\ \ldots 101 + 101 + \cdots + 101 \\ \ldots \frac{101}{} = 5\,050 \end{array}$$

...generaliza por medio del teorema ...nde

$$\sum_{i=1} i = \frac{100(101)}{2} = 5\,050.$$

DESAFÍOS DEL EXAMEN PUTNAM


Preparación del examen Putnam

133. ¿Cuál es mayor

$(\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}}$ o $(\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}$

donde $n > 8$?

134. Demostrar que si x es positivo, entonces

$\log_e\left(1+\frac{1}{x}\right) > \frac{1}{1+x}.$

Estos problemas fueron preparados por el Committee on the Putnam Prize Competition. © The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

Las preguntas del examen Putnam aparecen en algunas secciones y se toman de los exámenes Putnam reales. Estos ejercicios extenderán los límites del entendimiento de los estudiantes en relación con el cálculo y brindarán desafíos adicionales para aquellos más interesados.

PROYECTOS DE SECCIÓN

Los proyectos aparecen en algunas secciones y exploran a mayor profundidad las aplicaciones relacionadas con los temas que se están estudiando. Proporcionan una forma interesante y entretenida para que los estudiantes trabajen e investiguen ideas de manera conjunta.

PROYECTO DE TRABAJO

Demostración del teorema fundamental

Utilizar una herramienta de graficación para representar la función $y_1 = \operatorname{sen}^2 t$ en el intervalo $0 \le t \le \pi$. Sea $F(x)$ la siguiente función de x.

$$F(x) = \int_0^x \operatorname{sen}^2 t\,dt$$

a) Completar la tabla. Explicar por qué los valores de f están creciendo.

x	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π
$F(x)$							

b) Utilizar las funciones de integración de una herramienta de graficación para representar F.

c) Emplear las funciones de derivación de una herramienta de graficación para hacer la gráfica de $F'(x)$. ¿Cómo se relaciona esta gráfica con la gráfica de la parte *b)*?

d) Verificar que la derivada de $y = (1/2)t - (\operatorname{sen} 2t)/4$ es $\operatorname{sen}^2 t$. Graficar y y escribir un pequeño párrafo acerca de cómo esta gráfica se relaciona con las de los apartados *b)* y *c)*.

Tecnología integrada para el mundo actual

EJEMPLO 5 Cambio de variables

Encontrar $\int x\sqrt{2x-1}\,dx$.

Solución Como en el ejemplo previo, considerar que $u = 2x - 1$ para obtener $dx = du/2$. Como el integrando contiene un factor de x, se tiene que despejar x en términos de u, como se muestra.

$u = 2x - 1 \quad \Rightarrow \quad x = (u+1)/2$ Resolver para x en términos de u.

Después de esto, utilizando la sustitución, se obtiene

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{2x-1}\,dx &= \int\left(\frac{u+1}{2}\right)u^{1/2}\left(\frac{du}{2}\right)\\ &= \frac{1}{4}\int(u^{3/2}+u^{1/2})\,du\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{u^{5/2}}{5/2}+\frac{u^{3/2}}{3/2}\right)+C\\ &= \frac{1}{10}(2x-1)^{5/2}+\frac{1}{6}(2x-1)^{3/2}+C.\end{aligned}$$

INVESTIGACIONES CON SISTEMAS ALGEBRAICOS POR COMPUTADORA

Los ejemplos a lo largo del libro se acompañan de investigaciones que emplean un sistema algebraico por computadora (por ejemplo, Maple®) para explorar de manera adicional un ejemplo relacionado en el libro. Permiten a los estudiantes explorar el cálculo manipulando funciones, gráficas, etc., y observar los resultados.

Razonamiento gráfico **En los ejercicios 55 a 58, *a*) usar una herramienta de graficación para representar gráficamente la función, *b*) representar su función inversa utilizando la herramienta de graficación y *c*) determinar si la gráfica de la relación inversa es una función inversa. Explicar la respuesta.**

55. $f(x) = x^3 + x + 4$ **56.** $h(x) = x\sqrt{4-x^2}$

EJERCICIOS CON HERRAMIENTAS DE GRAFICACIÓN

La comprensión con frecuencia mejora utilizando una gráfica o visualización. Los ejercicios de tecnología de graficación piden a los estudiantes recurrir a una herramienta de graficación para ayudar a encontrar una solución.

TECNOLOGÍA

A lo largo del libro, los recuadros de tecnología dan a los estudiantes una visión de cómo la tecnología puede usarse para ayudar a resolver problemas y explorar los conceptos del cálculo. No sólo proporcionan discusiones acerca de dónde la tecnología tiene éxito, sino también sobre dónde puede fracasar.

CAS ***Campos de pendientes*** **En los ejercicios 67 a 72, usar un sistema algebraico por computadora para *a*) trazar la gráfica del campo de pendientes para la ecuación diferencial y *b*) trazar la gráfica de la solución que satisface la condición inicial especificada.**

67. $\frac{dy}{dx} = 0.25y, \quad y(0) = 4$

68. $\frac{dy}{dx} = 4 - y, \quad y(0) = 6$

69. $\frac{dy}{dx} = 0.02y(10-y), \quad y(0) = 2$

70. $\frac{dy}{dx} = 0.2x(2-y), \quad y(0) = 9$

71. $\frac{dy}{dx} = 0.4y(3-x), \quad y(0) = 1$

72. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}e^{-x/8}\,\text{sen}\,\frac{\pi y}{4}, \quad y(0) =$

CAS **En los ejercicios 79 a 82, usar un sistema algebraico por computadora para encontrar la integral. Usar el sistema algebraico por computadora para hacer la gráfica de dos antiderivadas. Describir la relación entre las gráficas de las dos antiderivadas.**

79. $\int \frac{1}{x^2+4x+13}\,dx$ **80.** $\int \frac{x-2}{x^2+4x+13}\,dx$

81. $\int \frac{1}{1+\text{sen}\,\theta}\,d\theta$ **82.** $\int \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^3 dx$

CAS **En los ejercicios 33 a 40, usar un sistema algebraico por computadora para determinar la primitiva que atraviesa el punto dado. Usar el sistema para hacer la gráfica de la antiderivada resultante.**

33. $\int \frac{5x}{x^2-10x+25}\,dx, \ (6, 0)$ **34.** $\int \frac{6x^2+1}{x^2(x-1)^3}\,dx, \quad (2, 1)$

35. $\int \frac{x^2+x+2}{(x^2+2)^2}\,dx, \quad (0, 1)$ **36.** $\int \frac{x^3}{(x^2-4)^2}\,dx, \quad (3, 4)$

TECNOLOGÍA La regla de Simpson puede usarse para dar una buena aproximación del valor de la integral en el ejemplo 2 (para $n = 10$, la aproximación es 1.839). Al usar la integración numérica, sin embargo, se debe estar consciente de que la regla de Simpson no siempre da buenas aproximaciones cuando algunos de los límites de integración están cercanos a una asíntota vertical. Por ejemplo, usando el teorema fundamental del cálculo, se obtiene

$$\int_0^{1.99} \frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx \approx 6.213.$$

Aplicando la regla de Simpson (con $n = 10$) para esta integral se produce una aproximación de 6.889.

EJERCICIOS CON SISTEMAS ALGEBRAICOS POR COMPUTADORA

¡NUEVO! De igual manera que los ejercicios con herramientas de graficación, algunos ejercicios pueden resolverse mejor utilizando un sistema algebraico por computadora. Estos ejercicios son nuevos en esta edición.



Cónicas, ecuaciones paramétricas y coordenadas polares

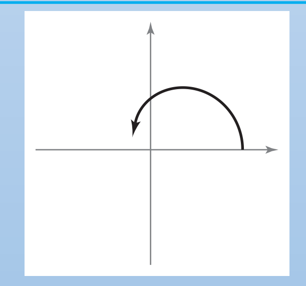
En este capítulo se analizarán y se escribirán ecuaciones de cónicas usando sus propiedades. También se aprenderá cómo escribir y graficar ecuaciones paramétricas y polares, y se verá cómo se puede usar el cálculo para estudiar tales gráficas. Además de las ecuaciones rectangulares de cónicas, también se estudiarán ecuaciones polares de cónicas.

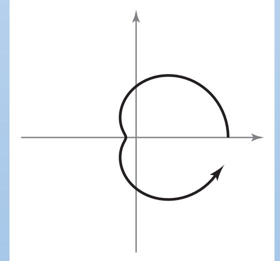
En este capítulo, se aprenderá:

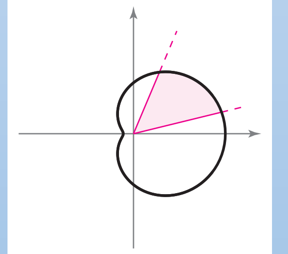
- Cómo analizar y escribir ecuaciones de una parábola, una elipse y una hipérbola. (10.1)
- Cómo trazar una curva representada por ecuaciones paramétricas. (10.2)
- Cómo usar un conjunto de ecuaciones paramétricas para encontrar la pendiente de una línea tangente a una curva y la longitud de arco de una curva. (10.3)
- Cómo dibujar la gráfica de una ecuación en forma polar, encontrar la pendiente de una línea tangente a una gráfica polar e identificar gráficas polares especiales. (10.4)
- Cómo encontrar el área de una región acotada por una gráfica polar y encontrar la longitud de arco de una gráfica polar. (10.5)
- Cómo analizar y escribir una ecuación polar de una cónica. (10.6)

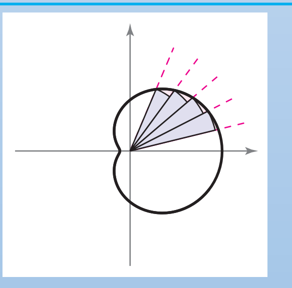


Se puede modelar la trayectoria de una pelota de béisbol bateada a una altura específica a un ángulo con el horizontal utilizando ecuaciones paramétricas. ¿Cómo se puede usar un conjunto de ecuaciones paramétricas para encontrar el ángulo mínimo al cual la pelota debe salir del bate para que el golpe sea un jonrón? (Ver la sección 10.2, ejercicio 75.)









En el sistema de coordenadas polares, graficar una ecuación implica trazar una curva alrededor de un punto fijo llamado el polo. Considerar una región acotada por una curva y por los rayos que contienen los puntos extremos de un intervalo sobre la curva. Pueden usarse sectores circulares para aproximar el área de tal región. En la sección 10.5 se verá cómo es posible usar el proceso de límite para encontrar esta área.

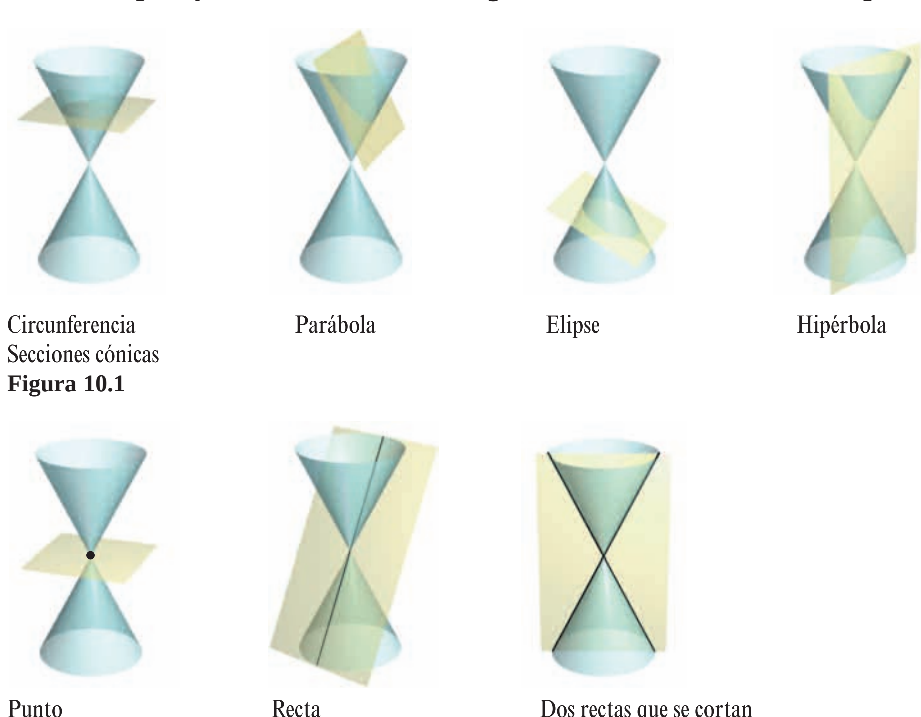


10.1 Cónicas y cálculo

- **Entender la definición de una sección cónica.**
- **Analizar y dar las ecuaciones de la parábola utilizando las propiedades de la parábola.**
- **Analizar y dar las ecuaciones de la elipse utilizando las propiedades de la elipse.**
- **Analizar y dar las ecuaciones de la hipérbola utilizando las propiedades de la hipérbola.**

Secciones cónicas

Toda **sección cónica** (o simplemente **cónica**) puede describirse como la intersección de un plano y un cono de dos hojas. En la figura 10.1 se observa que en las cuatro cónicas básicas el plano de intersección no pasa por el vértice del cono. Cuando el plano pasa por el vértice, la figura que resulta es una **cónica degenerada**, como se muestra en la figura 10.2.



Secciones cónicas
Figura 10.1

Cónicas degeneradas
Figura 10.2



HYPATIA (370-415 D.C.)

Los griegos descubrieron las secciones cónicas entre los años 600 y 300 a.C. A principios del periodo alejandrino ya se sabía lo suficiente acerca de las cónicas como para que Apolonio (269-190 a.C.) escribiera una obra de ocho volúmenes sobre el tema. Más tarde, hacia finales del periodo Alejandrino, Hypatia escribió un texto titulado *Sobre las cónicas de Apolonio*. Su muerte marcó el final de los grandes descubrimientos matemáticos en Europa por varios siglos.

Los primeros griegos se interesaron mucho por las propiedades geométricas de las cónicas. No fue sino 1900 años después, a principios del siglo XVII, cuando se hicieron evidentes las amplias posibilidades de aplicación de las cónicas, las cuales llegaron a jugar un papel prominente en el desarrollo del cálculo.

Existen varias formas de estudiar las cónicas. Se puede empezar, como lo hicieron los griegos, definiendo las cónicas en términos de la intersección de planos y conos, o se pueden definir algebraicamente en términos de la ecuación general de segundo grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Ecuación general de segundo grado.

Sin embargo, un tercer método en el que cada una de las cónicas está definida como el **lugar geométrico** (o colección) de todos los puntos que satisfacen cierta propiedad geométrica, funciona mejor. Por ejemplo, la circunferencia se define como el conjunto de todos los puntos (x, y) que son equidistantes de un punto fijo (h, k). Esta definición en términos del lugar geométrico conduce fácilmente a la ecuación estándar o canónica de la circunferencia

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

Ecuación estándar o canónica de la circunferencia.

Para información acerca de la rotación de ecuaciones de segundo grado en dos variables, ver el apéndice D.

PARA MAYOR INFORMACIÓN
Para conocer más sobre las actividades de esta matemática, consultar al artículo "Hypatia and her Mathematics" de Michael A. B. Deakin en *The American Mathematical Monthly*.

Parábolas

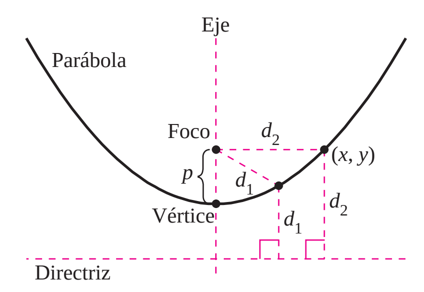


Figura 10.3

Una **parábola** es el conjunto de todos los puntos (x, y) equidistantes de una recta fija llamada **directriz** y de un punto fijo, fuera de dicha recta, llamado **foco**. El punto medio entre el foco y la directriz es el **vértice**, y la recta que pasa por el foco y el vértice es el **eje** de la parábola. Obsérvese en la figura 10.3 que la parábola es simétrica respecto de su eje.

TEOREMA 10.1 ECUACIÓN ESTÁNDAR O CANÓNICA DE UNA PARÁBOLA

La **forma estándar** o **canónica** de la ecuación de una parábola con vértice (h, k) y directriz $y = k - p$ es

$$(x - h)^2 = 4p(y - k).$$ Eje vertical.

Para la directriz $x = h - p$, la ecuación es

$$(y - k)^2 = 4p(x - h).$$ Eje horizontal.

El foco se encuentra en el eje a p unidades (*distancia dirigida*) del vértice. Las coordenadas del foco son las siguientes.

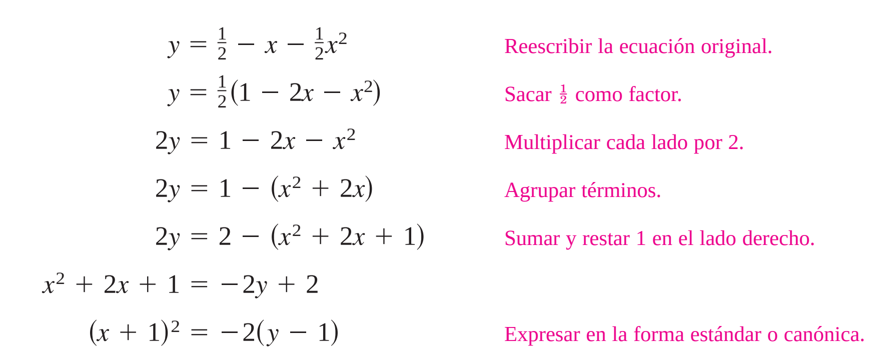
$(h, k + p)$ Eje vertical.

$(h + p, k)$ Eje horizontal.

EJEMPLO 1 Hallar el foco de una parábola

Hallar el foco de la parábola dada por $y = \frac{1}{2} - x - \frac{1}{2}x^2$.

Solución Para hallar el foco, se convierte a la forma canónica o estándar completando el cuadrado.



$y = \frac{1}{2} - x - \frac{1}{2}x^2$ Reescribir la ecuación original.

$y = \frac{1}{2}(1 - 2x - x^2)$ Sacar $\frac{1}{2}$ como factor.

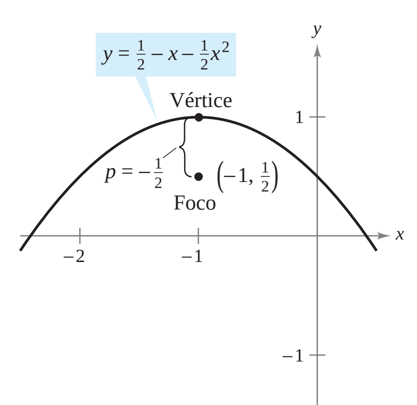
$2y = 1 - 2x - x^2$ Multiplicar cada lado por 2.

$2y = 1 - (x^2 + 2x)$ Agrupar términos.

$2y = 2 - (x^2 + 2x + 1)$ Sumar y restar 1 en el lado derecho.

$x^2 + 2x + 1 = -2y + 2$

$(x + 1)^2 = -2(y - 1)$ Expresar en la forma estándar o canónica.



Parábola con eje vertical, $p < 0$
Figura 10.4

Si se compara esta ecuación con $(x - h)^2 = 4p(y - k)$, se concluye que

$$h = -1, \qquad k = 1 \qquad \text{y} \qquad p = -\tfrac{1}{2}.$$

Como p es negativo, la parábola se abre hacia abajo, como se muestra en la figura 10.4. Por tanto, el foco de la parábola se encuentra a p unidades del vértice, o sea

$$(h, k + p) = \left(-1, \tfrac{1}{2}\right).$$ Foco.

A un segmento de la recta que pasa por el foco de una parábola y que tiene sus extremos en la parábola se le llama **cuerda focal**. La cuerda focal perpendicular al eje de la parábola es el **lado recto** (*latus rectum*). El ejemplo siguiente muestra cómo determinar la longitud del lado recto y la longitud del correspondiente arco cortado.

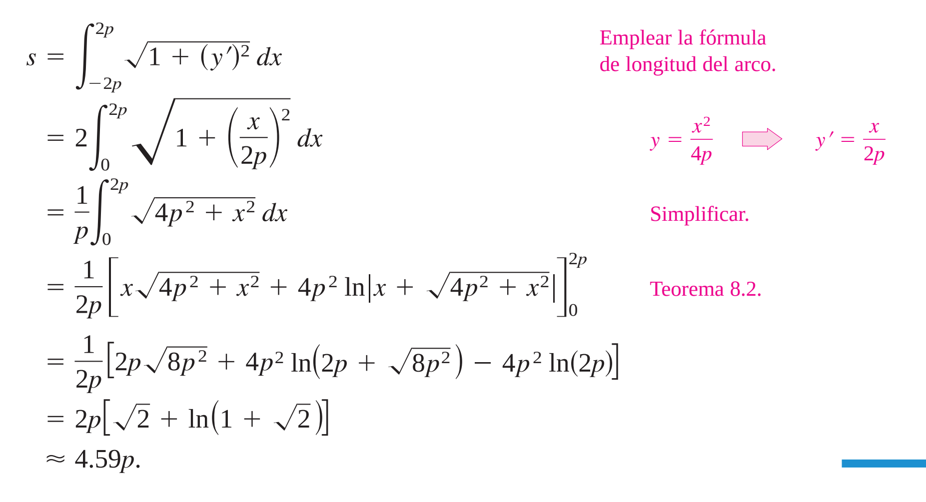
EJEMPLO 2 Longitud de la cuerda focal y longitud de arco

Encontrar la longitud del lado recto de la parábola dada por $x^2 = 4py$. Después, hallar la longitud del arco parabólico cortado por el lado recto.

Solución Debido a que el lado recto pasa por el foco $(0, p)$ y es perpendicular al eje y, las coordenadas de sus extremos son $(-x, p)$ y (x, p). Al sustituir, en la ecuación de la parábola, y por p se obtiene

$$x^2 = 4p(p) \Rightarrow x = \pm 2p.$$

Entonces, los extremos del lado recto son $(-2p, p)$ y $(2p, p)$, y se concluye que su longitud es $4p$, como se muestra en la figura 10.5. En cambio, la longitud del arco cortado es



$$s = \int_{-2p}^{2p} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx \quad \text{Emplear la fórmula de longitud del arco.}$$

$$= 2\int_0^{2p} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2p}\right)^2}\, dx \quad y = \frac{x^2}{4p} \Rightarrow y' = \frac{x}{2p}$$

$$= \frac{1}{p}\int_0^{2p} \sqrt{4p^2 + x^2}\, dx \quad \text{Simplificar.}$$

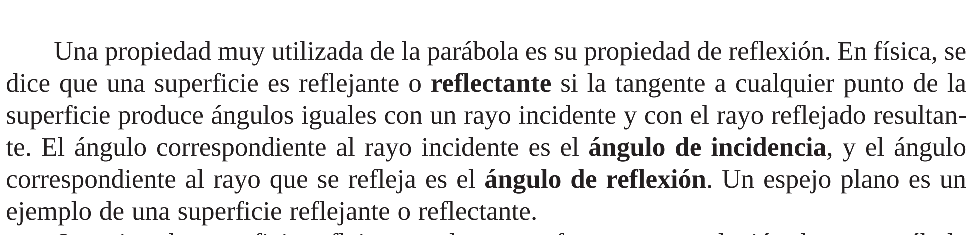
$$= \frac{1}{2p}\left[x\sqrt{4p^2 + x^2} + 4p^2 \ln\left|x + \sqrt{4p^2 + x^2}\right|\right]_0^{2p} \quad \text{Teorema 8.2.}$$

$$= \frac{1}{2p}\left[2p\sqrt{8p^2} + 4p^2 \ln\left(2p + \sqrt{8p^2}\right) - 4p^2 \ln(2p)\right]$$

$$= 2p\left[\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right]$$

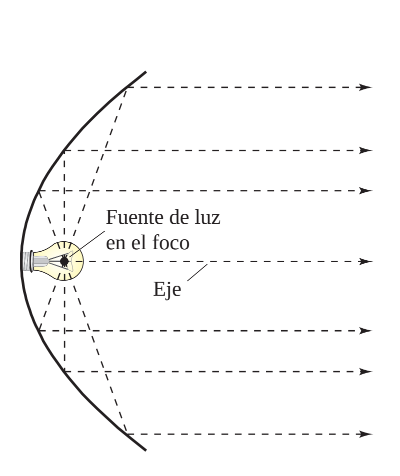
$$\approx 4.59p.$$

Longitud del lado recto o *latus rectum*: $4p$
Figura 10.5



Una propiedad muy utilizada de la parábola es su propiedad de reflexión. En física, se dice que una superficie es reflejante o **reflectante** si la tangente a cualquier punto de la superficie produce ángulos iguales con un rayo incidente y con el rayo reflejado resultante. El ángulo correspondiente al rayo incidente es el **ángulo de incidencia**, y el ángulo correspondiente al rayo que se refleja es el **ángulo de reflexión**. Un espejo plano es un ejemplo de una superficie reflejante o reflectante.

Otro tipo de superficie reflejante es la que se forma por revolución de una parábola alrededor de su eje. Una propiedad especial de los reflectores parabólicos es que permiten dirigir hacia el foco de la parábola todos los rayos incidentes paralelos al eje. Éste es el principio detrás del diseño de todos los espejos parabólicos que se utilizan en los telescopios de reflexión. Inversamente, todos los rayos de luz que emanan del foco de una linterna con reflector parabólico son paralelos, como se ilustra en la figura 10.6.



Reflector parabólico: la luz se refleja en rayos paralelos
Figura 10.6

TEOREMA 10.2 PROPIEDAD DE REFLEXIÓN DE UNA PARÁBOLA

Sea P un punto de una parábola. La tangente a la parábola en el punto P produce ángulos iguales con las dos rectas siguientes.

1. La recta que pasa por P y por el foco
2. La recta paralela al eje de la parábola que pasa por P



Bettmann/Corbis

Nicolás Copérnico (1473-1543)

Copérnico comenzó el estudio del movimiento planetario cuando se le pidió que corrigiera el calendario. En aquella época, el uso de la teoría de que la Tierra era el centro del Universo, no permitía predecir con exactitud la longitud de un año.

Elipses

Más de mil años después de terminar el periodo alejandrino de la matemática griega, comienza un renacimiento de la matemática y del descubrimiento científico en la civilización occidental. Nicolás Copérnico, astrónomo polaco, fue figura principal en este renacimiento. En su trabajo *Sobre las revoluciones de las esferas celestes*, Copérnico sostenía que todos los planetas, incluyendo la Tierra, giraban, en órbitas circulares, alrededor del Sol. Aun cuando algunas de las afirmaciones de Copérnico no eran válidas, la controversia desatada por su teoría heliocéntrica motivó a que los astrónomos buscaran un modelo matemático para explicar los movimientos del Sol y de los planetas que podían observar. El primero en encontrar un modelo correcto fue el astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630). Kepler descubrió que los planetas se mueven alrededor del Sol, en órbitas elípticas, teniendo al Sol, no como centro, sino como uno de los puntos focales de la órbita.

El uso de las elipses para explicar los movimientos de los planetas es sólo una de sus aplicaciones prácticas y estéticas. Como con la parábola, el estudio de este segundo tipo de cónica empieza definiéndola como lugar geométrico de puntos. Sin embargo, ahora se tienen *dos* puntos focales en lugar de uno.

Una **elipse** es el conjunto de todos los puntos (x, y), cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados **focos** es constante. (Ver la figura 10.7.) La recta que une a los focos interseca o corta a la elipse en dos puntos, llamados **vértices**. La cuerda que une a los vértices es el **eje mayor**, y su punto medio es el **centro** de la elipse. La cuerda a través del centro, perpendicular al eje mayor, es el **eje menor** de la elipse. (Ver la figura 10.8.)

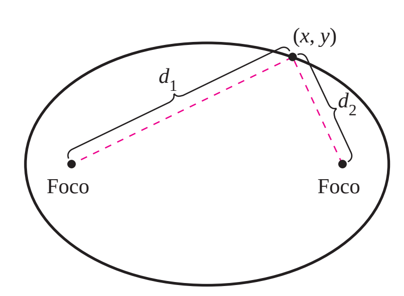


Figura 10.7

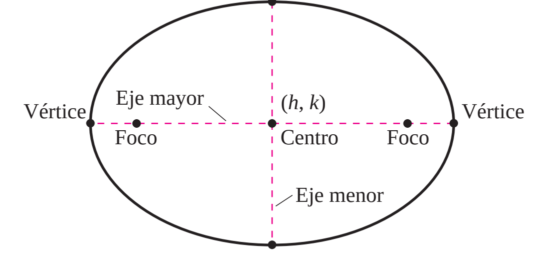


Figura 10.8

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para saber más acerca de cómo “hacer explotar” una elipse para convertirla en una parábola, consultar al artículo “Exploding the Ellipse” de Arnold Good en *Mathematics Teacher*.

TEOREMA 10.3 ECUACIÓN ESTÁNDAR O CANÓNICA DE UNA ELIPSE

La forma estándar o canónica de la ecuación de una elipse con centro (h, k) y longitudes de los ejes mayor y menor $2a$ y $2b$, respectivamente, donde $a > b$, es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad \text{El eje mayor es horizontal.}$$

o

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1. \qquad \text{El eje mayor es vertical.}$$

Los focos se encuentran en el eje mayor, a c unidades del centro, con $c^2 = a^2 - b^2$.

Si los extremos de una cuerda se atan a los alfileres y se tensa la cuerda con un lápiz, la trayectoria trazada con el lápiz será una elipse
Figura 10.9

La definición de una elipse se puede visualizar si se imaginan dos alfileres colocados en los focos, como se muestra en la figura 10.9.

EJEMPLO 3 Completar cuadrados

Encontrar el centro, los vértices y los focos de la elipse dada por

$$4x^2 + y^2 - 8x + 4y - 8 = 0.$$

Solución Al completar el cuadrado se puede expresar la ecuación original en la forma estándar o canónica.

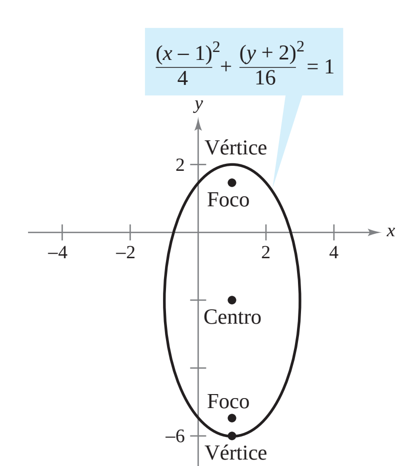
$$4x^2 + y^2 - 8x + 4y - 8 = 0 \quad \text{Escribir la ecuación original.}$$

$$4x^2 - 8x + y^2 + 4y = 8$$

$$4(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 8 + 4 + 4$$

$$4(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1 \quad \text{Escribir la forma estándar o canónica.}$$



Elipse con eje mayor vertical
Figura 10.10

Así, el eje mayor es paralelo al eje y, donde $h = 1$, $k = -2$, $a = 4$, $b = 2$ y $c = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$. Por tanto, se obtiene:

Centro: $(1, -2)$ (h, k).

Vértices: $(1, -6)$ y $(1, 2)$ $(h, k \pm a)$.

Focos: $\left(1, -2 - 2\sqrt{3}\right)$ y $\left(1, -2 + 2\sqrt{3}\right)$ $(h, k \pm c)$.

La gráfica de la elipse se muestra en la figura 10.10.

NOTA Si en la ecuación del ejemplo 3, el término constante $F = -8$ hubiese sido mayor o igual a 8, se hubiera obtenido alguno de los siguientes casos degenerados.

1. $F = 8$, un solo punto, $(1, -2)$: $\dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y+2)^2}{16} = 0$

2. $F > 8$, no existen puntos solución: $\dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y+2)^2}{16} < 0$

EJEMPLO 4 La órbita de la Luna

La Luna gira alrededor de la Tierra siguiendo una trayectoria elíptica en la que el centro de la Tierra está en uno de los focos, como se ilustra en la figura 10.11. Las longitudes de los ejes mayor y menor de la órbita son 768 800 kilómetros y 767 640 kilómetros, respectivamente. Encontrar las distancias mayor y menor (apogeo y perigeo) entre el centro de la Tierra y el centro de la Luna.

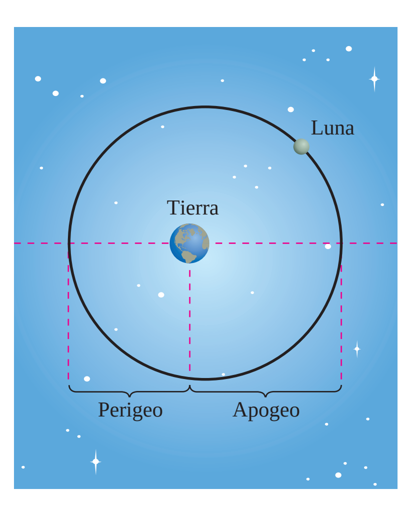


Figura 10.11

Solución Para comenzar se encuentran a y b.

$2a = 768\,800$ Longitud del eje mayor.

$a = 384\,400$ Despejar a.

$2b = 767\,640$ Longitud del eje menor.

$b = 383\,820$ Despejar b.

Ahora, al emplear estos valores, se despeja c como sigue.

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \approx 21\,108$$

La distancia mayor entre el centro de la Tierra y el centro de la Luna es $a + c \approx 405\,508$ kilómetros y la distancia menor es $a - c \approx 363\,292$ kilómetros.

PARA MAYOR INFORMACIÓN
Para más información acerca de algunos usos de las propiedades de reflexión de las cónicas, consultar el artículo "Parabolic Mirrors, Elliptic and Hyperbolic Lenses" de Mohsen Maesumi en *The American Mathematical Monthly*. Consultar también el artículo "The Geometry of Microwave Antennas" de William R. Paezynski en *Mathematics Teacher*.

En el teorema 10.2 se presentó la propiedad de reflexión de la parábola. La elipse tiene una propiedad semejante. En el ejercicio 112 se pide demostrar el siguiente teorema.

TEOREMA 10.4 PROPIEDAD DE REFLEXIÓN DE LA ELIPSE

Sea P un punto de una elipse. La recta tangente a la elipse en el punto P forma ángulos iguales con las rectas que pasan por P y por los focos.

Uno de los motivos por el cual los astrónomos tuvieron dificultad para descubrir que las órbitas de los planetas son elípticas es el hecho de que los focos de las órbitas planetarias están relativamente cerca del centro del Sol, lo que hace a las órbitas ser casi circulares. Para medir el achatamiento de una elipse, se puede usar el concepto de **excentricidad**.

DEFINICIÓN DE LA EXCENTRICIDAD DE UNA ELIPSE

La **excentricidad** e de una elipse está dada por el cociente

$$e = \frac{c}{a}.$$

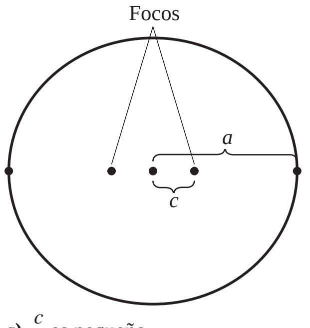
Para ver cómo se usa este cociente en la descripción de la forma de una elipse, obsérvese que como los focos de una elipse se localizan a lo largo del eje mayor entre los vértices y el centro, se tiene que

$$0 < c < a.$$

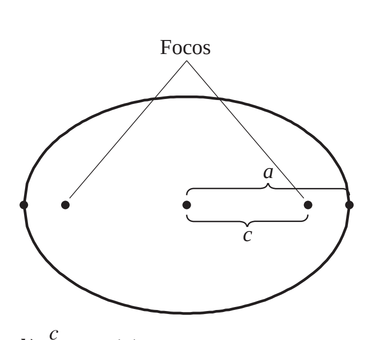
En una elipse casi circular, los focos se encuentran cerca del centro y el cociente c/a es pequeño, mientras que en una elipse alargada, los focos se encuentran cerca de los vértices y el cociente c/a está cerca de 1, como se ilustra en la figura 10.12. Obsérvese que para toda elipse $0 < e < 1$.

La excentricidad de la órbita de la Luna es $e = 0.0549$, y las excentricidades de las nueve órbitas planetarias son las siguientes.

Mercurio:	$e = 0.2056$	Júpiter:	$e = 0.0484$
Venus:	$e = 0.0068$	Saturno:	$e = 0.0542$
Tierra:	$e = 0.0167$	Urano:	$e = 0.0472$
Marte:	$e = 0.0934$	Neptuno:	$e = 0.0086$



a) $\frac{c}{a}$ es pequeño



b) $\frac{c}{a}$ es casi 1

Excentricidad es el cociente $\frac{c}{a}$.
Figura 10.12

Por integración se puede mostrar que el área de una elipse es $A = \pi ab$. Por ejemplo, el área de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

está dada por

$$A = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

$$= \frac{4b}{a}\int_0^{\pi/2} a^2 \cos^2 \theta \, d\theta.$$ Sustitución trigonométrica $x = a$ sen θ.

Sin embargo, encontrar el *perímetro* de una elipse no es fácil. El siguiente ejemplo muestra cómo usar la excentricidad para establecer una "integral elíptica" para el perímetro de una elipse.

EJEMPLO 5 Encontrar el perímetro de una elipse

Mostrar que el perímetro de una elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ es

$$4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\, d\theta. \qquad e = \frac{c}{a}$$

Solución Como la elipse dada es simétrica respecto al eje x y al eje y, se sabe que su perímetro C es el cuádruplo de la longitud de arco de $y = (b/a)\sqrt{a^2 - x^2}$ en el primer cuadrante. La función y es diferenciable (o derivable) para toda x en el intervalo $[0, a]$ excepto en $x = a$. Entonces, el perímetro está dado por la integral impropia

$$C = \lim_{d\to a} 4\int_0^d \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = 4\int_0^a \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = 4\int_0^a \sqrt{1 + \frac{b^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)}}\, dx.$$

Al usar la sustitución trigonométrica $x = a \operatorname{sen} \theta$, se obtiene

$$\begin{aligned} C &= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \frac{b^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{a^2 \cos^2 \theta}}\,(a \cos \theta)\, d\theta \\ &= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\, d\theta \\ &= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2 \theta) + b^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\, d\theta \\ &= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\operatorname{sen}^2 \theta}\, d\theta. \end{aligned}$$

Debido a que $e^2 = c^2/a^2 = (a^2 - b^2)/a^2$, se puede escribir esta integral como

$$C = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\, d\theta.$$

ÁREA Y PERÍMETRO DE UNA ELIPSE

En su trabajo con órbitas elípticas, a principios del siglo XVII, Johannes Kepler desarrolló una fórmula para encontrar el área de una elipse, $A = \pi ab$. Sin embargo, tuvo menos éxito en hallar una fórmula para el perímetro de una elipse, para el cual sólo dio la siguiente fórmula de aproximación $C = \pi(a + b)$.

Se ha dedicado mucho tiempo al estudio de las integrales elípticas. En general dichas integrales no tienen antiderivadas o primitivas elementales. Para encontrar el perímetro de una elipse, por lo general hay que recurrir a una técnica de aproximación.

EJEMPLO 6 Aproximar el valor de una integral elíptica

Emplear la integral elíptica del ejemplo 5 para aproximar el perímetro de la elipse

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

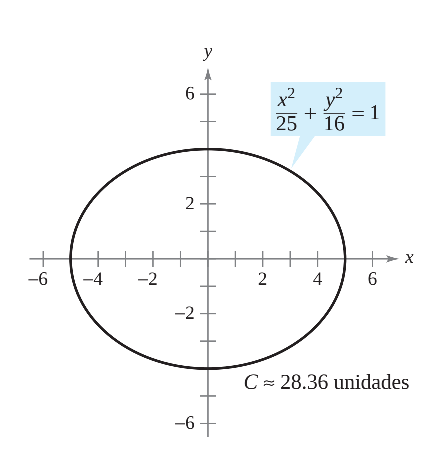


Figura 10.13

Solución Como $e^2 = c^2/a^2 = (a^2 - b^2)/a^2 = 9/25$, se tiene

$$C = (4)(5)\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{9 \operatorname{sen}^2 \theta}{25}}\, d\theta.$$

Aplicando la regla de Simpson con $n = 4$ se obtiene

$$\begin{aligned} C &\approx 20\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{1}{4}\right)[1 + 4(0.9733) + 2(0.9055) + 4(0.8323) + 0.8] \\ &\approx 28.36. \end{aligned}$$

Por tanto, el perímetro de la elipse es aproximadamente 28.36 unidades, como se muestra en la figura 10.13.

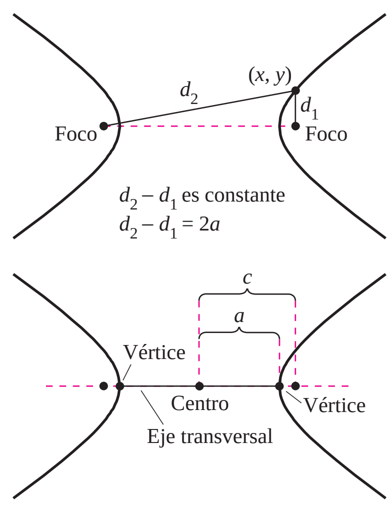


Figura 10.14

Hipérbolas

La definición de hipérbola es similar a la de la elipse. En la elipse, la *suma* de las distancias de un punto de la elipse a los focos es fija, mientras que en la hipérbola, el valor absoluto de la *diferencia* entre estas distancias es fijo.

Una **hipérbola** es el conjunto de todos los puntos (x, y) para los que el valor absoluto de la diferencia entre las distancias a dos puntos fijos llamados **focos** es constante. (Ver la figura 10.14.) La recta que pasa por los dos focos corta a la hipérbola en dos puntos llamados **vértices**. El segmento de recta que une a los vértices es el **eje transversal**, y el punto medio del eje transversal es el **centro** de la hipérbola. Un rasgo distintivo de la hipérbola es que su gráfica tiene dos *ramas* separadas.

TEOREMA 10.5 ECUACIÓN ESTÁNDAR O CANÓNICA DE UNA HIPÉRBOLA

La forma estándar o canónica de la ecuación de una hipérbola con centro (h, k) es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$ El eje transversal es horizontal.

o

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1.$$ El eje transversal es vertical.

Los vértices se encuentran a a unidades del centro y los focos se encuentran a c unidades del centro, con $c^2 = a^2 + b^2$.

NOTA En la hipérbola no existe la misma relación entre las constantes a, b y c, que en la elipse. En la hipérbola, $c^2 = a^2 + b^2$, mientras que en la elipse, $c^2 = a^2 - b^2$. ■

Una ayuda importante para trazar la gráfica de una hipérbola es determinar sus **asíntotas**, como se ilustra en la figura 10.15. Toda hipérbola tiene dos asíntotas que se cortan en el centro de la hipérbola. Las asíntotas pasan por los vértices de un rectángulo de dimensiones $2a$ por $2b$, con centro en (h, k). Al segmento de la recta de longitud $2b$ que une $(h, k + b)$ y $(h, k - b)$ se le conoce como **eje conjugado** de la hipérbola.

TEOREMA 10.6 ASÍNTOTAS DE UNA HIPÉRBOLA

Si el eje transversal es *horizontal*, las ecuaciones de las asíntotas son

$$y = k + \frac{b}{a}(x-h) \qquad \text{y} \qquad y = k - \frac{b}{a}(x-h).$$

Si el eje transversal es *vertical*, las ecuaciones de las asíntotas son

$$y = k + \frac{a}{b}(x-h) \qquad \text{y} \qquad y = k - \frac{a}{b}(x-h).$$

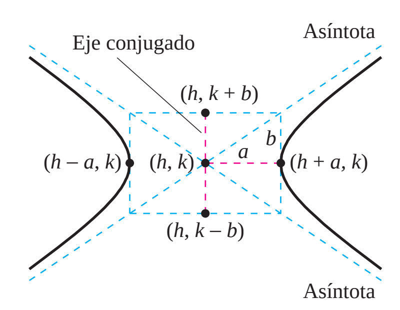
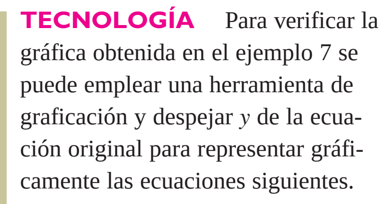


Figura 10.15

En la figura 10.15 se puede ver que las asíntotas coinciden con las diagonales del rectángulo de dimensiones $2a$ y $2b$, centrado en (h, k). Esto proporciona una manera rápida de trazar las asíntotas, las que a su vez ayudan a trazar la hipérbola.

EJEMPLO 7 Uso de las asíntotas para trazar una hipérbola

Trazar la gráfica de la hipérbola cuya ecuación es $4x^2 - y^2 = 16$.



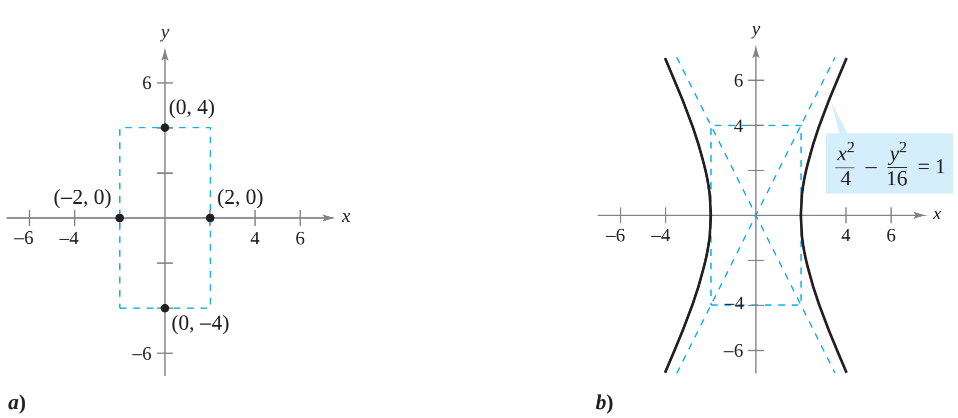
TECNOLOGÍA Para verificar la gráfica obtenida en el ejemplo 7 se puede emplear una herramienta de graficación y despejar y de la ecuación original para representar gráficamente las ecuaciones siguientes.

$$y_1 = \sqrt{4x^2 - 16}$$
$$y_2 = -\sqrt{4x^2 - 16}$$

Solución Para empezar se escribe la ecuación en la forma estándar o canónica.

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$$

El eje transversal es horizontal y los vértices se encuentran en $(-2, 0)$ y $(2, 0)$. Los extremos del eje conjugado se encuentran en $(0, -4)$ y $(0, 4)$. Con estos cuatro puntos, se puede trazar el rectángulo que se muestra en la figura 10.16*a*. Al dibujar las asíntotas a través de las esquinas de este rectángulo, el trazo se termina como se muestra en la figura 10.16*b*.



a) *b)*

Figura 10.16

DEFINICIÓN DE LA EXCENTRICIDAD DE UNA HIPÉRBOLA

La **excentricidad** e de una hipérbola es dada por el cociente

$$e = \frac{c}{a}.$$

Como en la elipse, la **excentricidad** de una hipérbola es $e = c/a$. Dado que en la hipérbola $c > a$ resulta que $e > 1$. Si la excentricidad es grande, las ramas de la hipérbola son casi planas. Si la excentricidad es cercana a 1, las ramas de la hipérbola son más puntiagudas, como se muestra en la figura 10.17.

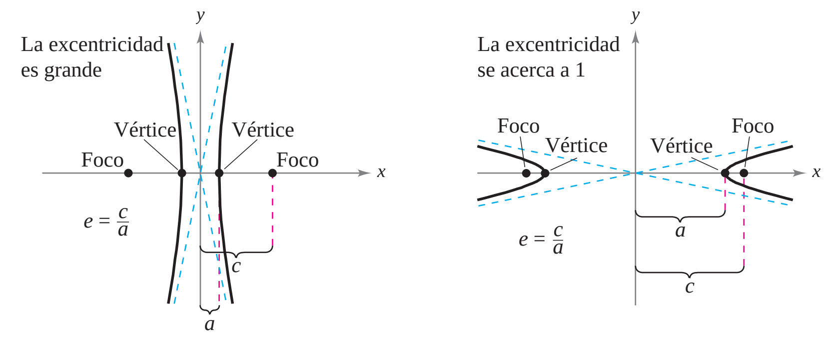
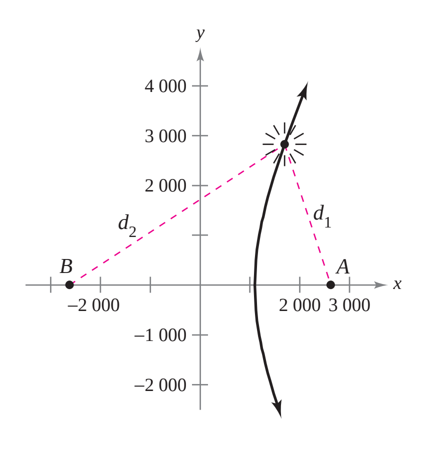


Figura 10.17

La aplicación siguiente fue desarrollada durante la Segunda Guerra Mundial. Muestra cómo los radares y otros sistemas de detección pueden usar las propiedades de la hipérbola.

EJEMPLO 8 Un sistema hiperbólico de detección

Dos micrófonos, a una milla de distancia entre sí, registran una explosión. El micrófono A recibe el sonido 2 segundos antes que el micrófono B. ¿Dónde fue la explosión?



$2c = 5\,280$
$d_2 - d_1 = 2a = 2\,200$
Figura 10.18

Solución Suponiendo que el sonido viaja a 1 100 pies por segundo, se sabe que la explosión tuvo lugar 2 200 pies más lejos de B que de A, como se observa en la figura 10.18. El lugar geométrico de todos los puntos que se encuentran 2 200 pies más cercanos a A que a B es una rama de la hipérbola $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$, donde

$$c = \frac{1 \text{ milla}}{2} = \frac{5\,280 \text{ pies}}{2} = 2\,640 \text{ pies.}$$

y

$$a = \frac{2\,200 \text{ pies}}{2} = 1100 \text{ pies}$$

Como $c^2 = a^2 + b^2$, se tiene que

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 - a^2 \\ &= 5\,759\,600 \end{aligned}$$

y se puede concluir que la explosión ocurrió en algún lugar sobre la rama derecha de la hipérbola dada por

$$\frac{x^2}{1\,210\,000} - \frac{y^2}{5\,759\,600} = 1.$$



Caroline Herschel (1750-1848)

La primera mujer a la que se atribuyó haber detectado un nuevo cometa fue la astrónoma inglesa Caroline Herschel. Durante su vida, Caroline Herschel descubrió ocho cometas.

En el ejemplo 8, sólo se pudo determinar la hipérbola en la que ocurrió la explosión, pero no la localización exacta de la explosión. Sin embargo, si se hubiera recibido el sonido también en una tercera posición C, entonces se habrían determinado otras dos hipérbolas. La localización exacta de la explosión sería el punto en el que se cortan estas tres hipérbolas.

Otra aplicación interesante de las cónicas está relacionada con las órbitas de los cometas en nuestro sistema solar. De los 610 cometas identificados antes de 1970, 245 tienen órbitas elípticas, 295 tienen órbitas parabólicas y 70 tienen órbitas hiperbólicas. El centro del Sol es un foco de cada órbita, y cada órbita tiene un vértice en el punto en el que el cometa se encuentra más cerca del Sol. Sin lugar a dudas, aún no se identifican muchos cometas con órbitas parabólicas e hiperbólicas, ya que dichos cometas pasan una sola vez por nuestro sistema solar. Sólo los cometas con órbitas elípticas como la del cometa Halley permanecen en nuestro sistema solar.

El tipo de órbita de un cometa puede determinarse de la forma siguiente.

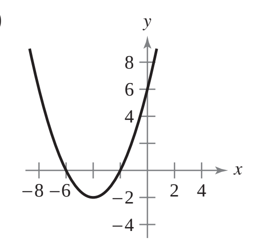
1. Elipse: $v < \sqrt{2GM/p}$
2. Parábola: $v = \sqrt{2GM/p}$
3. Hipérbola: $v > \sqrt{2GM/p}$

En estas tres fórmulas, p es la distancia entre un vértice y un foco de la órbita del cometa (en metros), v es la velocidad del cometa en el vértice (en metros por segundo), $M \approx 1.989 \times 10^{30}$ kilogramos es la masa del Sol y $G \approx 6.67 \times 10^{-8}$ metros cúbicos por kilogramo por segundo cuadrado es la constante de gravedad.

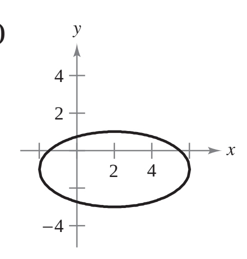
10.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 8, relacionar la ecuación con su gráfica. [Las gráficas están marcadas *a*), *b*), *c*), *d*), *e*), *f*), *g*) y *h*).]

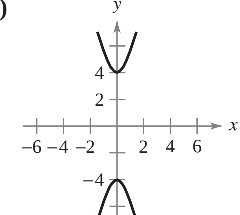
a)



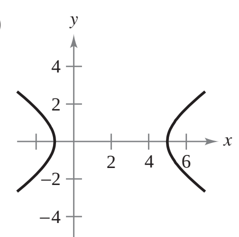
b)



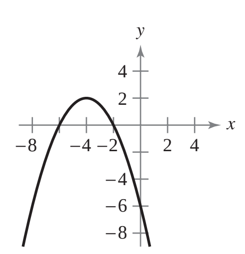
c)



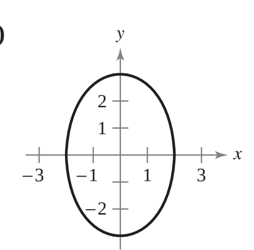
d)



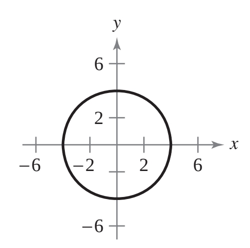
e)



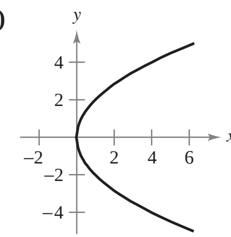
f)



g)



h)



1. $y^2 = 4x$

2. $(x + 4)^2 = 2(y + 2)$

3. $(x + 4)^2 = -2(y - 2)$

4. $\dfrac{(x - 2)^2}{16} + \dfrac{(y + 1)^2}{4} = 1$

5. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

6. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

7. $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{1} = 1$

8. $\dfrac{(x - 2)^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

En los ejercicios 9 a 16, hallar el vértice, el foco y la directriz de la parábola, y trazar su gráfica.

9. $y^2 = -8x$

10. $x^2 + 6y = 0$

11. $(x + 5) + (y - 3)^2 = 0$

12. $(x - 6)^2 + 8(y + 7) = 0$

13. $y^2 - 4y - 4x = 0$

14. $y^2 + 6y + 8x + 25 = 0$

15. $x^2 + 4x + 4y - 4 = 0$

16. $y^2 + 4y + 8x - 12 = 0$

En los ejercicios 17 a 20, hallar el vértice, el foco y la directriz de la parábola. Luego usar una herramienta de graficación para representar la parábola.

17. $y^2 + x + y = 0$

18. $y = -\frac{1}{6}(x^2 - 8x + 6)$

19. $y^2 - 4x - 4 = 0$

20. $x^2 - 2x + 8y + 9 = 0$

En los ejercicios 21 a 28, hallar una ecuación de la parábola.

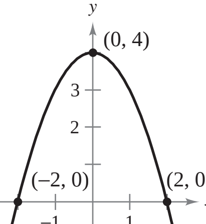
21. Vértice: $(5, 4)$
Foco: $(3, 4)$

22. Vértice: $(-2, 1)$
Foco: $(-2, -1)$

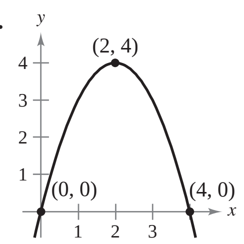
23. Vértice: $(0, 5)$
Directriz: $y = -3$

24. Foco: $(2, 2)$
Directriz: $x = -2$

25.



26.



27. El eje es paralelo al eje y; la gráfica pasa por $(0, 3)$, $(3, 4)$ y $(4, 11)$.

28. Directriz: $y = -2$; extremos del lado recto (*latus rectum*) son $(0, 2)$ y $(8, 2)$.

En los ejercicios 29 a 34, hallar el centro, el foco, el vértice y la excentricidad de la elipse y trazar su gráfica.

29. $16x^2 + y^2 = 16$

30. $3x^2 + 7y^2 = 63$

31. $\dfrac{(x - 3)^2}{16} + \dfrac{(y - 1)^2}{25} = 1$

32. $(x + 4)^2 + \dfrac{(y + 6)^2}{1/4} = 1$

33. $9x^2 + 4y^2 + 36x - 24y + 36 = 0$

34. $16x^2 + 25y^2 - 64x + 150y + 279 = 0$



En los ejercicios 35 a 38, hallar el centro, el foco y el vértice de la elipse. Con ayuda de una herramienta de graficación representar la elipse.

35. $12x^2 + 20y^2 - 12x + 40y - 37 = 0$

36. $36x^2 + 9y^2 + 48x - 36y + 43 = 0$

37. $x^2 + 2y^2 - 3x + 4y + 0.25 = 0$

38. $2x^2 + y^2 + 4.8x - 6.4y + 3.12 = 0$

En los ejercicios 39 a 44, hallar una ecuación de la elipse.

39. Centro: $(0, 0)$
Foco: $(5, 0)$
Vértice: $(6, 0)$

40. Vértices: $(0, 3)$, $(8, 3)$
Excentricidad: $\frac{3}{4}$

41. Vértices: $(3, 1)$, $(3, 9)$
Longitud del eje menor: 6

42. Foco: $(0, \pm 9)$
Longitud del eje mayor: 22

43. Centro: $(0, 0)$
Eje mayor: horizontal
Puntos en la elipse:
$(3, 1)$, $(4, 0)$

44. Centro: $(1, 2)$
Eje mayor: vertical
Puntos en la elipse:
$(1, 6)$, $(3, 2)$

En los ejercicios 45 a 52, hallar el centro, el foco y el vértice de la hipérbola, y trazar su gráfica usando las asíntotas como ayuda.

45. $y^2 - \frac{x^2}{9} = 1$

46. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$

47. $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{1} = 1$

48. $\frac{(y+3)^2}{225} - \frac{(x-5)^2}{64} = 1$

49. $9x^2 - y^2 - 36x - 6y + 18 = 0$

50. $y^2 - 16x^2 + 64x - 208 = 0$

51. $x^2 - 9y^2 + 2x - 54y - 80 = 0$

52. $9x^2 - 4y^2 + 54x + 8y + 78 = 0$

En los ejercicios 53 a 56, hallar el centro, el foco y el vértice de la hipérbola. Trazar la hipérbola y sus asíntotas con ayuda de una herramienta de graficación.

53. $9y^2 - x^2 + 2x + 54y + 62 = 0$

54. $9x^2 - y^2 + 54x + 10y + 55 = 0$

55. $3x^2 - 2y^2 - 6x - 12y - 27 = 0$

56. $3y^2 - x^2 + 6x - 12y = 0$

En los ejercicios 57 a 64, hallar una ecuación de la hipérbola.

57. Vértice: $(\pm 1, 0)$
Asíntota: $y = \pm 5x$

58. Vértice: $(0, \pm 4)$
Asíntota: $y = \pm 2x$

59. Vértice: $(2, \pm 3)$
Punto de una gráfica: $(0, 5)$

60. Vértice: $(2, \pm 3)$
Foco: $(2, \pm 5)$

61. Centro: $(0, 0)$
Vértice: $(0, 2)$
Foco: $(0, 4)$

62. Centro: $(0, 0)$
Vértice: $(6, 0)$
Foco: $(10, 0)$

63. Vértices: $(0, 2), (6, 2)$
Asíntota: $y = \frac{2}{3}x$
$y = 4 - \frac{2}{3}x$

64. Foco: $(20, 0)$
Asíntota: $y = \pm\frac{3}{4}x$

En los ejercicios 65 y 66, hallar ecuaciones de *a*) las rectas tangentes y *b*) las rectas normales a la hipérbola para el valor dado de *x*.

65. $\frac{x^2}{9} - y^2 = 1, \quad x = 6$

66. $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{2} = 1, \quad x = 4$

En los ejercicios 67 a 76, clasificar la gráfica de la ecuación como circunferencia, parábola, elipse o hipérbola.

67. $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$

68. $4x^2 - y^2 - 4x - 3 = 0$

69. $y^2 - 8y - 8x = 0$

70. $25x^2 - 10x - 200y - 119 = 0$

71. $4x^2 + 4y^2 - 16y + 15 = 0$

72. $y^2 - 4y = x + 5$

73. $9x^2 + 9y^2 - 36x + 6y + 34 = 0$

74. $2x(x - y) = y(3 - y - 2x)$

75. $3(x - 1)^2 = 6 + 2(y + 1)^2$

76. $9(x + 3)^2 = 36 - 4(y - 2)^2$

Desarrollo de conceptos

77. *a*) Dar la definición de parábola.
b) Dar las formas estándar o canónicas de una parábola con vértice en (h, k).
c) Expresar, con sus propias palabras, la propiedad de reflexión de una parábola.

78. *a*) Dar la definición de elipse.
b) Dar las formas estándar o canónicas de una elipse con centro en (h, k).

79. *a*) Dar la definición de hipérbola.
b) Dar las formas estándar o canónicas de una hipérbola con centro en (h, k).
c) Dar las ecuaciones de las asíntotas de una hipérbola.

80. Definir la excentricidad de una elipse. Describir, con sus propias palabras, cómo afectan a la elipse las variaciones en la excentricidad.

81. ***Recolector o panel de energía solar*** Un recolector o panel de energía solar para calentar agua se construye con una hoja de acero inoxidable en forma de parábola (ver la figura). El agua fluye a través de un tubo situado en el foco de la parábola. ¿A qué distancia del vértice se encuentra el tubo?

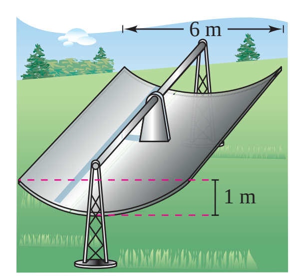


Figura para 81

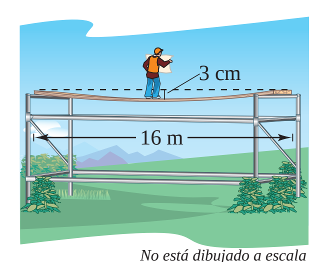


Figura para 82

82. ***Deformación de una viga*** Una viga de 16 metros de longitud soporta una carga que se concentra en el centro (ver la figura). La viga se deforma en la parte central 3 centímetros. Suponer que, al deformarse, la viga adquiere la forma de una parábola.

a) Encontrar una ecuación de la parábola. (Suponer que el origen está en el centro de la parábola.)

b) ¿A qué distancia del centro de la viga es de 1 centímetro la deformación producida?

83. Hallar una ecuación de la recta tangente a la parábola $y = ax^2$ en $x = x_0$. Demostrar que la intersección de esta recta tangente con el eje x es $(x_0/2, 0)$.

84. *a*) Demostrar que dos rectas tangentes distintas cualesquiera a una parábola se cortan o intersecan.
b) Ilustrar el resultado del inciso *a*) hallando el punto de intersección de las rectas tangentes a la parábola $x^2 - 4x - 4y = 0$ en los puntos $(0, 0)$ y $(6, 3)$.

85. *a*) Demostrar que si dos rectas tangentes a una parábola se cortan o intersecan en ángulos rectos, su punto de intersección debe estar en la directriz.
b) Ilustrar el resultado del inciso *a*) probando que las rectas tangentes a la parábola $x^2 - 4x - 4y + 8 = 0$ en los puntos $(-2, 5)$ y $\left(3, \frac{5}{4}\right)$ se cortan en ángulo recto y que el punto de intersección se encuentra en la directriz.

86. Sobre la gráfica de $x^2 = 8y$ hallar el punto más cercano al foco de la parábola.

87. ***Recepción de radio y televisión*** En las áreas montañosas, la recepción de radio y televisión suele ser deficiente. Considerar un caso idealizado en el que la gráfica de la parábola $y = x - x^2$ representa una colina, en el punto $(-1, 1)$ se localiza un transmisor, y al otro lado de la colina, en el punto $(x_0, 0)$, se encuentra un receptor. ¿Qué tan cerca de la colina puede ubicarse el receptor para que la señal no se obstruya?

88. ***Modelo matemático*** La tabla siguiente muestra las cantidades promedio A de tiempo (en minutos) por día que las mujeres dedicaron a ver la televisión de 1999 a 2005. (*Fuente: Nielsen Media Research*)

Añ	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
A	280	286	291	298	305	307	317

a) Emplear las funciones de regresión de una herramienta de graficación para hallar un modelo de la forma $A = at^2 + bt + c$ para los datos, donde t represente el año y $t = 9$ corresponda a 1999.

b) Emplear una herramienta de graficación para representar los datos y la gráfica del modelo.

c) Hallar dA/dt y dibujar su gráfica para $9 \leq t \leq 15$. ¿Qué información acerca de la cantidad promedio de tiempo que las mujeres dedicaron a ver televisión proporciona la gráfica de la derivada?

89. ***Arquitectura*** El ventanal de una iglesia está limitado en la parte superior por una parábola, y en la parte inferior por el arco de una circunferencia (ver la figura). Hallar el área de la superficie del ventanal.

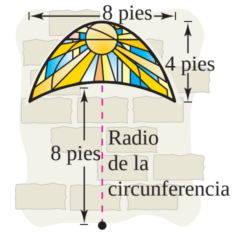


Figura para 89

Figura para 91

90. ***Longitud de arco*** Hallar la longitud de arco de la parábola $4x - y^2 = 0$ en el intervalo $0 \leq y \leq 4$.

91. ***Diseño de un puente*** El cable de un puente colgante está suspendido (formando una parábola) de dos torres a 120 metros una de la otra y a 20 metros de altura sobre la autopista. Los cables tocan la autopista en el punto medio entre ambas torres.

a) Hallar la ecuación para la forma parabólica de cada cable.

b) Hallar la longitud del cable parabólico de suspensión.

92. ***Área de una superficie*** Un receptor de una antena satelital se forma por revolución alrededor del eje y de la parábola $x^2 = 20y$. El radio del plato es r pies. Verificar que el área de la superficie del plato está dada por

$$2\pi\int_0^r x\sqrt{1 + \left(\frac{x}{10}\right)^2}\,dx = \frac{\pi}{15}[(100 + r^2)^{3/2} - 1\,000].$$

93. ***Investigación*** En el mismo eje de coordenadas trazar las gráficas de $x^2 = 4py$ con $p = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ y 2. Analizar la variación que se presenta en las gráficas a medida que p aumenta.

94. ***Área*** Hallar una fórmula para el área de la región sombreada de la figura.

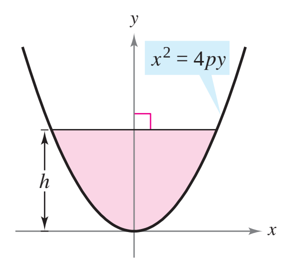


Figura para 94

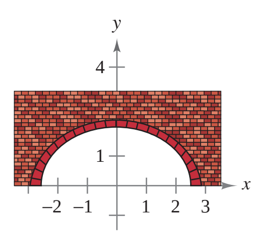


Figura para 96

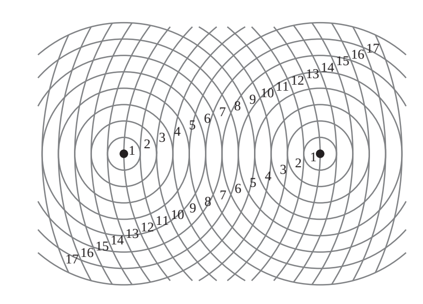
95. ***Redacción*** En la página 699 se señaló que se puede trazar una elipse usando dos alfileres, una cuerda de longitud fija (mayor a la distancia entre los dos alfileres) y un lápiz. Si los extremos de la cuerda se sujetan a los alfileres y se tensa la cuerda con el lápiz, la trayectoria que recorre el lápiz es una elipse.

a) ¿Cuál es la longitud de la cuerda en términos de a?

b) Explicar por qué la trayectoria trazada por el lápiz es una elipse.

96. ***Construcción de un arco semielíptico*** Se va a construir el arco de una chimenea en forma de una semielipse. El claro debe tener 2 pies de altura en el centro y 5 pies de ancho en la base (ver la figura). El constructor bosqueja el perfil de la elipse siguiendo el método mostrado en el ejercicio 95. ¿Dónde deben colocarse los alfileres y cuál debe ser la longitud del trozo de cuerda?

97. Trazar la elipse que consta de todos los puntos (x, y) tales que la suma de las distancias entre (x, y) y dos puntos fijos es 16 unidades, y los focos se localizan en los centros de los dos conjuntos de circunferencias concéntricas que se muestran en la figura.



98. ***Órbita de la Tierra*** La Tierra se mueve en una órbita elíptica con el Sol en uno de los focos. La longitud de la mitad del eje mayor es 149 598 000 kilómetros y la excentricidad es 0.0167. Hallar la distancia mínima (*perihelio*) y la distancia máxima (*afelio*) entre la Tierra y el Sol.

99. ***Órbita de un satélite*** El *apogeo* (el punto de la órbita más lejano a la Tierra) y el *perigeo* (el punto de la órbita más cercano a la Tierra) de la órbita elíptica de un satélite de la Tierra están dados por A y P. Mostrar que la excentricidad de la órbita es

$$e = \frac{A - P}{A + P}.$$

100. ***Explorer 18*** El 27 de noviembre de 1963, Estados Unidos lanzó el Explorer 18. Sus puntos bajo y alto sobre la superficie de la Tierra fueron 119 millas y 123 000 millas, respectivamente. Hallar la excentricidad de su órbita elíptica.

101. ***Explorer 55*** El 20 de noviembre de 1975, Estados Unidos lanzó el satélite de investigación Explorer 55. Sus puntos bajo y alto sobre la superficie de la Tierra fueron de 96 millas y 1 865 millas. Encontrar la excentricidad de su órbita elíptica.

Para discusión

102. Considerar la ecuación

$$9x^2 + 4y^2 - 36x - 24y - 36 = 0.$$

a) Clasificar la gráfica de la ecuación como un círculo, una parábola, una elipse o una hipérbola.

b) Cambiar el término $4y^2$ en la ecuación por $-4y^2$. Clasificar la gráfica de la nueva ecuación.

c) Cambiar el término $9x^2$ en la ecuación original por $4x^2$. Clasificar la gráfica de la nueva ecuación.

d) Describir una manera en que se podría cambiar la ecuación original para que su gráfica fuera una parábola.

103. ***El cometa Halley*** Quizás el más conocido de todos los cometas, el cometa Halley, tiene una órbita elíptica con el Sol en uno de sus focos. Se estima que su distancia máxima al Sol es de 35.29 UA (unidad astronómica $\approx 92.956 \times 10^6$ millas) y que su distancia mínima es de 0.59 UA. Hallar la excentricidad de la órbita.

104. La ecuación de una elipse con centro en el origen puede expresarse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1.$$

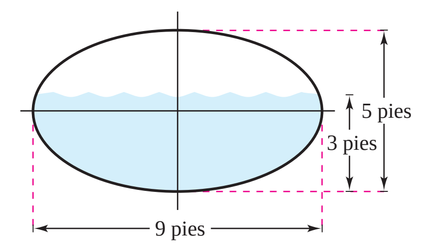
Mostrar que cuando $e \to 0$, y a permanece constante, la elipse se aproxima a una circunferencia.

105. Considerar una partícula que se mueve en el sentido de las manecillas del reloj siguiendo la trayectoria elíptica

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

La partícula abandona la órbita en el punto $(-8, 3)$ y viaja a lo largo de una recta tangente a la elipse. ¿En qué punto cruzará la partícula el eje y?

106. ***Volumen*** El tanque de agua de un carro de bomberos mide 16 pies de largo, y sus secciones transversales son elipses. Hallar el volumen de agua que hay en el tanque cuando está parcialmente lleno como se muestra en la figura.



En los ejercicios 107 y 108, determinar los puntos en los que *dy/dx* es cero, o no existe, para localizar los extremos de los ejes mayor y menor de la elipse.

107. $16x^2 + 9y^2 + 96x + 36y + 36 = 0$

108. $9x^2 + 4y^2 + 36x - 24y + 36 = 0$

Área y volumen **En los ejercicios 109 y 110, hallar *a*) el área de la región limitada por la elipse, *b*) el volumen y el área de la superficie del sólido generado por revolución de la región alrededor de su eje mayor (esferoide prolato), y *c*) el volumen y el área de la superficie del sólido generado por revolución de la región alrededor de su eje menor (esferoide oblato).**

109. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$

110. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$



111. ***Longitud de arco*** Usar las funciones de integración de una herramienta de graficación para aproximar, con una precisión de dos cifras decimales, la integral elíptica que representa el perímetro de la elipse

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} = 1.$$

112. Probar el teorema 10.4 mostrando que la recta tangente a una elipse en un punto P forma ángulos iguales con las rectas a través de P y de los focos (ver la figura). [*Sugerencia:* 1) encontrar la pendiente de la recta tangente en P, 2) encontrar las tangentes de las rectas a través de P y cada uno de los focos y 3) usar la fórmula de la tangente del ángulo entre dos rectas.]

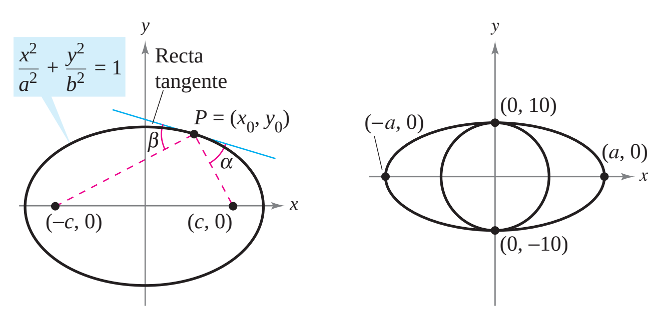


Figura para 112 **Figura para 113**

113. ***Geometría*** El área de la elipse presentada en la figura es el doble del área del círculo. ¿Qué longitud tiene el eje mayor?



114. ***Conjetura***

a) Mostrar que la ecuación de una elipse puede expresarse como

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2(1 - e^2)} = 1.$$

b) Mediante una herramienta de graficación, representar la elipse

$$\frac{(x - 2)^2}{4} + \frac{(y - 3)^2}{4(1 - e^2)} = 1$$

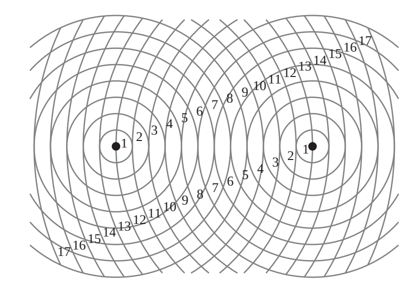
para $e = 0.95$, $e = 0.75$, $e = 0.5$, $e = 0.25$ y $e = 0$.

c) Usar los resultados del inciso *b*) para hacer una conjetura acerca de la variación en la forma de la elipse a medida que e se aproxima a 0.

115. Hallar una ecuación de la hipérbola tal que, para todo punto, la diferencia entre sus distancias a los puntos (2, 2) y (10, 2) sea 6.

116. Hallar una ecuación de la hipérbola tal que, para todo punto, la diferencia entre sus distancias a los puntos $(-3, 0)$ y $(-3, 3)$ sea 2.

117. Dibujar la hipérbola que consta de todos los puntos (x, y) tales que la diferencia de las distancias entre (x, y) y dos puntos fijos sea 10 unidades, y los focos se localicen en los centros de los dos conjuntos de circunferencias concéntricas de la figura.



118. Considerar una hipérbola centrada en el origen y con eje transversal horizontal. Emplear la definición de hipérbola para obtener su forma canónica o estándar:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

119. ***Localización del sonido*** Con un rifle posicionado en el punto $(-c, 0)$ se dispara al blanco que se encuentra en el punto $(c, 0)$. Una persona escucha al mismo tiempo el disparo del rifle y el impacto de la bala en el blanco. Demostrar que la persona se encuentra en una de las ramas de la hipérbola dada por

$$\frac{x^2}{c^2 v_s^2/v_m^2} - \frac{y^2}{c^2(v_m^2 - v_s^2)/v_m^2} = 1$$

donde v_m es la velocidad inicial de la bala y v_s es la velocidad del sonido, la cual es aproximadamente 1 100 pies por segundo.

120. ***Navegación*** El sistema LORAN (*long distance radio navigation*) para aviones y barcos usa pulsos sincronizados emitidos por estaciones de transmisión muy alejadas una de la otra. Estos pulsos viajan a la velocidad de la luz (186 000 millas por segundo). La diferencia en los tiempos de llegada de estos pulsos a un avión o a un barco es constante en una hipérbola que tiene como focos las estaciones transmisoras. Suponer que las dos estaciones, separadas a 300 millas una de la otra, están situadas en el sistema de coordenadas rectangulares en $(-150, 0)$ y $(150, 0)$ y que un barco sigue la trayectoria que describen las coordenadas $(x, 75)$. (Ver la figura.) Hallar la coordenada x de la posición del barco si la diferencia de tiempo entre los pulsos de las estaciones transmisoras es 1 000 microsegundos (0.001 segundo).

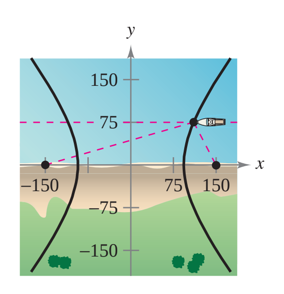


Figura para 120

Figura para 121

121. ***Espejo hiperbólico*** Un espejo hiperbólico (como los que usan algunos telescopios) tiene la propiedad de que un rayo de luz dirigido a uno de los focos se refleja al otro foco. El espejo que muestra la figura se describe mediante la ecuación $(x^2/36) - (y^2/64) = 1$. ¿En qué punto del espejo se reflejará la luz procedente del punto $(0, 10)$ al otro foco?

122. Mostrar que la ecuación de la recta tangente a $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ en el punto (x_0, y_0) es $(x_0/a^2)x - (y_0/b^2)y = 1$.

123. Mostrar que las gráficas de las ecuaciones se cortan en ángulos rectos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{2y^2}{b^2} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{2y^2}{b^2} = 1.$$

124. Demostrar que la gráfica de la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

es una de las siguientes cónicas (excepto en los casos degenerados).

	Cónica	*Condición*
a)	Círculo	$A = C$
b)	Parábola	$A = 0$ o $C = 0$ (pero no ambas)
c)	Elipse	$AC > 0$
d)	Hipérbola	$AC < 0$

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 125 a 130, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.**

125. Es posible que una parábola corte a su directriz.

126. En una parábola, el punto más cercano al foco es el vértice.

127. Si C es el perímetro de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b < a$$

entonces $2\pi b \le C \le 2\pi a$.

128. Si $D \neq 0$ o $E \neq 0$, entonces la gráfica de $y^2 - x^2 + Dx + Ey = 0$ es una hipérbola.

129. Si las asíntotas de la hipérbola $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ se cortan o intersecan en ángulos rectos, entonces $a = b$.

130. Toda recta tangente a una hipérbola sólo corta o interseca a la hipérbola en el punto de tangencia.

Preparación del examen Putnam

131. Dado un punto P de una elipse, sea d la distancia del centro de la elipse a la recta tangente a la elipse en P. Demostrar que $(PF_1)(PF_2)d^2$ es constante mientras P varía en la elipse, donde PF_1 y PF_2 son las distancias de P a los focos F_1 y F_2 de la elipse.

132. Hallar el valor mínimo de $(u - v)^2 + \left(\sqrt{2 - u^2} - \dfrac{9}{v}\right)^2$ con $0 < u < \sqrt{2}$ y $v > 0$.

10.2 Curvas planas y ecuaciones paramétricas

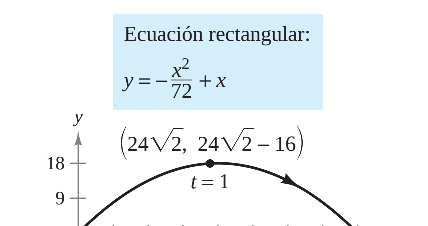
- **Trazar la gráfica de una curva dada por un conjunto de ecuaciones paramétricas.**
- **Eliminar el parámetro en un conjunto de ecuaciones paramétricas.**
- **Hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas para representar una curva.**
- **Entender dos problemas clásicos del cálculo: el problema de la tautocrona y el problema de la braquistocrona.**

Curvas planas y ecuaciones paramétricas

Hasta ahora, se ha representado una gráfica mediante una sola ecuación con *dos* variables. En esta sección se estudiarán situaciones en las que se emplean *tres* variables para representar una curva en el plano.

Considérese la trayectoria que recorre un objeto lanzado al aire con un ángulo de 45°. Si la velocidad inicial del objeto es 48 pies por segundo, el objeto recorre la trayectoria parabólica dada por

$$y = -\frac{x^2}{72} + x \qquad \text{Ecuación rectangular.}$$



Movimiento curvilíneo: dos variables de posición y una de tiempo
Figura 10.19

como se muestra en la figura 10.19. Sin embargo, esta ecuación no proporciona toda la información. Si bien dice dónde *se encuentra* el objeto, no dice *cuándo se encuentra* en un punto dado (x, y). Para determinar este instante, se introduce una tercera variable t, conocida como **parámetro**. Expresando x y y como funciones de t, se obtienen las **ecuaciones paramétricas**

$$x = 24\sqrt{2}\,t \qquad \text{Ecuación paramétrica para } x.$$

y

$$y = -16t^2 + 24\sqrt{2}\,t. \qquad \text{Ecuación paramétrica para } y.$$

A partir de este conjunto de ecuaciones, se puede determinar que en el instante $t = 0$, el objeto se encuentra en el punto (0, 0). De manera semejante, en el instante $t = 1$, el objeto está en el punto $\left(24\sqrt{2}, 24\sqrt{2} - 16\right)$, y así sucesivamente. (Más adelante, en la sección 12.3, se estudiará un método para determinar este conjunto particular de ecuaciones paramétricas, las ecuaciones de movimiento.)

En este problema particular de movimiento, x y y son funciones continuas de t, y a la trayectoria resultante se le conoce como **curva plana**.

DEFINICIÓN DE UNA CURVA PLANA

Si f y g son funciones continuas de t en un intervalo I, entonces a las ecuaciones

$$x = f(t) \quad \text{y} \quad y = g(t)$$

se les llama **ecuaciones paramétricas** y a t se le llama el **parámetro**. Al conjunto de puntos (x, y) que se obtiene cuando t varía sobre el intervalo I se le llama la **gráfica** de las ecuaciones paramétricas. A las ecuaciones paramétricas y a la gráfica, juntas, es a lo que se llama una **curva plana**, que se denota por C.

NOTA Algunas veces es importante distinguir entre una gráfica (conjunto de puntos) y una curva (los puntos junto con las ecuaciones paramétricas que los definen). Cuando sea importante hacer esta distinción, se hará de manera explícita. Cuando no sea importante se empleará C para representar la gráfica o la curva, indistintamente. ■

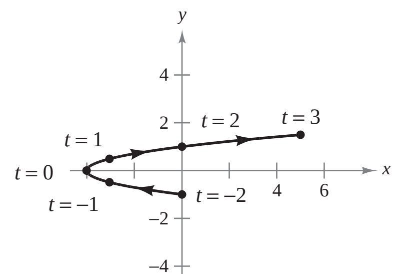
Cuando se dibuja (a mano) una curva dada por un conjunto de ecuaciones paramétricas, se trazan puntos en el plano xy. Cada conjunto de coordenadas (x, y) está determinado por un valor elegido para el parámetro t. Al trazar los puntos resultantes de valores crecientes de t, la curva se va trazando en una dirección específica. A esto se le llama la **orientación** de la curva.

EJEMPLO 1 Trazado de una curva

Trazar la curva dada por las ecuaciones paramétricas

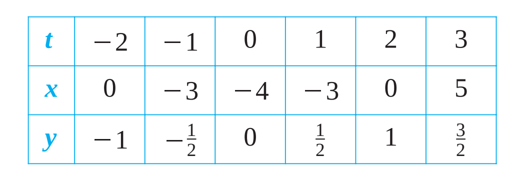
$$x = t^2 - 4 \quad \text{y} \quad y = \frac{t}{2}, \quad -2 \leq t \leq 3.$$

Solución Para valores de t en el intervalo dado, se obtienen, a partir de las ecuaciones paramétricas, los puntos (x, y) que se muestran en la tabla.



Ecuaciones paramétricas:
$x = t^2 - 4$ y $y = \frac{t}{2}$, $-2 \leq t \leq 3$

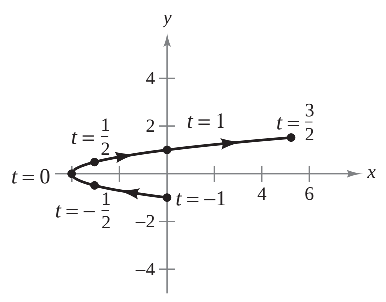
Figura 10.20



t	-2	-1	0	1	2	3
x	0	-3	-4	-3	0	5
y	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$

Al trazar estos puntos en orden de valores crecientes de t y usando la continuidad de f y de g se obtiene la curva C que se muestra en la figura 10.20. Hay que observar las flechas sobre la curva que indican su orientación conforme t aumenta de -2 a 3.

NOTA De acuerdo con el criterio de la recta vertical, puede verse que la gráfica mostrada en la figura 10.20 no define y en función de x. Esto pone de manifiesto una ventaja de las ecuaciones paramétricas: pueden emplearse para representar gráficas más generales que las gráficas de funciones. ■



Ecuaciones paramétricas:
$x = 4t^2 - 4$ y $y = t$, $-1 \leq t \leq \frac{3}{2}$

Figura 10.21

A menudo ocurre que dos conjuntos distintos de ecuaciones paramétricas tienen la misma gráfica. Por ejemplo, el conjunto de ecuaciones paramétricas

$$x = 4t^2 - 4 \quad \text{y} \quad y = t, \quad -1 \leq t \leq \frac{3}{2}$$

tiene la misma gráfica que el conjunto dado en el ejemplo 1 (ver la figura 10.21). Sin embargo, al comparar los valores de t en las figuras 10.20 y 10.21, se ve que la segunda gráfica se traza con mayor *rapidez* (considerando t como tiempo) que la primera gráfica. Por tanto, en las aplicaciones, pueden emplearse distintas ecuaciones paramétricas para representar las diversas *velocidades* a las que los objetos recorren una trayectoria determinada.

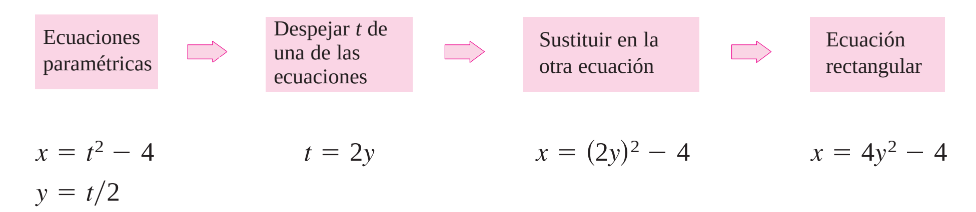
TECNOLOGÍA La mayoría de las herramientas de graficación cuenta con un modo *paramétrico* de graficación. Se puede emplear uno de estos dispositivos para confirmar las gráficas mostradas en las figuras 10.20 y 10.21. ¿Representa la curva dada por

$$x = 4t^2 - 8t \quad \text{y} \quad y = 1 - t, \quad -\tfrac{1}{2} \leq t \leq 2$$

la misma gráfica que la mostrada en las figuras 10.20 y 10.21? ¿Qué se observa respecto a la *orientación* de esta curva?

Eliminación del parámetro

A encontrar la ecuación rectangular que representa la gráfica de un conjunto de ecuaciones paramétricas se le llama **eliminación del parámetro**. Por ejemplo, el parámetro del conjunto de ecuaciones paramétricas del ejemplo 1 se puede eliminar como sigue.



$x = t^2 - 4$ $\qquad$ $t = 2y$ $\qquad$ $x = (2y)^2 - 4$ $\qquad$ $x = 4y^2 - 4$

$y = t/2$

Una vez eliminado el parámetro, se ve que la ecuación $x = 4y^2 - 4$ representa una parábola con un eje horizontal y vértice en $(-4, 0)$, como se ilustra en la figura 10.20.

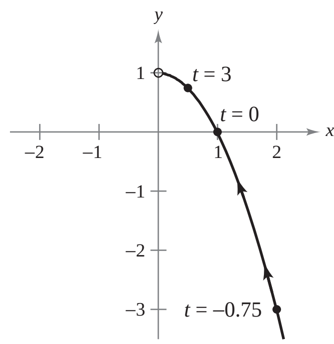
El rango de x y y implicado por las ecuaciones paramétricas puede alterarse al pasar a la forma rectangular. En esos casos, el dominio de la ecuación rectangular debe ajustarse de manera que su gráfica coincida con la gráfica de las ecuaciones paramétricas. En el ejemplo siguiente se muestra esta situación.

EJEMPLO 2 Ajustar el dominio después de la eliminación del parámetro

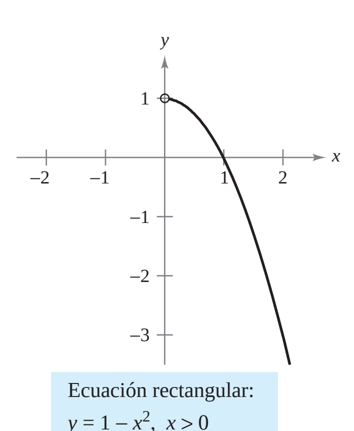
Dibujar la curva representada por las ecuaciones

$$x = \frac{1}{\sqrt{t+1}} \quad \text{y} \quad y = \frac{t}{t+1}, \quad t > -1$$

eliminando el parámetro y ajustando el dominio de la ecuación rectangular resultante.



Ecuaciones paramétricas:
$x = \frac{1}{\sqrt{t+1}},\ y = \frac{t}{t+1},\ t > -1$



Ecuación rectangular:
$y = 1 - x^2,\ x > 0$

Figura 10.22

Solución Para empezar se despeja t de una de las ecuaciones paramétricas. Por ejemplo, se puede despejar t de la primera ecuación.

$$x = \frac{1}{\sqrt{t+1}} \qquad \text{Ecuación paramétrica para } x.$$

$$x^2 = \frac{1}{t+1} \qquad \text{Elevar al cuadrado cada lado.}$$

$$t + 1 = \frac{1}{x^2}$$

$$t = \frac{1}{x^2} - 1 = \frac{1 - x^2}{x^2} \qquad \text{Despejar } t.$$

Sustituyendo ahora, en la ecuación paramétrica para y, se obtiene

$$y = \frac{t}{t+1} \qquad \text{Ecuación paramétrica para } y.$$

$$y = \frac{(1 - x^2)/x^2}{[(1 - x^2)/x^2] + 1} \qquad \text{Sustitución de } t \text{ por } (1 - x^2)/x^2.$$

$$y = 1 - x^2. \qquad \text{Simplificar.}$$

La ecuación rectangular, $y = 1 - x^2$, está definida para todos los valores de x. Sin embargo, en la ecuación paramétrica para x se ve que la curva sólo está definida para $t > -1$. Esto implica que el dominio de x debe restringirse a valores positivos, como se ilustra en la figura 10.22.

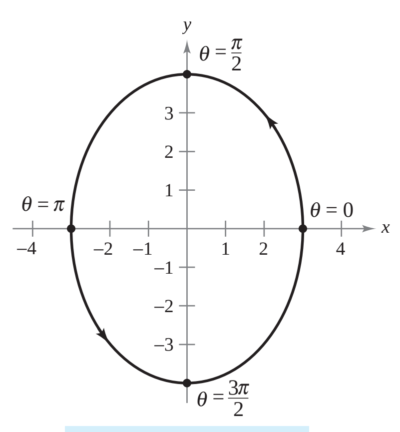
En un conjunto de ecuaciones paramétricas, el parámetro no necesariamente representa el tiempo. El siguiente ejemplo emplea un *ángulo* como parámetro.

EJEMPLO 3 Emplear trigonometría para eliminar un parámetro

Dibujar la curva representada por

$$x = 3\cos\theta \quad \text{y} \quad y = 4\,\text{sen}\,\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

al eliminar el parámetro y hallar la ecuación rectangular correspondiente.



Ecuaciones paramétricas:
$x = 3\cos\theta,\; y = 4\,\text{sen}\,\theta$
Ecuación rectangular:
$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

Figura 10.23

Solución Para empezar se despejan $\cos\theta$ y $\text{sen}\,\theta$ de las ecuaciones dadas.

$$\cos\theta = \frac{x}{3} \quad \text{y} \quad \text{sen}\,\theta = \frac{y}{4}$$ Despejar $\cos\theta$ y $\text{sen}\,\theta$.

A continuación, se hace uso de la identidad $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ para formar una ecuación en la que sólo aparezcan x y y.

$$\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$$ Identidad trigonométrica.

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1$$ Sustituir.

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$ Ecuación rectangular.

En esta ecuación rectangular, puede verse que la gráfica es una elipse centrada en $(0, 0)$, con vértices en $(0, 4)$ y $(0, -4)$ y eje menor de longitud $2b = 6$, como se muestra en la figura 10.23. Obsérvese que la elipse está trazada *en sentido contrario al de las manecillas del reloj* ya que θ va de 0 a 2π.

El empleo de la técnica presentada en el ejemplo 3 permite concluir que la gráfica de las ecuaciones paramétricas

$$x = h + a\cos\theta \quad \text{y} \quad y = k + b\,\text{sen}\,\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

es una elipse (trazada en sentido contrario al de las manecillas del reloj) dada por

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

La gráfica de las ecuaciones paramétricas

$$x = h + a\,\text{sen}\,\theta \quad \text{y} \quad y = k + b\cos\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

también es una elipse (trazada en sentido de las manecillas del reloj) dada por

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Emplear una herramienta de graficación en modo *paramétrico* para elaborar las gráficas de varias elipses.

En los ejemplos 2 y 3 es importante notar que la eliminación del parámetro es principalmente una *ayuda para trazar la curva*. Si las ecuaciones paramétricas representan la trayectoria de un objeto en movimiento, la gráfica sola no es suficiente para describir el movimiento del objeto. Se necesitan las ecuaciones paramétricas que informan sobre la *posición*, *dirección* y *velocidad*, en un instante determinado.

Hallar ecuaciones paramétricas

Los primeros tres ejemplos de esta sección ilustran técnicas para dibujar la gráfica que representa un conjunto de ecuaciones paramétricas. Ahora se investigará el problema inverso. ¿Cómo determinar un conjunto de ecuaciones paramétricas para una gráfica o una descripción física dada? Por el ejemplo 1 ya se sabe que tal representación no es única. Esto se demuestra más ampliamente en el ejemplo siguiente, en el que se encuentran dos representaciones paramétricas diferentes para una gráfica dada.

EJEMPLO 4 Hallar las ecuaciones paramétricas para una gráfica dada

Hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas para representar la gráfica de $y = 1 - x^2$, usando cada uno de los parámetros siguientes.

a) $t = x$ ***b)*** La pendiente $m = \dfrac{dy}{dx}$ en el punto (x, y)

Solución

a) Haciendo $x = t$ se obtienen las ecuaciones paramétricas

$$x = t \quad \text{y} \quad y = 1 - x^2 = 1 - t^2.$$

b) Para expresar x y y en términos del parámetro m, se puede proceder como sigue.

$$m = \frac{dy}{dx} = -2x \qquad \text{Derivada de } y = 1 - x^2.$$

$$x = -\frac{m}{2} \qquad \text{Despejar } x.$$

Con esto se obtiene una ecuación paramétrica para x. Para obtener una ecuación paramétrica para y, en la ecuación original se sustituye x por $-m/2$.

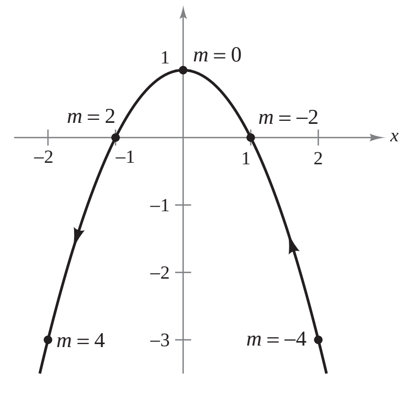
$$y = 1 - x^2 \qquad \text{Escribir la ecuación rectangular original.}$$

$$y = 1 - \left(-\frac{m}{2}\right)^2 \qquad \text{Sustitución de } x \text{ por } -m/2.$$

$$y = 1 - \frac{m^2}{4} \qquad \text{Simplificación.}$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas son

$$x = -\frac{m}{2} \quad \text{y} \quad y = 1 - \frac{m^2}{4}.$$



Ecuación rectangular: $y = 1 - x^2$
Ecuaciones paramétricas:
$x = -\frac{m}{2}, y = 1 - \frac{m^2}{4}$

Figura 10.24

En la figura 10.24 obsérvese que la orientación de la curva resultante es de derecha a izquierda, determinada por la dirección de los valores crecientes de la pendiente m. En el inciso *a*), la curva tenía la orientación opuesta.

TECNOLOGÍA Para usar de manera eficiente una herramienta de graficación es importante desarrollar la destreza de representar una gráfica mediante un conjunto de ecuaciones paramétricas. La razón es que muchas herramientas de graficación sólo tienen tres modos de graficación: 1) funciones, 2) ecuaciones paramétricas y 3) ecuaciones polares. La mayor parte de las herramientas de graficación no están programadas para elaborar la gráfica de una ecuación general. Supóngase, por ejemplo, que se quiere elaborar la gráfica de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$. Para hacer la gráfica de la hipérbola en el modo *función*, se necesitan dos ecuaciones: $y = \sqrt{x^2 - 1}$ y $y = -\sqrt{x^2 - 1}$. En el modo *paramétrico*, la gráfica puede representarse mediante $x = \sec t$ y $y = \tan t$.

Cicloides

Galileo fue el primero en llamar la atención hacia la cicloide, recomendando que se empleara en los arcos de los puentes. En cierta ocasión, Pascal pasó ocho días tratando de resolver muchos de los problemas de las cicloides, problemas como encontrar el área bajo un arco y el volumen del sólido de revolución generado al hacer girar la curva sobre una recta. La cicloide tiene tantas propiedades interesantes y ha generado tantas disputas entre los matemáticos que se le ha llamado "la Helena de la geometría" y "la manzana de la discordia".

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información acerca de las cicloides, consultar el artículo "The Geometry of Rolling Curves" de John Bloom y Lee Whitt en *The American Mathematical Monthly*.

EJEMPLO 5 Ecuaciones paramétricas de una cicloide

Determinar la curva descrita por un punto P en la circunferencia de un círculo de radio a que rueda a lo largo de una recta en el plano. A estas curvas se les llama **cicloides**.

Solución Sea θ el parámetro que mide la rotación del círculo y supóngase que al inicio el punto $P = (x, y)$ se encuentra en el origen. Cuando $\theta = 0$, P se encuentra en el origen. Cuando $\theta = \pi$, P está en un punto máximo $(\pi a, 2a)$. Cuando $\theta = 2\pi$, P vuelve al eje x en $(2\pi a, 0)$. En la figura 10.25 se ve que $\angle APC = 180° - \theta$. Por tanto,

$$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(180° - \theta) = \operatorname{sen}(\angle APC) = \frac{AC}{a} = \frac{BD}{a}$$

$$\cos\theta = -\cos(180° - \theta) = -\cos(\angle APC) = \frac{AP}{-a}$$

lo cual implica que $AP = -a\cos\theta$ y $BD = a\operatorname{sen}\theta$.

Como el círculo rueda a lo largo del eje x, se sabe que $OD = \widehat{PD} = a\theta$. Además, como $BA = DC = a$, se tiene

$$x = OD - BD = a\theta - a\operatorname{sen}\theta$$
$$y = BA + AP = a - a\cos\theta.$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas son $x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta)$ y $y = a(1 - \cos\theta)$.

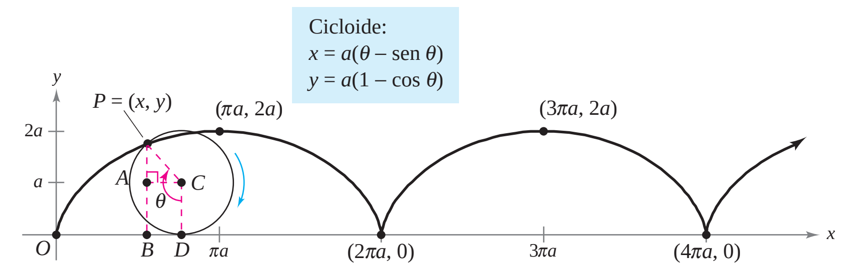


Figura 10.25

TECNOLOGÍA Algunas herramientas de graficación permiten simular el movimiento de un objeto que se mueve en el plano o en el espacio. Se recomienda usar una de estas herramientas para trazar la trayectoria de la cicloide que se muestra en la figura 10.25.

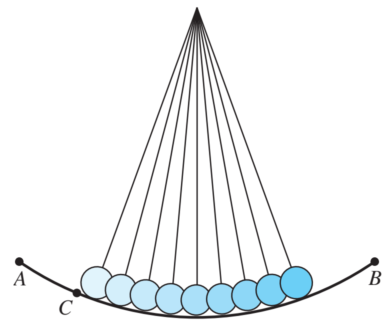
La cicloide de la figura 10.25 tiene esquinas agudas en los valores $x = 2n\pi a$. Obsérvese que las derivadas $x'(\theta)$ y $y'(\theta)$ son ambas cero en los puntos en los que $\theta = 2n\pi$.

$$x(\theta) = a(\theta - \operatorname{sen}\theta) \qquad y(\theta) = a(1 - \cos\theta)$$
$$x'(\theta) = a - a\cos\theta \qquad y'(\theta) = a\operatorname{sen}\theta$$
$$x'(2n\pi) = 0 \qquad y'(2n\pi) = 0$$

Entre estos puntos, se dice que la cicloide es **suave**.

DEFINICIÓN DE UNA CURVA SUAVE

Una curva C representada por $x = f(t)$ y $y = g(t)$ en un intervalo I se dice que es **suave** si f' y g' son continuas en I y no son simultáneamente 0, excepto posiblemente en los puntos terminales de I. La curva C se dice que es **suave a trozos** si es suave en todo subintervalo de alguna partición de I.



El tiempo que requiere un péndulo para realizar una oscilación completa si parte del punto *C* es aproximadamente el mismo que si parte del punto *A*
Figura 10.26

Los problemas de la tautocrona y de la braquistocrona

El tipo de curva descrito en el ejemplo 5 está relacionado con uno de los más famosos pares de problemas de la historia del cálculo. El primer problema (llamado el **problema de la tautocrona**) empezó con el descubrimiento de Galileo de que el tiempo requerido para una oscilación completa de un péndulo dado es *aproximadamente* el mismo ya sea que efectúe un movimiento largo a alta velocidad o un movimiento corto a menor velocidad (ver la figura 10.26). Más tarde, Galileo (1564-1642) comprendió que podía emplear este principio para construir un reloj. Sin embargo, no logró llegar a la mecánica necesaria para construirlo. Christian Huygens (1629-1695) fue el primero en diseñar y construir un modelo que funcionara. En su trabajo con los péndulos, Huygens observó que un péndulo no realiza oscilaciones de longitudes diferentes en exactamente el mismo tiempo. (Esto no afecta al reloj de péndulo porque la longitud del arco circular se mantiene constante dándole al péndulo un ligero impulso cada vez que pasa por su punto más bajo.) Pero al estudiar el problema, Huygens descubrió que una pelotita que rueda hacia atrás y hacia adelante en una cicloide invertida completa cada ciclo en exactamente el mismo tiempo.



The Granger Collection

JAMES BERNOULLI (1654-1705)

James Bernoulli, también llamado Jacques, era el hermano mayor de John. Fue uno de los matemáticos consumados de la familia suiza Bernoulli. Los logros matemáticos de James le han dado un lugar prominente en el desarrollo inicial del cálculo.



Una cicloide invertida es la trayectoria descendente que una pelotita rodará en el tiempo más corto
Figura 10.27

El segundo problema, que fue planteado por John Bernoulli en 1696, es el llamado **problema de la braquistocrona** (en griego *brachys* significa corto y *cronos* significa tiempo). El problema consistía en determinar la trayectoria descendente por la que una partícula se desliza del punto *A* al punto *B* en el *menor tiempo*. Varios matemáticos se abocaron al problema y un año después el problema fue resuelto por Newton, Leibniz, L'Hôpital, John Bernoulli y James Bernoulli. Como se encontró, la solución no es una recta de *A* a *B*, sino una cicloide invertida que pasa por los puntos *A* y *B*, como se muestra en la figura 10.27. Lo sorprendente de la solución es que una partícula, que parte del reposo en *cualquier* otro punto *C*, entre *A* y *B*, de la cicloide tarda exactamente el mismo tiempo en llegar a *B*, como se muestra en la figura 10.28.



Una pelotita que parte del punto *C* tarda el mismo tiempo en llegar al punto *B* que una que parte del punto *A*
Figura 10.28

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para ver una demostración del famoso problema de la braquistocrona, consultar el artículo "A New Minimization Proof for the Brachistochrone" de Gary Lawlor en *The American Mathematical Monthly*.

10.2 Ejercicios

1. Considerar las ecuaciones paramétricas $x = \sqrt{t}$ y $y = 3 - t$.
   a) Construir una tabla de valores para $t = 0, 1, 2, 3$ y 4.
   b) Trazar los puntos (x, y) generados en la tabla y dibujar una gráfica de las ecuaciones paramétricas. Indicar la orientación de la gráfica.
   c) Verificar la gráfica elaborada en el inciso *b*) empleando una herramienta de graficación.
   d) Hallar la ecuación rectangular mediante eliminación del parámetro y dibujar su gráfica. Comparar la gráfica generada en el inciso *b*) con la gráfica de la ecuación rectangular.

2. Considerar las ecuaciones paramétricas $x = 4\cos^2\theta$ y $y = 2\operatorname{sen}\theta$.
   a) Construir una tabla de valores para $\theta = -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{2}$.
   b) Trazar los puntos (x, y) generados en la tabla y dibujar una gráfica de las ecuaciones paramétricas. Indicar la orientación de la gráfica.
   c) Verificar la gráfica elaborada en el inciso *b*) empleando una herramienta de graficación.
   d) Hallar la ecuación rectangular mediante la eliminación del parámetro y dibujar su gráfica. Comparar la gráfica generada en el inciso *b*) con la gráfica de la ecuación rectangular.
   e) Si se seleccionaran valores de θ en el intervalo $[\pi/2, 3\pi/2]$ para la tabla del inciso *a*), ¿sería diferente la gráfica del inciso *b*)? Explicar el razonamiento.

En los ejercicios 3 a 20, trazar la curva que representa las ecuaciones paramétricas (indicar la orientación de la curva) y, eliminando el parámetro, dar la ecuación rectangular correspondiente.

3. $x = 2t - 3, \quad y = 3t + 1$
4. $x = 5 - 4t, \quad y = 2 + 5t$
5. $x = t + 1, \quad y = t^2$
6. $x = 2t^2, \quad y = t^4 + 1$
7. $x = t^3, \quad y = \dfrac{t^2}{2}$
8. $x = t^2 + t, \quad y = t^2 - t$
9. $x = \sqrt{t}, \quad y = t - 5$
10. $x = \sqrt[4]{t}, \quad y = 8 - t$
11. $x = t - 3, \quad y = \dfrac{t}{t - 3}$
12. $x = 1 + \dfrac{1}{t}, \quad y = t - 1$
13. $x = 2t, \quad y = |t - 2|$
14. $x = |t - 1|, \quad y = t + 2$
15. $x = e^t, \quad y = e^{3t} + 1$
16. $x = e^{-t}, \quad y = e^{2t} - 1$
17. $x = \sec\theta, \quad y = \cos\theta, \quad 0 \leq \theta < \pi/2, \quad \pi/2 < \theta \leq \pi$
18. $x = \tan^2\theta, \quad y = \sec^2\theta$
19. $x = 8\cos\theta, \quad y = 8\operatorname{sen}\theta$
20. $x = 3\cos\theta, \quad y = 7\operatorname{sen}\theta$

En los ejercicios 21 a 32, usar una herramienta de graficación para trazar la curva que representa las ecuaciones paramétricas (indicar la orientación de la curva). Eliminar el parámetro y dar la ecuación rectangular correspondiente.

21. $x = 6\operatorname{sen}2\theta, y = 4\cos 2\theta$
22. $x = \cos\theta, y = 2\operatorname{sen}2\theta$
23. $x = 4 + 2\cos\theta$
    $y = -1 + \operatorname{sen}\theta$
24. $x = -2 + 3\cos\theta$
    $y = -5 + 3\operatorname{sen}\theta$
25. $x = -3 + 4\cos\theta$
    $y = 2 + 5\operatorname{sen}\theta$
26. $x = \sec\theta$
    $y = \tan\theta$
27. $x = 4\sec\theta, \quad y = 3\tan\theta$
28. $x = \cos^3\theta, \quad y = \operatorname{sen}^3\theta$
29. $x = t^3, \quad y = 3\ln t$
30. $x = \ln 2t, \quad y = t^2$
31. $x = e^{-t}, \quad y = e^{3t}$
32. $x = e^{2t}, \quad y = e^t$

Comparación de curvas planas **En los ejercicios 33 a 36, determinar toda diferencia entre las curvas de las ecuaciones paramétricas. ¿Son iguales las gráficas? ¿Son iguales las orientaciones? ¿Son suaves las curvas? Explicar.**

33. *a*) $x = t$, $y = 2t + 1$
    b) $x = \cos\theta$, $y = 2\cos\theta + 1$
    c) $x = e^{-t}$, $y = 2e^{-t} + 1$
    d) $x = e^t$, $y = 2e^t + 1$
34. *a*) $x = 2\cos\theta$, $y = 2\operatorname{sen}\theta$
    b) $x = \sqrt{4t^2 - 1}/|t|$, $y = 1/t$
    c) $x = \sqrt{t}$, $y = \sqrt{4 - t}$
    d) $x = -\sqrt{4 - e^{2t}}$, $y = e^t$
35. *a*) $x = \cos\theta$, $y = 2\operatorname{sen}^2\theta$, $0 < \theta < \pi$
    b) $x = \cos(-\theta)$, $y = 2\operatorname{sen}^2(-\theta)$, $0 < \theta < \pi$
36. *a*) $x = t + 1, y = t^3$
    b) $x = -t + 1, y = (-t)^3$

37. ***Conjetura***
    a) Usar una herramienta de graficación para trazar las curvas representadas por los dos conjuntos de ecuaciones paramétricas.
    $x = 4\cos t \qquad x = 4\cos(-t)$
    $y = 3\operatorname{sen}t \qquad y = 3\operatorname{sen}(-t)$
    b) Describir el cambio en la gráfica si se cambia el signo del parámetro.
    c) Formular una conjetura respecto al cambio en la gráfica de las ecuaciones paramétricas cuando se cambia el signo del parámetro.
    d) Probar la conjetura con otro conjunto de ecuaciones paramétricas.

38. ***Redacción*** Revisar los ejercicios 33 a 36 y escribir un párrafo breve que describa cómo las gráficas de curvas representadas por diferentes conjuntos de ecuaciones paramétricas pueden diferir aun cuando la eliminación del parámetro dé la misma ecuación rectangular.

En los ejercicios 39 a 42, eliminar el parámetro y obtener la forma estándar o canónica de la ecuación rectangular.

39. Recta que pasa por (x_1, y_1) y (x_2, y_2):
    $x = x_1 + t(x_2 - x_1), \quad y = y_1 + t(y_2 - y_1)$
40. Circunferencia: $x = h + r\cos\theta, \quad y = k + r\operatorname{sen}\theta$
41. Elipse: $x = h + a\cos\theta, \quad y = k + b\operatorname{sen}\theta$
42. Hipérbola: $x = h + a\sec\theta, \quad y = k + b\tan\theta$

En los ejercicios 43 a 50, emplear los resultados de los ejercicios 39 a 42 para hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta o para la cónica.

43. Recta: pasa por $(0, 0)$ y $(4, -7)$

44. Recta: pasa por $(1, 4)$ y $(5, -2)$

45. Círculo: centro: $(3, 1)$; radio: 2

46. Círculo: centro: $(-6, 2)$; radio: 4

47. Elipse: vértices $(\pm 10, 0)$; foco: $(\pm 8, 0)$

48. Elipse: vértices: $(4, 7)$, $(4, -3)$; foco: $(4, 5)$, $(4, -1)$

49. Hipérbola: vértice: $(\pm 4, 0)$; foco: $(\pm 5, 0)$

50. Hipérbola: vértice: $(0, \pm 1)$; foco: $(0, \pm 2)$

En los ejercicios 51 a 54, hallar dos conjuntos diferentes de ecuaciones paramétricas para la ecuación rectangular.

51. $y = 6x - 5$ **52.** $y = 4/(x - 1)$

53. $y = x^3$ **54.** $y = x^2$

En los ejercicios 55 a 58, encontrar un conjunto de ecuaciones paramétricas para la ecuación rectangular que satisface la condición dada.

51. $y = 2x - 5$, $t = 0$ en el punto $(3, 1)$

56. $y = 4x + 1$, $t = -1$ en el punto $(-2, -7)$

57. $y = x^2$, $t = 4$ en el punto $(4, 16)$

58. $y = 4 - x^2$, $t = 1$ en el punto $(1, 3)$

En los ejercicios 59 a 66, emplear una herramienta de graficación para representar la curva descrita por las ecuaciones paramétricas. Indicar la dirección de la curva e identificar todos los puntos en los que la curva no sea suave.

59. Cicloide: $x = 2(\theta - \operatorname{sen}\theta)$, $y = 2(1 - \cos\theta)$

60. Cicloide: $x = \theta + \operatorname{sen}\theta$, $y = 1 - \cos\theta$

61. Cicloide alargada: $x = \theta - \frac{3}{2}\operatorname{sen}\theta$, $y = 1 - \frac{3}{2}\cos\theta$

62. Cicloide alargada: $x = 2\theta - 4\operatorname{sen}\theta$, $y = 2 - 4\cos\theta$

63. Hipocicloide: $x = 3\cos^3\theta$, $y = 3\operatorname{sen}^3\theta$

64. Cicloide corta: $x = 2\theta - \operatorname{sen}\theta$, $y = 2 - \cos\theta$

65. Hechicera o bruja de Agnesi: $x = 2\cot\theta$, $y = 2\operatorname{sen}^2\theta$

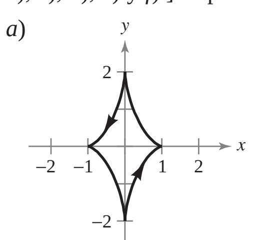
66. Hoja o folio de Descartes: $x = \dfrac{3t}{1 + t^3}$, $y = \dfrac{3t^2}{1 + t^3}$

Desarrollo de conceptos

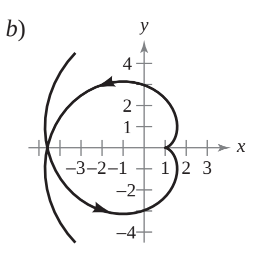
67. Explicar el proceso del trazado de una curva plana dada por ecuaciones paramétricas. ¿Qué se entiende por orientación de la curva?

68. Asociar cada conjunto de ecuaciones paramétricas con su gráfica correspondiente. [Las gráficas están etiquetadas *a*), *b*), *c*), *d*), *e*) y *f*).] Explicar el razonamiento.

a)

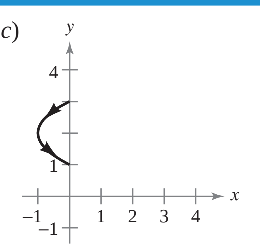


b)

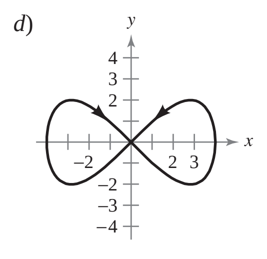


Desarrollo de conceptos (*continuación*)

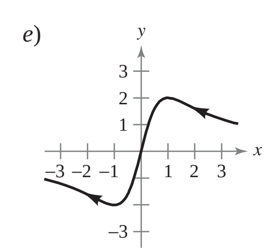
c)



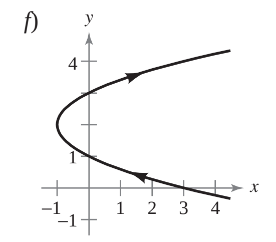
d)



e)



f)



i) $x = t^2 - 1$, $y = t + 2$

ii) $x = \operatorname{sen}^2\theta - 1$, $y = \operatorname{sen}\theta + 2$

iii) Curva de Lissajous: $x = 4\cos\theta$, $y = 2\operatorname{sen} 2\theta$

iv) Evoluta de una elipse: $x = \cos^3\theta$, $y = 2\operatorname{sen}^3\theta$

v) Evolvente o involuta de un círculo:
$x = \cos\theta + \theta\operatorname{sen}\theta$, $y = \operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta$

vi) Curva serpentina: $x = \cot\theta$, $y = 4\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

69. ***Cicloide corta*** Un disco de radio a rueda a lo largo de una recta sin deslizar. La curva trazada por un punto P que se encuentra a b unidades del centro $(b < a)$ se denomina **cicloide corta** o **acortada** (ver la figura). Usar el ángulo θ para hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas para esta curva.

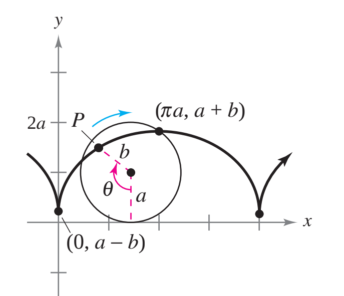


Figura para 69

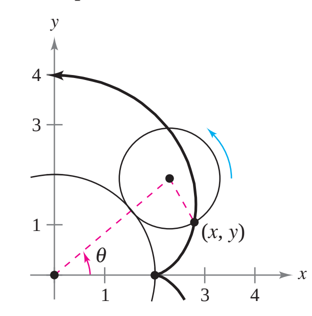


Figura para 70

70. ***Epicicloide*** Un círculo de radio 1 rueda sobre otro círculo de radio 2. La curva trazada por un punto sobre la circunferencia del círculo más pequeño se llama epicicloide (ver la figura). Usar el ángulo θ para hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas de esta curva.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 71 a 73, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. En caso de que sea falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que muestre que es falsa.**

71. La gráfica de las ecuaciones paramétricas $x = t^2$ y $y = t^2$ es la recta $y = x$.

72. Si y es función de t y x es función de t, entonces y es función de x.

73. La curva representada por las ecuaciones paramétricas $x = t$ y $y = \cos t$ se pueden escribir como una ecuación de la forma $y = f(x)$.

Para discusión

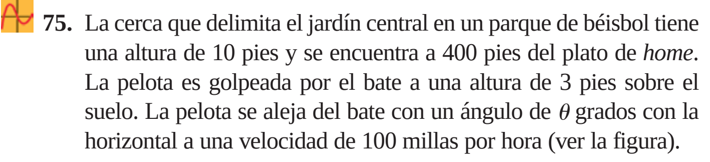
74. Considerar las ecuaciones paramétricas $x = 8 \cos t$ y $y = 8 \operatorname{sen} t$.

a) Describir la curva representada por las ecuaciones paramétricas.

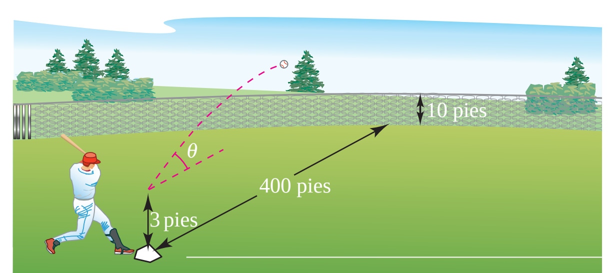
b) ¿Cómo se representa la curva por las ecuaciones paramétricas $x = 8 \cos t + 3$ y $y = 8 \operatorname{sen} t + 6$ comparada a la curva descrita en el inciso *a*)?

c) ¿Cómo cambia la curva original cuando el coseno y el seno se intercambian?

Movimiento de un proyectil **En los ejercicios 75 y 76, considerar un proyectil que se lanza a una altura de h pies sobre el suelo y a un ángulo θ con la horizontal. Si la velocidad inicial es v_0 pies por segundo, la trayectoria del proyectil queda descrita por las ecuaciones paramétricas $x = (v_0 \cos \theta)t$ y $y = h + (v_0 \operatorname{sen} \theta)t - 16t^2$.**



75. La cerca que delimita el jardín central en un parque de béisbol tiene una altura de 10 pies y se encuentra a 400 pies del plato de *home*. La pelota es golpeada por el bate a una altura de 3 pies sobre el suelo. La pelota se aleja del bate con un ángulo de θ grados con la horizontal a una velocidad de 100 millas por hora (ver la figura).



a) Dar un conjunto de ecuaciones paramétricas para la trayectoria de la pelota.

b) Usar una herramienta de graficación para representar la trayectoria de la pelota si $\theta = 15°$. ¿Es el golpe un *home run*?

c) Usar una herramienta de graficación para representar la trayectoria de la pelota si $\theta = 23°$. ¿Es el golpe un *home run*?

d) Hallar el ángulo mínimo al cual la pelota debe alejarse del bate si se quiere que el golpe sea un *home run*.

76. Una ecuación rectangular para la trayectoria de un proyectil es $y = 5 + x - 0.005x^2$.

a) Eliminar el parámetro t de la función de posición del movimiento de un proyectil para mostrar que la ecuación rectangular es

$$y = -\frac{16 \sec^2 \theta}{v_0^2} x^2 + (\tan \theta)\, x + h.$$

b) Usar el resultado del inciso *a*) para hallar h, v_0 y θ. Hallar las ecuaciones paramétricas de la trayectoria.

c) Usar una herramienta de graficación para trazar la gráfica de la ecuación rectangular de la trayectoria del proyectil. Confirmar la respuesta dada en el inciso *b*) y dibujar la curva representada por las ecuaciones paramétricas.

d) Usar una herramienta de graficación para aproximar la altura máxima del proyectil y su rango.

PROYECTO DE TRABAJO

Cicloides

En griego, la palabra *cycloid* significa *rueda*, la palabra *hipocicloide* significa *bajo la rueda*, y la palabra *epicicloide* significa *sobre la rueda*. Asociar la hipocicloide o epicicloide con su gráfica. [Las gráficas están marcadas *a*), *b*), *c*), *d*), *e*) y *f*).]

Hipocicloide, H(A, B)

Trayectoria descrita por un punto fijo en un círculo de radio B que rueda a lo largo de la cara interior de un círculo de radio A

$$x = (A - B)\cos t + B\cos\left(\frac{A - B}{B}\right)t$$

$$y = (A - B)\operatorname{sen} t - B\operatorname{sen}\left(\frac{A - B}{B}\right)t$$

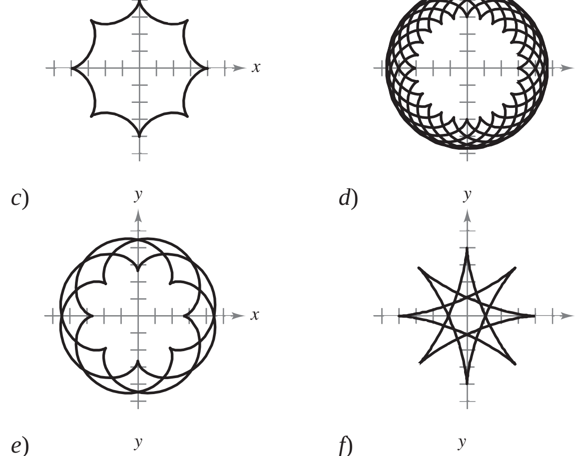
Epicicloide, E(A, B)

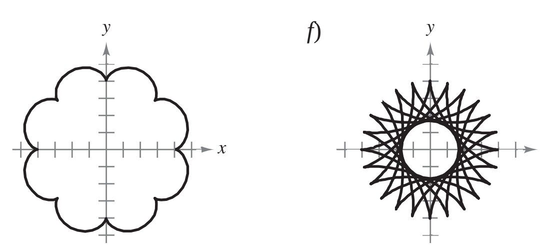
Trayectoria descrita por un punto fijo en un círculo de radio B que rueda a lo largo de la cara *exterior* de un círculo de radio A

$$x = (A + B)\cos t - B\cos\left(\frac{A + B}{B}\right)t$$

$$y = (A + B)\operatorname{sen} t - B\operatorname{sen}\left(\frac{A + B}{B}\right)t$$

I. $H(8, 3)$ II. $E(8, 3)$
III. $H(8, 7)$ IV. $E(24, 3)$
V. $H(24, 7)$ VI. $E(24, 7)$





Ejercicios basados en “Mathematical Discovery via Computer Graphics: Hypocycloids and Epicycloids” de Florence S. Gordon y Sheldon P. Gordon, *College Mathematics Journal*, noviembre de 1984, p. 441. Uso autorizado por los autores.

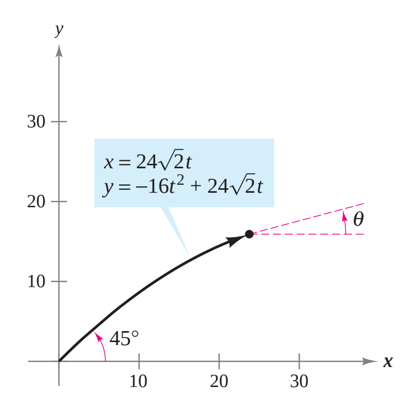
10.3 Ecuaciones paramétricas y cálculo

- **Hallar la pendiente de una recta tangente a una curva dada por un conjunto de ecuaciones paramétricas.**
- **Hallar la longitud de arco de una curva dada por un conjunto de ecuaciones paramétricas.**
- **Hallar el área de una superficie de revolución (forma paramétrica).**

Pendiente y rectas tangentes

Ahora que ya se sabe representar una gráfica en el plano mediante un conjunto de ecuaciones paramétricas, lo natural es preguntarse cómo emplear el cálculo para estudiar estas curvas planas. Para empezar, hay que dar otra mirada al proyectil representado por las ecuaciones paramétricas

$$x = 24\sqrt{2}t \qquad \text{y} \qquad y = -16t^2 + 24\sqrt{2}t$$



En el momento t, el ángulo de elevación del proyectil es θ, la pendiente de la recta tangente en ese punto
Figura 10.29

como se ilustra en la figura 10.29. De lo visto en la sección 10.2, se sabe que estas ecuaciones permiten localizar la posición del proyectil en un instante dado. También se sabe que el objeto es proyectado inicialmente con un ángulo de 45°. Pero, ¿cómo puede encontrarse el ángulo θ que representa la dirección del objeto en algún otro instante t? El teorema siguiente responde a esta pregunta proporcionando una fórmula para la pendiente de la recta tangente en función de t.

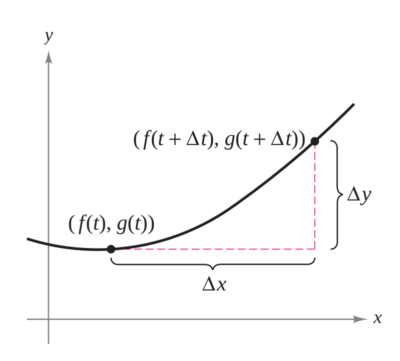
TEOREMA 10.7 FORMA PARAMÉTRICA DE LA DERIVADA

Si una curva suave C está dada por las ecuaciones $x = f(t)$ y $y = g(t)$, entonces la pendiente de C en (x, y) es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}, \qquad \frac{dx}{dt} \neq 0.$$

DEMOSTRACIÓN En la figura 10.30, considérese $\Delta t > 0$ y sea

$$\Delta y = g(t + \Delta t) - g(t) \qquad \text{y} \qquad \Delta x = f(t + \Delta t) - f(t).$$



La pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(f(t), g(t))$ y $(f(t + \Delta t), g(t + \Delta t))$ es $\Delta y / \Delta x$
Figura 10.30

Como $\Delta x \to 0$ cuando $\Delta t \to 0$, se puede escribir

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{f(t + \Delta t) - f(t)}.$$

Dividiendo tanto el numerador como el denominador entre Δt, se puede emplear la derivabilidad o diferenciabilidad de f y g para concluir que

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[g(t + \Delta t) - g(t)]/\Delta t}{[f(t + \Delta t) - f(t)]/\Delta t} = \frac{\displaystyle\lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}}{\displaystyle\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}} = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{dy/dt}{dx/dt}.$$

EJEMPLO 1 Derivación o diferenciación y forma paramétrica

Hallar dy/dx para la curva dada por $x = \operatorname{sen} t$ y $y = \cos t$.

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-\operatorname{sen} t}{\cos t} = -\tan t$$

AYUDA DE ESTUDIO La curva del ejemplo 1 es una circunferencia. Emplear la fórmula

$$\frac{dy}{dx} = -\tan t$$

para hallar su pendiente en los puntos (1, 0) y (0, 1).

Como dy/dx es función de t, puede emplearse el teorema 10.7 repetidamente para hallar las derivadas de *orden superior*. Por ejemplo,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right] = \frac{\frac{d}{dt}\left[\frac{dy}{dx}\right]}{dx/dt} \qquad \text{Segunda derivada.}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right] = \frac{\frac{d}{dt}\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]}{dx/dt}. \qquad \text{Tercera derivada.}$$

EJEMPLO 2 Hallar pendiente y concavidad

Para la curva dada por

$$x = \sqrt{t} \quad \text{y} \quad y = \frac{1}{4}(t^2 - 4), \quad t \geq 0$$

hallar la pendiente y la concavidad en el punto (2, 3).

Solución Como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{(1/2)t}{(1/2)t^{-1/2}} = t^{3/2} \qquad \text{Forma paramétrica de la}$$

se puede hallar que la segunda derivada es

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}[dy/dx]}{dx/dt} = \frac{\frac{d}{dt}[t^{3/2}]}{dx/dt} = \frac{(3/2)t^{1/2}}{(1/2)t^{-1/2}} = 3t. \qquad \text{Forma paramétrica de la segunda derivada.}$$

En $(x, y) = (2, 3)$, se tiene que $t = 4$, y la pendiente es

$$\frac{dy}{dx} = (4)^{3/2} = 8.$$

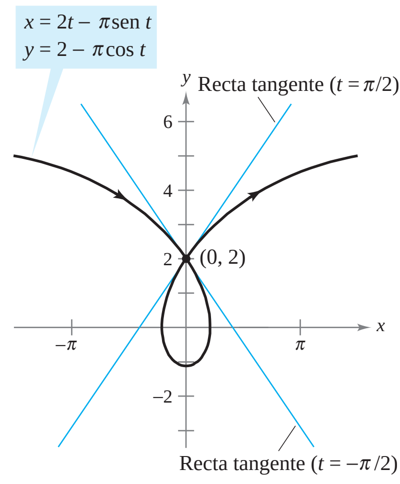
Y, cuando $t = 4$, la segunda derivada es

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3(4) = 12 > 0$$

por lo que puede concluirse que en (2, 3) la gráfica es cóncava hacia arriba, como se muestra en la figura 10.31.

En (2, 3), donde $t = 4$, la gráfica es cóncava hacia arriba
Figura 10.31

Como en las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$ no se necesita que y esté definida en función de x, puede ocurrir que una curva plana forme un lazo y se corte a sí misma. En esos puntos la curva puede tener más de una recta tangente, como se muestra en el ejemplo siguiente.



Esta cicloide alargada tiene dos rectas tangentes en el punto (0, 2)
Figura 10.32

EJEMPLO 3 Una curva con dos rectas tangentes en un punto

La **cicloide alargada** dada por

$$x = 2t - \pi \operatorname{sen} t \qquad \text{y} \qquad y = 2 - \pi \cos t$$

se corta a sí misma en el punto (0, 2), como se ilustra en la figura 10.32. Hallar las ecuaciones de las dos rectas tangentes en este punto.

Solución Como $x = 0$ y $y = 2$ cuando $t = \pm\pi/2$, y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\pi \operatorname{sen} t}{2 - \pi \cos t}$$

se tiene $dy/dx = -\pi/2$ cuando $t = -\pi/2$ y $dy/dx = \pi/2$ cuando $t = \pi/2$. Por tanto, las dos rectas tangentes en (0, 2) son

$$y - 2 = -\left(\frac{\pi}{2}\right)x \qquad \text{Recta tangente cuando } t = -\frac{\pi}{2}.$$

y

$$y - 2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)x. \qquad \text{Recta tangente cuando } t = \frac{\pi}{2}.$$

Si $dy/dt = 0$ y $dx/dt \neq 0$ cuando $t = t_0$, la curva representada por $x = f(t)$ y $y = g(t)$ tiene una tangente horizontal en $(f(t_0), g(t_0))$. Así, en el ejemplo 3, la curva dada tiene una tangente horizontal en el punto $(0, 2 - \pi)$ (cuando $t = 0$). De manera semejante, si $dx/dt = 0$ y $dy/dt \neq 0$ cuando $t = t_0$, la curva representada por $x = f(t)$ y $y = g(t)$ tiene una tangente vertical en $(f(t_0), g(t_0))$.

Longitud de arco

Se ha visto cómo pueden emplearse las ecuaciones paramétricas para describir la trayectoria de una partícula que se mueve en el plano. Ahora se desarrollará una fórmula para determinar la *distancia* recorrida por una partícula a lo largo de su trayectoria.

Recuérdese de la sección 7.4 que la fórmula para hallar la longitud de arco de una curva C dada por $y = h(x)$ en el intervalo $[x_0, x_1]$ es

$$\begin{aligned} s &= \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + [h'(x)]^2}\, dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx. \end{aligned}$$

Si C está representada por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, y si $dx/dt = f'(t) > 0$, se puede escribir

$$\begin{aligned} s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx &= \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)^2}\, dx \\ &= \int_a^b \sqrt{\frac{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2}{(dx/dt)^2}}\, \frac{dx}{dt}\, dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \\ &= \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt. \end{aligned}$$

TEOREMA 10.8 LONGITUD DE ARCO EN FORMA PARAMÉTRICA

Si una curva suave C está dada por $x = f(t)$ y $y = g(t)$ y C no se corta a sí misma en el intervalo $a \le t \le b$ (excepto quizás en los puntos terminales), entonces la longitud de arco de C en ese intervalo está dada por

$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt.$$

NOTA Al aplicar la fórmula para la longitud de arco a una curva, hay que asegurarse de que la curva se recorra una sola vez en el intervalo de integración. Por ejemplo, el círculo dado por $x = \cos t$ y $y = \operatorname{sen} t$, recorre una sola vez el intervalo $0 \le t \le 2\pi$, pero recorre dos veces el intervalo $0 \le t \le 4\pi$. ■

En la sección anterior se vio que si un círculo rueda a lo largo de una recta, cada punto de su circunferencia trazará una trayectoria llamada cicloide. Si el círculo rueda sobre otro círculo, la trayectoria del punto es una **epicicloide**. El ejemplo siguiente muestra cómo hallar la longitud de arco de una epicicloide.

EJEMPLO 4 Calcular la longitud de arco

ARCO DE UNA CICLOIDE

La longitud de un arco de una cicloide fue calculada por vez primera en 1658 por el arquitecto y matemático inglés Christopher Wren, famoso por reconstruir muchos edificios e iglesias en Londres, entre los que se encuentra la Catedral de St. Paul.

Un círculo de radio 1 rueda sobre otro círculo mayor de radio 4, como se muestra en la figura 10.33. La epicicloide trazada por un punto en el círculo más pequeño está dada por

$$x = 5\cos t - \cos 5t \quad \text{y} \quad y = 5\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 5t.$$

Hallar la distancia recorrida por el punto al dar una vuelta completa alrededor del círculo mayor.

Solución Antes de aplicar el teorema 10.8, hay que observar en la figura 10.33 que la curva tiene puntos angulosos en $t = 0$ y $t = \pi/2$. Entre estos dos puntos, dx/dt y dy/dt no son simultáneamente 0. Por tanto, la porción de la curva que se genera de $t = 0$ a $t = \pi/2$ es suave. Para hallar la distancia total recorrida por el punto, calcular la longitud de arco que se encuentra en el primer cuadrante y multiplicar por 4.

$$s = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \qquad \text{Forma paramétrica de la longitud de arco.}$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{(-5\operatorname{sen} t + 5\operatorname{sen} 5t)^2 + (5\cos t - 5\cos 5t)^2}\, dt$$

$$= 20\int_0^{\pi/2} \sqrt{2 - 2\operatorname{sen} t \operatorname{sen} 5t - 2\cos t\cos 5t}\, dt$$

$$= 20\int_0^{\pi/2} \sqrt{2 - 2\cos 4t}\, dt$$

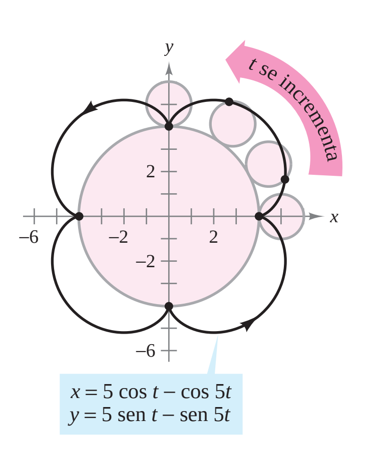
$$= 20\int_0^{\pi/2} \sqrt{4\operatorname{sen}^2 2t}\, dt \qquad \text{Identidad trigonométrica.}$$

$$= 40\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2t\, dt$$

$$= -20\Big[\cos 2t\Big]_0^{\pi/2}$$

$$= 40$$

Para la epicicloide de la figura 10.33, una longitud de arco de 40 parece correcta, puesto que la circunferencia de un círculo de radio 6 es $2\pi r = 12\pi \approx 37.7$.



Un punto en la circunferencia pequeña es el que traza una epicicloide en la medida que el círculo pequeño rueda alrededor de la circunferencia grande
Figura 10.33

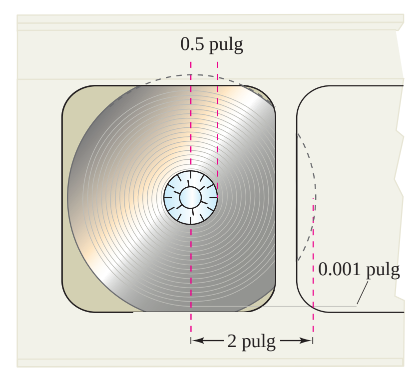


Figura 10.34

EJEMPLO 5 Longitud de una cinta magnetofónica

Una cinta magnetofónica de 0.001 pulgadas de espesor se enrolla en una bobina cuyo radio interior mide 0.5 pulgadas y cuyo radio exterior mide 2 pulgadas, como se muestra en la figura 10.34. ¿Cuánta cinta se necesita para llenar la bobina?

Solución Para crear un modelo para este problema, supóngase que a medida que la cinta se enrolla en la bobina, su distancia r al centro se incrementa en forma lineal a razón de 0.001 pulgadas por revolución, o

$$r = (0.001)\frac{\theta}{2\pi} = \frac{\theta}{2\,000\pi}, \qquad 1\,000\pi \le \theta \le 4\,000\pi$$

donde θ está medido en radianes. Se pueden determinar las coordenadas del punto (x, y) correspondientes a un radio dado

$$x = r\cos\theta$$

y

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

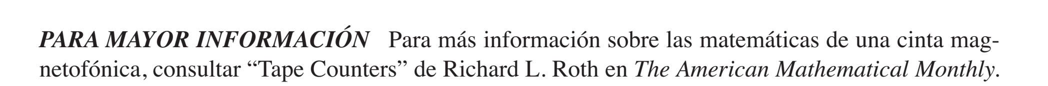
Al sustituir r, se obtienen las ecuaciones paramétricas

$$x = \left(\frac{\theta}{2\,000\pi}\right)\cos\theta \quad \text{y} \quad y = \left(\frac{\theta}{2\,000\pi}\right)\mathrm{sen}\,\theta.$$

La fórmula de la longitud de arco se puede emplear para determinar que la longitud total de la cinta es

$$\begin{aligned} s &= \int_{1\,000\pi}^{4\,000\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta \\ &= \frac{1}{2\,000\pi}\int_{1\,000\pi}^{4\,000\pi}\sqrt{(-\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta)^2 + (\theta\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta)^2}\,d\theta \\ &= \frac{1}{2\,000\pi}\int_{1\,000\pi}^{4\,000\pi}\sqrt{\theta^2 + 1}\,d\theta \\ &= \frac{1}{2\,000\pi}\left(\frac{1}{2}\right)\left[\theta\sqrt{\theta^2+1} + \ln\left|\theta + \sqrt{\theta^2+1}\right|\right]_{1\,000\pi}^{4\,000\pi} \\ &\approx 11\,781 \text{ pulgadas} \\ &\approx 982 \text{ pies} \end{aligned}$$

Tablas de integración (apéndice B), fórmula 26.


PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre las matemáticas de una cinta magnetofónica, consultar "Tape Counters" de Richard L. Roth en *The American Mathematical Monthly*.

NOTA La gráfica de $r = a\theta$ se llama **espiral de Arquímedes**. La gráfica de $r = \theta/2\,000\pi$ (ejemplo 5) es de este tipo.

La longitud de la cinta del ejemplo 5 puede ser aproximada si se suman las porciones circulares de la cinta. El radio de la más pequeña es de 0.501 y el radio de la más grande es de 2.

$$\begin{aligned} s &\approx 2\pi(0.501) + 2\pi(0.502) + 2\pi(0.503) + \cdots + 2\pi(2.000) \\ &= \sum_{i=1}^{1\,500} 2\pi(0.5 + 0.001i) \\ &= 2\pi[1\,500(0.5 + 0.001(1\,500)(1\,501)/2] \\ &\approx 11\,786 \text{ pulgadas} \end{aligned}$$

Área de una superficie de revolución

La fórmula para el área de una superficie de revolución en forma rectangular puede usarse para desarrollar una fórmula para el área de la superficie en forma paramétrica.

TEOREMA 10.9 ÁREA DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

Si una curva suave C dada por $x = f(t)$ y $y = g(t)$ no se corta a sí misma en un intervalo $a \le t \le b$, entonces el área S de la superficie de revolución generada por rotación de C, en torno a uno de los ejes de coordenadas, está dada por

1. $S = 2\pi \int_a^b g(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$ Revolución en torno al eje x: $g(t) \ge 0$.

2. $S = 2\pi \int_a^b f(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$ Revolución en torno al eje y: $f(t) \ge 0$.

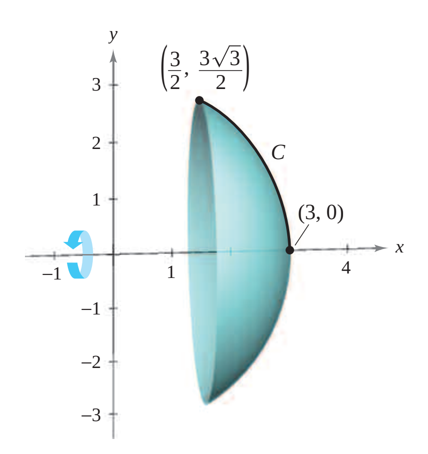
Estas fórmulas son fáciles de recordar si se considera al diferencial de la longitud de arco como

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Entonces las fórmulas se expresan como sigue.

1. $S = 2\pi \int_a^b g(t)\, ds$ 2. $S = 2\pi \int_a^b f(t)\, ds$

EJEMPLO 6 Hallar el área de una superficie de revolución



Esta superficie de revolución tiene un área de superficie de 9π
Figura 10.35

Sea C el arco de la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 9$$

que va desde (3, 0) hasta $\left(3/2, 3\sqrt{3}/2\right)$, como se ve en la figura 10.35. Encontrar el área de la superficie generada por revolución de C alrededor del eje x.

Solución C se puede representar en forma paramétrica mediante las ecuaciones

$$x = 3\cos t \quad \text{y} \quad y = 3\,\text{sen}\, t, \qquad 0 \le t \le \pi/3.$$

(El intervalo para t se obtiene observando que $t = 0$ cuando $x = 3$ y $t = \pi/3$ cuando $x = 3/2$.) En este intervalo, C es suave y y es no negativa, y se puede aplicar el teorema 10.9 para obtener el área de la superficie

$$S = 2\pi \int_0^{\pi/3} (3\,\text{sen}\, t)\sqrt{(-3\,\text{sen}\, t)^2 + (3\cos t)^2}\, dt$$ Fórmula para el área de una superficie de revolución.

$$= 6\pi \int_0^{\pi/3} \text{sen}\, t\sqrt{9(\text{sen}^2 t + \cos^2 t)}\, dt$$

$$= 6\pi \int_0^{\pi/3} 3\,\text{sen}\, t\, dt$$ Identidad trigonométrica.

$$= -18\pi \Big[\cos t\Big]_0^{\pi/3}$$

$$= -18\pi\left(\frac{1}{2} - 1\right)$$

$$= 9\pi.$$

10.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, hallar dy/dx.

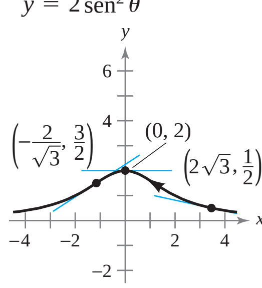
1. $x = t^2,\ y = 7 - 6t$
2. $x = \sqrt[3]{t},\ y = 4 - t$
3. $x = \operatorname{sen}^2\theta,\ y = \cos^2\theta$
4. $x = 2e^{\theta},\ y = e^{-\theta/2}$

En los ejercicios 5 a 14, hallar dy/dx y d^2y/dx^2, así como la pendiente y la concavidad (de ser posible) en el punto correspondiente al valor dado del parámetro.

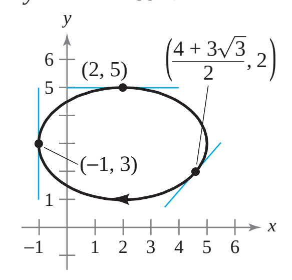
	Ecuaciones paramétricas	*Punto*
5.	$x = 4t,\ y = 3t - 2$	$t = 3$
6.	$x = \sqrt{t},\ y = 3t - 1$	$t = 1$
7.	$x = t + 1,\ y = t^2 + 3t$	$t = -1$
8.	$x = t^2 + 5t + 4,\ y = 4t$	$t = 0$
9.	$x = 4\cos\theta,\ y = 4\operatorname{sen}\theta$	$\theta = \dfrac{\pi}{4}$
10.	$x = \cos\theta,\ y = 3\operatorname{sen}\theta$	$\theta = 0$
11.	$x = 2 + \sec\theta,\ y = 1 + 2\tan\theta$	$\theta = \dfrac{\pi}{6}$
12.	$x = \sqrt{t},\ y = \sqrt{t - 1}$	$t = 2$
13.	$x = \cos^3\theta,\ y = \operatorname{sen}^3\theta$	$\theta = \dfrac{\pi}{4}$
14.	$x = \theta - \operatorname{sen}\theta,\ y = 1 - \cos\theta$	$\theta = \pi$

En los ejercicios 15 y 18, hallar una ecuación para la recta tangente en cada uno de los puntos dados de la curva.

15. $x = 2\cot\theta$
    $y = 2\operatorname{sen}^2\theta$



16. $x = 2 - 3\cos\theta$
    $y = 3 + 2\operatorname{sen}\theta$



17. $x = t^2 - 4$
    $y = t^2 - 2t$
    $(0, 0),\ (-3, -1),$ y $(-3, 3)$
18. $x = t^4 + 2$
    $y = t^3 + t$
    $(2, 0),\ (3, -2),$ y $(18, 10)$

En los ejercicios 19 a 22, *a*) usar una herramienta de graficación para trazar la curva representada por las ecuaciones paramétricas, *b*) usar una herramienta de graficación para hallar dx/dt, dy/dt y dy/dx para el valor dado del parámetro, *c*) hallar una ecuación de la recta tangente a la curva en el valor dado del parámetro, y *d*) usar una herramienta de graficación para trazar la curva y la recta tangente del inciso *c*).

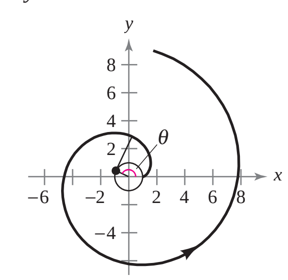
	Ecuaciones paramétricas	*Parámetro*
19.	$x = 6t,\ y = t^2 + 4$	$t = 1$
20.	$x = t - 2,\ y = \dfrac{1}{t} + 3$	$t = 1$
21.	$x = t^2 - t + 2,\ y = t^3 - 3t$	$t = -1$
22.	$x = 4\cos\theta,\ y = 3\operatorname{sen}\theta$	$\theta = \dfrac{3\pi}{4}$

En los ejercicios 23 a 26, hallar las ecuaciones de las rectas tangentes en el punto en el que la curva se corta a sí misma.

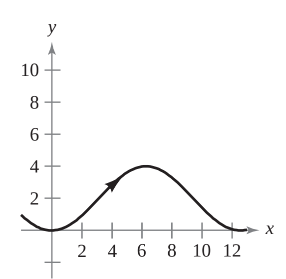
23. $x = 2\operatorname{sen}2t,\quad y = 3\operatorname{sen}t$
24. $x = 2 - \pi\cos t,\quad y = 2t - \pi\operatorname{sen}t$
25. $x = t^2 - t,\quad y = t^3 - 3t - 1$
26. $x = t^3 - 6t,\quad y = t^2$

En los ejercicios 27 y 28, hallar todos los puntos de tangencia horizontal y vertical (si los hay) a la porción de la curva que se muestra.

27. Evolvente o involuta de un círculo:
    $x = \cos\theta + \theta\operatorname{sen}\theta$
    $y = \operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta$



28. $x = 2\theta$
    $y = 2(1 - \cos\theta)$



En los ejercicios 29 a 38, hallar todos los puntos de tangencia horizontal y vertical (si los hay) a la curva. Usar una herramienta de graficación para confirmar los resultados.

29. $x = 4 - t,\quad y = t^2$
30. $x = t + 1,\quad y = t^2 + 3t$
31. $x = t + 4,\quad y = t^3 - 3t$
32. $x = t^2 - t + 2,\quad y = t^3 - 3t$
33. $x = 3\cos\theta,\quad y = 3\operatorname{sen}\theta$
34. $x = \cos\theta,\quad y = 2\operatorname{sen}2\theta$
35. $x = 5 + 3\cos\theta,\quad y = -2 + \operatorname{sen}\theta$
36. $x = 4\cos^2\theta,\quad y = 2\operatorname{sen}\theta$
37. $x = \sec\theta,\quad y = \tan\theta$
38. $x = \cos^2\theta,\quad y = \cos\theta$

En los ejercicios 39 a 44, determinar los intervalos de t en los que la curva es cóncava hacia abajo o cóncava hacia arriba.

39. $x = 3t^2,\quad y = t^3 - t$
40. $x = 2 + t^2,\quad y = t^2 + t^3$
41. $x = 2t + \ln t,\quad y = 2t - \ln t$
42. $x = t^2,\quad y = \ln t$
43. $x = \operatorname{sen}t,\quad y = \cos t,\quad 0 < t < \pi$
44. $x = 4\cos t,\quad y = 2\operatorname{sen}t,\quad 0 < t < 2\pi$

Longitud de arco **En los ejercicios 45 a 48, dar una integral que represente la longitud de arco de la curva en el intervalo dado. No evaluar la integral.**

	Ecuaciones paramétricas	*Intervalo*
45.	$x = 3t - t^2, \quad y = 2t^{3/2}$	$1 \le t \le 3$
46.	$x = \ln t, \quad y = 4t - 3$	$1 \le t \le 5$
47.	$x = e^t + 2, \quad y = 2t + 1$	$-2 \le t \le 2$
48.	$x = t + \operatorname{sen} t, \quad y = t - \cos t$	$0 \le t \le \pi$

Longitud de arco **En los ejercicios 49 a 56, hallar la longitud de arco de la curva en el intervalo dado.**

	Ecuaciones paramétricas	*Intervalo*
49.	$x = 3t + 5, \quad y = 7 - 2t$	$-1 \le t \le 3$
50.	$x = t^2, \quad y = 2t$	$0 \le t \le 2$
51.	$x = 6t^2, \quad y = 2t^3$	$1 \le t \le 4$
52.	$x = t^2 + 1, \quad y = 4t^3 + 3$	$-1 \le t \le 0$
53.	$x = e^{-t} \cos t, \quad y = e^{-t} \operatorname{sen} t$	$0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$
54.	$x = \operatorname{arcsen} t, \quad y = \ln\sqrt{1 - t^2}$	$0 \le t \le \frac{1}{2}$
55.	$x = \sqrt{t}, \quad y = 3t - 1$	$0 \le t \le 1$
56.	$x = t, \quad y = \dfrac{t^5}{10} + \dfrac{1}{6t^3}$	$1 \le t \le 2$

Longitud de arco **En los ejercicios 57 a 60, hallar la longitud de arco de la curva en el intervalo $[0, 2\pi]$.**

57. Perímetro de una hipocicloide: $x = a \cos^3 \theta, y = a \operatorname{sen}^3 \theta$

58. Circunferencia de un círculo: $x = a \cos \theta, y = a \operatorname{sen} \theta$

59. Arco de una cicloide: $x = a(\theta - \operatorname{sen} \theta), y = a(1 - \cos \theta)$

60. Evolvente o involuta de un círculo:
$x = \cos \theta + \theta \operatorname{sen} \theta, y = \operatorname{sen} \theta - \theta \cos \theta$

61. ***Trayectoria de un proyectil*** La trayectoria de un proyectil se describe por medio de las ecuaciones paramétricas

$$x = (90 \cos 30°)t \qquad \text{y} \qquad y = (90 \operatorname{sen} 30°)t - 16t^2$$

donde x y y se miden en pies.

a) Utilizar una herramienta de graficación para trazar la trayectoria del proyectil.

b) Utilizar una herramienta de graficación para estimar el alcance del proyectil.

c) Utilizar las funciones de integración de una herramienta de graficación para aproximar la longitud de arco de la trayectoria. Comparar este resultado con el alcance del proyectil.

62. ***Trayectoria de un proyectil*** Si el proyectil del ejercicio 61 se lanza formando un ángulo θ con la horizontal, sus ecuaciones paramétricas son

$$x = (90 \cos \theta)t \quad \text{y} \quad y = (90 \operatorname{sen} \theta)t - 16t^2.$$

Usar una herramienta de graficación para hallar el ángulo que maximiza el alcance del proyectil. ¿Qué ángulo maximiza la longitud de arco de la trayectoria?

63. ***Hoja (o folio) de Descartes*** Considerar las ecuaciones paramétricas

$$x = \frac{4t}{1 + t^3} \quad \text{y} \quad y = \frac{4t^2}{1 + t^3}.$$

a) Usar una herramienta de graficación para trazar la curva descrita por las ecuaciones paramétricas.

b) Usar una herramienta de graficación para hallar los puntos de tangencia horizontal a la curva.

c) Usar las funciones de integración de una herramienta de graficación para aproximar la longitud de arco del lazo cerrado. (*Sugerencia:* Usar la simetría e integrar sobre el intervalo $0 \le t \le 1$.)

64. ***Hechicera o bruja de Agnesi*** Considerar las ecuaciones paramétricas

$$x = 4 \cot \theta \quad \text{y} \quad y = 4 \operatorname{sen}^2 \theta \qquad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

a) Emplear una herramienta de graficación para trazar la curva descrita por las ecuaciones paramétricas.

b) Utilizar una herramienta de graficación para hallar los puntos de tangencia horizontal a la curva.

c) Usar las funciones de integración de una herramienta de graficación para aproximar la longitud de arco en el intervalo $\pi/4 \le \theta \le \pi/2$.

65. ***Redacción***

a) Usar una herramienta de graficación para representar cada conjunto de ecuaciones paramétricas.

$x = t - \operatorname{sen} t$	$x = 2t - \operatorname{sen}(2t)$
$y = 1 - \cos t$	$y = 1 - \cos(2t)$
$0 \le t \le 2\pi$	$0 \le t \le \pi$

b) Comparar las gráficas de los dos conjuntos de ecuaciones paramétricas del inciso *a*). Si la curva representa el movimiento de una partícula y t es tiempo, ¿qué puede inferirse acerca de las velocidades promedio de la partícula en las trayectorias representadas por los dos conjuntos de ecuaciones paramétricas?

c) Sin trazar la curva, determinar el tiempo que requiere la partícula para recorrer las mismas trayectorias que en los incisos *a*) y *b*) si la trayectoria está descrita por

$$x = \tfrac{1}{2}t - \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{2}t\right) \quad \text{y} \quad y = 1 - \cos\left(\tfrac{1}{2}t\right).$$

66. ***Redacción***

a) Cada conjunto de ecuaciones paramétricas representa el movimiento de una partícula. Usar una herramienta de graficación para representar cada conjunto.

Primera partícula	*Segunda partícula*
$x = 3 \cos t$	$x = 4 \operatorname{sen} t$
$y = 4 \operatorname{sen} t$	$y = 3 \cos t$
$0 \le t \le 2\pi$	$0 \le t \le 2\pi$

b) Determinar el número de puntos de intersección.

c) ¿Estarán las partículas en algún momento en el mismo lugar al mismo tiempo? Si es así, identificar esos puntos.

d) Explicar qué ocurre si el movimiento de la segunda partícula se representa por

$$x = 2 + 3 \operatorname{sen} t, \quad y = 2 - 4 \cos t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Área de una superficie **En los ejercicios 67 a 70, dar una integral que represente el área de la superficie generada por revolución de la curva alrededor del eje *x*. Usar una herramienta de graficación para aproximar la integral.**

Ecuaciones paramétricas	*Intervalo*
67. $x = 4t, \quad y = t + 2$	$0 \le t \le 4$
68. $x = \frac{1}{4}t^2, \quad y = t + 3$	$0 \le t \le 3$
69. $x = \cos^2 \theta, \quad y = \cos \theta$	$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$
70. $x = \theta + \operatorname{sen} \theta, \quad y = \theta + \cos \theta$	$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

Área de una superficie **En los ejercicios 71 a 76, encontrar el área de la superficie generada por revolución de la curva alrededor de cada uno de los ejes dados.**

71. $x = 2t, \quad y = 3t, \quad 0 \le t \le 3,$ *a)* eje *x* *b)* eje *y*

72. $x = t, \quad y = 4 - 2t, \quad 0 \le t \le 2,$ *a)* eje *x* *b)* eje *y*

73. $x = 5 \cos \theta, \quad y = 5 \operatorname{sen} \theta, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},$ eje *y*

74. $x = \frac{1}{3}t^3, \quad y = t + 1, \quad 1 \le t \le 2,$ eje *y*

75. $x = a \cos^3 \theta, \quad y = a \operatorname{sen}^3 \theta, \quad 0 \le \theta \le \pi,$ eje *x*

76. $x = a \cos \theta, \quad y = b \operatorname{sen} \theta, \quad 0 \le \theta \le 2\pi,$

a) eje *x* *b)* eje *y*

Desarrollo de conceptos

77. Dar la forma paramétrica de la derivada.

En los ejercicios 78 y 79, determinar mentalmente *dy/dx*.

78. $x = t, \quad y = 3$ **79.** $x = t, \quad y = 6t - 5$

80. Dar la fórmula integral para la longitud de arco en forma paramétrica.

81. Dar las fórmulas integrales para las áreas de superficies de revolución generadas por revolución de una curva suave *C* alrededor *a)* del eje *x* y *b)* del eje *y*.

Para discusión

82. *a)* Dibujar la gráfica de una curva definida por las ecuaciones paramétricas $x = g(t)$ y $y = f(t)$ de manera que $dx/dt > 0$ y $dy/dt < 0$ para todos los números reales *t*.

b) Dibujar la gráfica de una curva definida por las ecuaciones paramétricas $x = g(t)$ y $y = f(t)$ de manera que $dx/dt < 0$ y $dy/dt < 0$ para todos los números reales *t*.

83. Mediante integración por sustitución mostrar que si *y* es una función continua de *x* en el intervalo $a \le x \le b$, donde $x = f(t)$ y $y = g(t)$, entonces

$$\int_a^b y\,dx = \int_{t_1}^{t_2} g(t) f'(t)\,dt$$

donde $f(t_1) = a$, $f(t_2) = b$, y tanto *g* como *f′* son continuas en $[t_1, t_2]$.

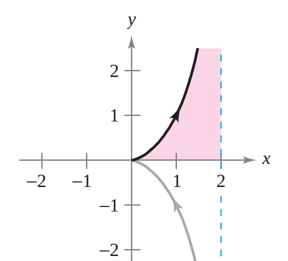
84. ***Área de una superficie*** Una porción de una esfera de radio *r* se elimina cortando un cono circular con vértice en el centro de la esfera. El vértice del cono forma un ángulo 2θ. Hallar el área de superficie eliminada de la esfera.

Área **En los ejercicios 85 y 86, hallar el área de la región. (Usar el resultado del ejercicio 83.)**

85. $x = 2 \operatorname{sen}^2 \theta$

$y = 2 \operatorname{sen}^2 \theta \tan \theta$

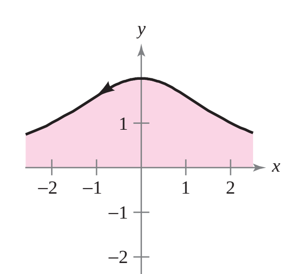
$0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$



86. $x = 2 \cot \theta$

$y = 2 \operatorname{sen}^2 \theta$

$0 < \theta < \pi$



CAS ***Áreas de curvas cerradas simples*** **En los ejercicios 87 a 92, usar un sistema algebraico por computadora y el resultado del ejercicio 83 para relacionar la curva cerrada con su área. (Estos ejercicios fueron adaptados del artículo "The Surveyor's Area Formula" de Bart Braden en la publicación de septiembre de 1986 del *College Mathematics Journal*, pp. 335-337, con autorización del autor.)**

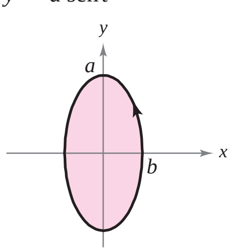
a) $\frac{8}{3}ab$ **b)** $\frac{3}{8}\pi a^2$ **c)** $2\pi a^2$

d) πab **e)** $2\pi ab$ **f)** $6\pi a^2$

87. Elipse: $(0 \le t \le 2\pi)$

$x = b \cos t$

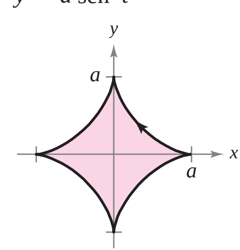
$y = a \operatorname{sen} t$



88. Astroide: $(0 \le t \le 2\pi)$

$x = a \cos^3 t$

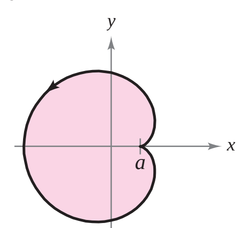
$y = a \operatorname{sen}^3 t$



89. Cardioide: $(0 \le t \le 2\pi)$

$x = 2a \cos t - a \cos 2t$

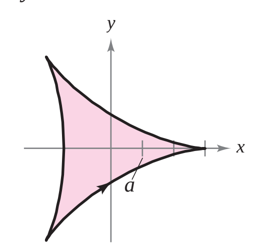
$y = 2a \operatorname{sen} t - a \operatorname{sen} 2t$



90. Deltoide: $(0 \le t \le 2\pi)$

$x = 2a \cos t + a \cos 2t$

$y = 2a \operatorname{sen} t - a \operatorname{sen} 2t$



91. Reloj de arena: $(0 \le t \le 2\pi)$

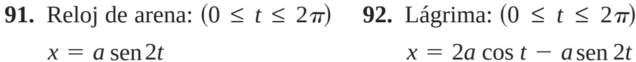
$x = a \operatorname{sen} 2t$

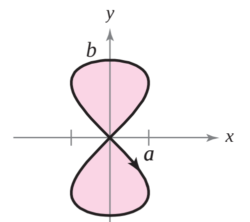
$y = b \operatorname{sen} t$

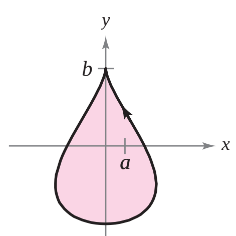
92. Lágrima: $(0 \le t \le 2\pi)$

$x = 2a \cos t - a \operatorname{sen} 2t$

$y = b \operatorname{sen} t$







Centroide **En los ejercicios 93 y 94, hallar el centroide de la región limitada por la gráfica de las ecuaciones paramétricas y los ejes de coordenadas. (Usar el resultado del ejercicio 83.)**

93. $x = \sqrt{t}, \quad y = 4 - t$

94. $x = \sqrt{4 - t}, \quad y = \sqrt{t}$

Volumen **En los ejercicios 95 y 96, hallar el volumen del sólido generado por revolución en torno al eje x de la región limitada por la gráfica de las ecuaciones dadas. (Usar el resultado del ejercicio 83.)**

95. $x = 6 \cos \theta, \quad y = 6 \operatorname{sen} \theta$

96. $x = \cos \theta, \quad y = 3 \operatorname{sen} \theta, \quad a > 0$

97. ***Cicloide*** Emplear las ecuaciones paramétricas

$$x = a(\theta - \operatorname{sen} \theta) \quad \text{y} \quad y = a(1 - \cos \theta), a > 0$$

para responder lo siguiente.

a) Hallar dy/dx y d^2y/dx^2.

b) Hallar las ecuaciones de la recta tangente en el punto en el que $\theta = \pi/6$.

c) Localizar todos los puntos (si los hay) de tangencia horizontal.

d) Calcular dónde es la curva cóncava hacia arriba y dónde es cóncava hacia abajo.

e) Hallar la longitud de un arco de la curva.

98. Emplear las ecuaciones paramétricas

$$x = t^2\sqrt{3} \quad \text{y} \quad y = 3t - \frac{1}{3}t^3$$

para los incisos siguientes.



a) Emplear una herramienta de graficación para trazar la curva en el intervalo $-3 \le t \le 3$.

b) Hallar dy/dx y d^2y/dx^2.

c) Hallar la ecuación de la recta tangente en el punto $\left(\sqrt{3}, \frac{8}{3}\right)$.

d) Hallar la longitud de la curva.

e) Hallar el área de la superficie generada por revolución de la curva en torno al eje x.

99. ***Evolvente o involuta de círculo*** La evolvente o involuta de un círculo está descrita por el extremo P de una cuerda que se mantiene tensa mientras se desenrolla de un carrete que no gira (ver la figura). Mostrar que la siguiente es una representación paramétrica de la evolvente o involuta

$$x = r(\cos \theta + \theta \operatorname{sen} \theta) \quad \text{y} \quad y = r(\operatorname{sen} \theta - \theta \cos \theta).$$

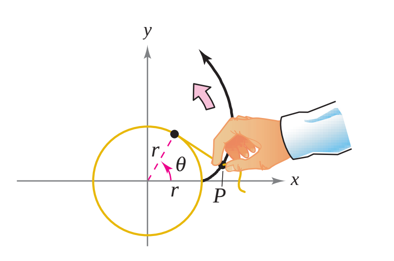


Figura para 99

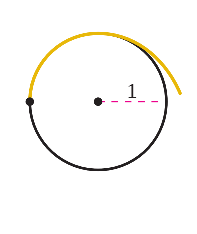


Figura para 100

100. ***Evolvente o involuta de un círculo*** La figura muestra un segmento de cuerda sujeto a un círculo de radio 1. La cuerda es justo lo suficientemente larga para llegar al lado opuesto del círculo. Encontrar el área que se cubre cuando la cuerda se desenrolla en sentido contrario al de las manecillas del reloj.



101. *a*) Usar una herramienta de graficación para trazar la curva dada por

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = \frac{2t}{1 + t^2}, \qquad -20 \le t \le 20.$$

b) Describir la gráfica y confirmar la respuesta en forma analítica.

c) Analizar la velocidad a la cual se traza la curva cuando t aumenta de -20 a 20.

102. ***Tractriz*** Una persona se mueve desde el origen a lo largo del eje y positivo tirando un peso atado al extremo de una cuerda de 12 metros de largo. Inicialmente, el peso está situado en el punto $(12, 0)$.

a) En el ejercicio 96 de la sección 8.7 se mostró que la trayectoria del peso se describe mediante la siguiente ecuación rectangular

$$y = -12 \ln\left(\frac{12 - \sqrt{144 - x^2}}{x}\right) - \sqrt{144 - x^2}$$

donde $0 < x \le 12$. Usar una herramienta de graficación para representar la ecuación rectangular.

b) Usar una herramienta de graficación para trazar la gráfica de las ecuaciones paramétricas

$$x = 12 \operatorname{sech} \frac{t}{12} \quad \text{y} \quad y = t - 12 \tanh \frac{t}{12}$$

donde $t \ge 0$. Comparar esta gráfica con la del inciso *a*). ¿Qué gráfica (si hay alguna) representa mejor la trayectoria?

c) Emplear las ecuaciones paramétricas de la tractriz para verificar que la distancia de la intersección con el eje y de la recta tangente al punto de tangencia es independiente de la ubicación del punto de tangencia.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 103 y 104, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.**

103. Si $x = f(t)$ y $y = g(t)$, entonces $d^2y/dx^2 = g''(t)/f''(t)$.

104. La curva dada por $x = t^3, y = t^2$ tiene una tangente horizontal en el origen puesto que $dy/dt = 0$ cuando $t = 0$.

105. ***Cinta de grabación*** Otro método que se puede usar para solucionar el ejemplo 5 es encontrar el área del carrete con un radio interior de 0.5 pulgadas y un radio exterior de 2 pulgadas, y después usar la fórmula para el área del rectángulo cuyo ancho es de 0.001 pulgadas. Utilizar este método para determinar cuánta cinta se necesita para llenar el carrete.



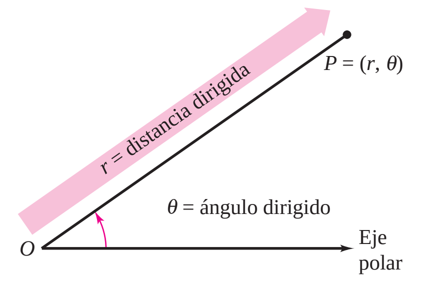
Coordenadas polares y gráficas polares

- Comprender el sistema de coordenadas polares.
- Expresar coordenadas y ecuaciones rectangulares en forma polar y viceversa.
- Trazar la gráfica de una ecuación dada en forma polar.
- Hallar la pendiente de una recta tangente a una gráfica polar.
- Identificar diversos tipos de gráficas polares especiales.

Coordenadas polares

Hasta ahora las gráficas se han venido representando como colecciones de puntos (x, y) en el sistema de coordenadas rectangulares. Las ecuaciones correspondientes a estas gráficas han estado en forma rectangular o en forma paramétrica. En esta sección se estudiará un sistema de coordenadas denominado **sistema de coordenadas polares**.

Para formar el sistema de coordenadas polares en el plano, se fija un punto O, llamado **polo** (u **origen**), y a partir de O se traza un rayo inicial llamado **eje polar**, como se muestra en la figura 10.36. A continuación, a cada punto P en el plano se le asignan **coordenadas polares** (r, θ), como sigue.



Coordenadas polares
Figura 10.36

$r =$ *distancia dirigida* de O a P

$\theta =$ *ángulo dirigido*, en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el eje polar hasta el segmento $\overline{OP}$

La figura 10.37 muestra tres puntos en el sistema de coordenadas polares. Obsérvese que en este sistema es conveniente localizar los puntos con respecto a una retícula de circunferencias concéntricas cortadas por **rectas radiales** que pasan por el polo.

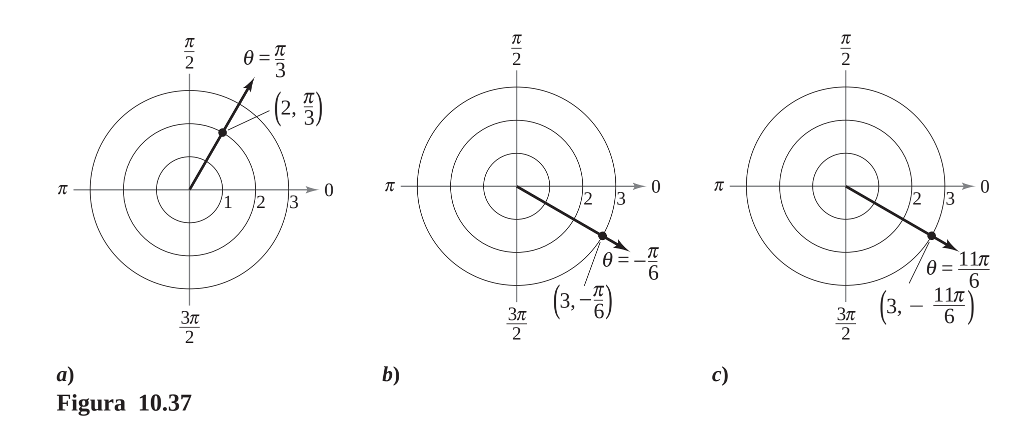


Figura 10.37

En coordenadas rectangulares, cada punto (x, y) tiene una representación única. Esto no sucede con las coordenadas polares. Por ejemplo, las coordenadas (r, θ) y $(r, 2\pi + \theta)$ representan el mismo punto [ver los incisos *b*) y *c*) de la figura 10.37]. También, como r es una *distancia dirigida*, las coordenadas (r, θ) y $(-r, \theta + \pi)$ representan el mismo punto. En general, el punto (r, θ) puede expresarse como

$$(r, \theta) = (r, \theta + 2n\pi)$$

o

$$(r, \theta) = (-r, \theta + (2n + 1)\pi)$$

donde n es cualquier entero. Además, el polo está representado por $(0, \theta)$, donde θ es cualquier ángulo.

COORDENADAS POLARES

El matemático al que se le atribuye haber usado por primera vez las coordenadas polares es James Bernoulli, quien las introdujo en 1691. Sin embargo, ciertas evidencias señalan la posibilidad de que fuera Isaac Newton el primero en usarlas.

Transformación (o cambio) de coordenadas

Relación entre coordenadas polares y rectangulares
Figura 10.38

Para establecer una relación entre coordenadas polares y rectangulares, se hace coincidir el eje polar con el eje x positivo y el polo con el origen, como se ilustra en la figura 10.38. Puesto que (x, y) se encuentra en un círculo de radio r, se sigue que $r^2 = x^2 + y^2$. Para $r > 0$, la definición de las funciones trigonométricas implica que

$$\tan\theta = \frac{y}{x}, \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}.$$

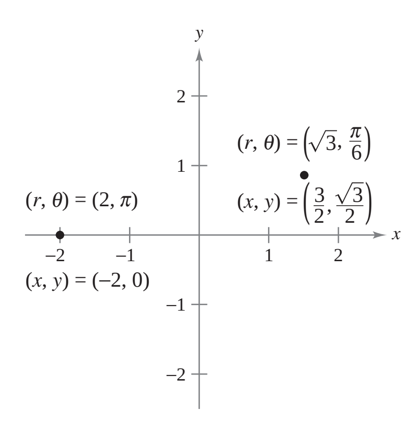
Si $r < 0$, estas relaciones también son válidas, como se puede verificar.

TEOREMA 10.10 TRANSFORMACIÓN (O CAMBIO) DE COORDENADAS

Las coordenadas polares (r, θ) de un punto están relacionadas con las coordenadas rectangulares (x, y) de ese punto como sigue.

1. $x = r\cos\theta$ $y = r\operatorname{sen}\theta$

2. $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ $r^2 = x^2 + y^2$



Para pasar de coordenadas polares a rectangulares, se hace $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$.
Figura 10.39

EJEMPLO 1 Transformación (o cambio) de coordenadas polares a rectangulares

a) Dado el punto $(r, \theta) = (2, \pi)$,

$$x = r\cos\theta = 2\cos\pi = -2 \qquad \text{y} \qquad y = r\operatorname{sen}\theta = 2\operatorname{sen}\pi = 0.$$

Por tanto, las coordenadas rectangulares son $(x, y) = (-2, 0)$.

b) Dado el punto $(r, \theta) = (\sqrt{3}, \pi/6)$,

$$x = \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2} \qquad \text{y} \qquad y = \sqrt{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Por tanto, las coordenadas rectangulares son $(x, y) = (3/2, \sqrt{3}/2)$.

Ver la figura 10.39.

EJEMPLO 2 Transformación (o cambio) de coordenadas rectangulares a polares

a) Dado el punto del segundo cuadrante $(x, y) = (-1, 1)$,

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = -1 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{3\pi}{4}.$$

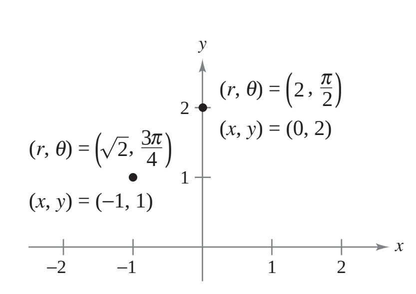
Como θ se eligió en el mismo cuadrante que (x, y), se debe usar un valor positivo para r.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

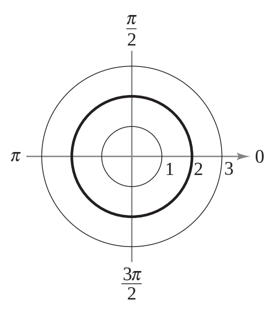
Esto implica que *un* conjunto de coordenadas polares es $(r, \theta) = (\sqrt{2}, 3\pi/4)$.

b) Dado que el punto $(x, y) = (0, 2)$ se encuentra en el eje y positivo, se elige $\theta = \pi/2$ y $r = 2$, y un conjunto de coordenadas polares es $(r, \theta) = (2, \pi/2)$.

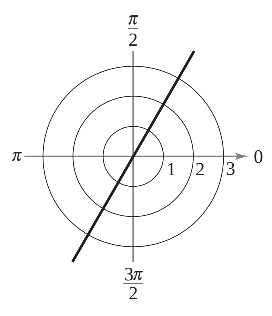
Ver la figura 10.40.



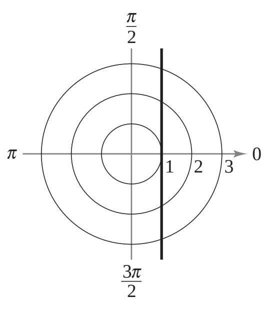
Para pasar de coordenadas rectangulares a polares, se toma $\tan\theta = y/x$ y $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
Figura 10.40



a) Círculo: $r = 2$



b) Recta radial: $\theta = \frac{\pi}{3}$



c) Recta vertical: $r = \sec\theta$
Figura 10.41

Gráficas polares

Una manera de trazar la gráfica de una ecuación polar consiste en transformarla a coordenadas rectangulares para luego trazar la gráfica de la ecuación rectangular.

EJEMPLO 3 Trazado de ecuaciones polares

Describir la gráfica de cada ecuación polar. Confirmar cada descripción transformando la ecuación a ecuación rectangular.

a) $r = 2$ ***b)*** $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ ***c)*** $r = \sec\theta$

Solución

a) La gráfica de la ecuación polar $r = 2$ consta de todos los puntos que se encuentran a dos unidades del polo. En otras palabras, esta gráfica es la circunferencia que tiene su centro en el origen y radio 2. (Ver la figura 10.41*a*.) Esto se puede confirmar utilizando la relación $r^2 = x^2 + y^2$ para obtener la ecuación rectangular

$$x^2 + y^2 = 2^2. \qquad \text{Ecuación rectangular.}$$

b) La gráfica de la ecuación polar $\theta = \pi/3$ consta de todos los puntos sobre la semirrecta que forma un ángulo de $\pi/3$ con el semieje x positivo. (Ver la figura 10.41*b*.) Para confirmar esto, se puede utilizar la relación $\tan\theta = y/x$ para obtener la ecuación rectangular

$$y = \sqrt{3}\,x. \qquad \text{Ecuación rectangular.}$$

c) La gráfica de la ecuación polar $r = \sec\theta$ no resulta evidente por inspección simple, por lo que hay que empezar por pasarla a la forma rectangular mediante la relación $r\cos\theta = x$.

$$r = \sec\theta \qquad \text{Ecuación polar.}$$
$$r\cos\theta = 1$$
$$x = 1 \qquad \text{Ecuación rectangular.}$$

Por la ecuación rectangular se puede ver que la gráfica es una recta vertical. (Ver la figura 10.41*c*.)

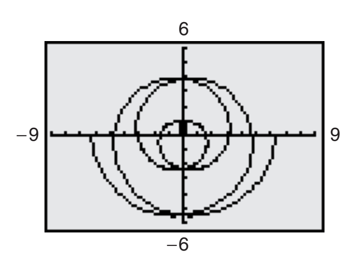
TECNOLOGÍA Dibujar *a mano* las gráficas de ecuaciones polares complicadas puede ser tedioso. Sin embargo, con el empleo de la tecnología, la tarea no es difícil. Si la herramienta de graficación que se emplea cuenta con modo *polar*, usarlo para trazar la gráfica de las ecuaciones de la serie de ejercicios. Si la herramienta de graficación no cuenta con modo *polar*, pero sí con modo *paramétrico*, se puede trazar la gráfica de $r = f(\theta)$ expresando la ecuación como

$$x = f(\theta)\cos\theta$$
$$y = f(\theta)\,\text{sen}\,\theta.$$

Por ejemplo, la gráfica de $r = \frac{1}{2}\theta$ que se muestra en la figura 10.42 se generó con una herramienta de graficación en modo *paramétrico*. La gráfica de la ecuación se obtuvo usando las ecuaciones paramétricas

$$x = \frac{1}{2}\theta\cos\theta$$
$$y = \frac{1}{2}\theta\,\text{sen}\,\theta$$

con valores de θ que van desde -4π hasta 4π. Esta curva es de la forma $r = a\theta$ y se denomina **espiral de Arquímedes**.



Espiral de Arquímedes
Figura 10.42

NOTA Una forma de bosquejar la gráfica de $r = 2\cos 3\theta$ a mano, es elaborar una tabla de valores.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
r	2	0	-2	0	2

Si se amplía la tabla y se representan los puntos gráficamente se obtiene la curva mostrada en el ejemplo 4. ■

EJEMPLO 4 Trazado de una gráfica polar

Dibujar la gráfica de $r = 2\cos 3\theta$.

Solución Para empezar, se expresa la ecuación polar en forma paramétrica.

$$x = 2\cos 3\theta \cos\theta \qquad \text{y} \qquad y = 2\cos 3\theta \operatorname{sen}\theta$$

Tras experimentar un poco, se encuentra que la curva completa, la cual se llama **curva rosa**, puede dibujarse haciendo variar a θ desde 0 hasta π, como se muestra en la figura 10.43. Si se traza la gráfica con una herramienta de graficación, se verá que haciendo variar a θ desde 0 hasta 2π, se traza la curva entera *dos veces*.

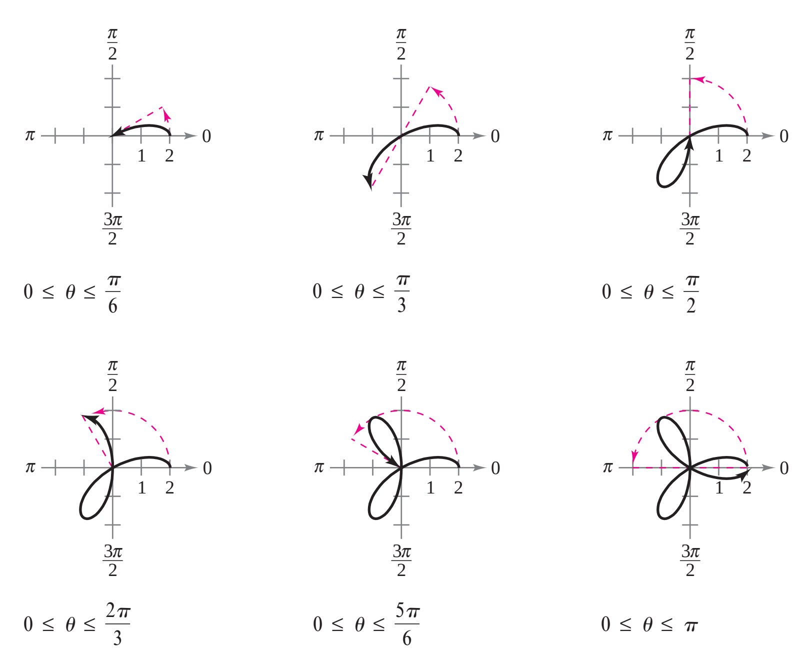
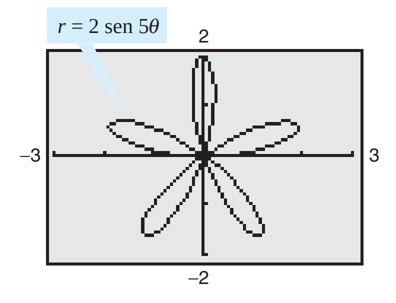
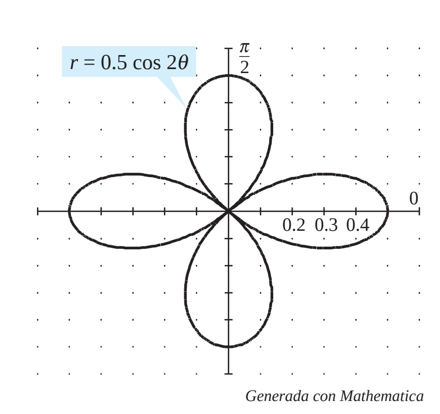


Figura 10.43

Usar una herramienta de graficación para experimentar con otras curvas rosa (estas curvas son de la forma $r = a\cos n\theta$ o $r = a\operatorname{sen} n\theta$). Por ejemplo, las curvas que se muestran en la figura 10.44 son otros dos tipos de curvas rosa.





Generada con Mathematica

Curvas rosa
Figura 10.44

Pendiente y rectas tangentes

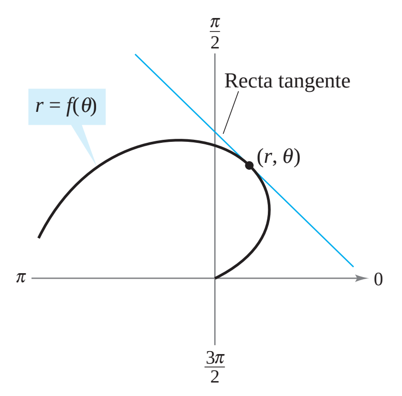
Para encontrar la pendiente de una recta tangente a una gráfica polar, considerar una función diferenciable (o derivable) $r = f(\theta)$. Para encontrar la pendiente en forma polar, se usan las ecuaciones paramétricas

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \quad \text{y} \quad y = r\,\text{sen}\,\theta = f(\theta)\,\text{sen}\,\theta.$$

Mediante el uso de la forma paramétrica de dy/dx dada en el teorema 10.7, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{f(\theta)\cos\theta + f'(\theta)\,\text{sen}\,\theta}{-f(\theta)\,\text{sen}\,\theta + f'(\theta)\cos\theta}$$

con lo cual se establece el teorema siguiente.



Recta tangente a una curva polar
Figura 10.45

TEOREMA 10.11 PENDIENTE EN FORMA POLAR

Si f es una función diferenciable (o derivable) de θ, entonces la *pendiente* de la recta tangente a la gráfica de $r = f(\theta)$ en el punto (r, θ) es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{f(\theta)\cos\theta + f'(\theta)\,\text{sen}\,\theta}{-f(\theta)\,\text{sen}\,\theta + f'(\theta)\cos\theta}$$

siempre que $dx/d\theta \neq 0$ en (r, θ). (Ver la figura 10.45.)

En el teorema 10.11 se pueden hacer las observaciones siguientes.

1. Las soluciones $\dfrac{dy}{d\theta} = 0$ dan una tangente horizontal, siempre que $\dfrac{dx}{d\theta} \neq 0$.

2. Las soluciones $\dfrac{dx}{d\theta} = 0$ dan una tangente vertical, siempre que $\dfrac{dy}{d\theta} \neq 0$.

Si $dy/d\theta$ y $dx/d\theta$ *simultáneamente* son 0, no se puede extraer ninguna conclusión respecto a las rectas tangentes.

EJEMPLO 5 Hallar las rectas tangentes horizontales y verticales

Hallar las rectas tangentes horizontales y verticales a $r = \text{sen}\,\theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

Solución Para empezar se expresa la ecuación en forma paramétrica.

$$x = r\cos\theta = \text{sen}\,\theta\cos\theta$$

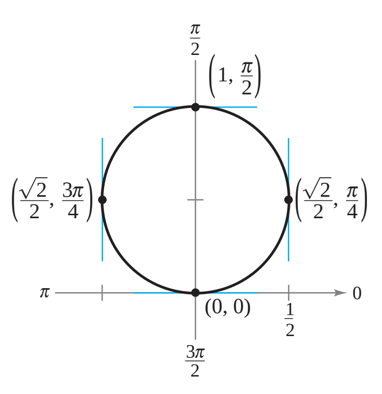
y

$$y = r\,\text{sen}\,\theta = \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\theta = \text{sen}^2\,\theta$$

Después, se derivan x y y con respecto de θ y se iguala a 0 cada una de las derivadas.

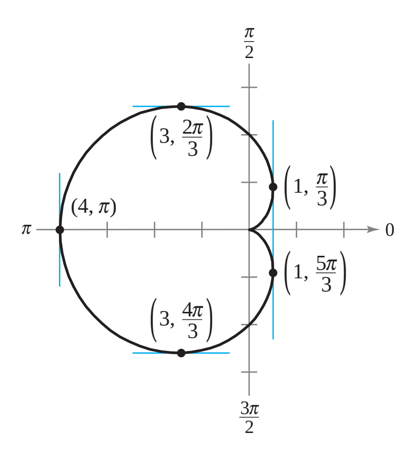
$$\frac{dx}{d\theta} = \cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta = \cos 2\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta = \text{sen}\,2\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0, \frac{\pi}{2}$$



Rectas tangentes horizontales y verticales a $r = \text{sen}\,\theta$
Figura 10.46

Por tanto, la gráfica tiene rectas tangentes verticales en $\left(\sqrt{2}/2, \pi/4\right)$ y $\left(\sqrt{2}/2, 3\pi/4\right)$, y tiene rectas tangentes horizontales en $(0, 0)$ y $(1, \pi/2)$, como se muestra en la figura 10.46.



Rectas tangentes horizontales y verticales de $r = 2(1 - \cos\theta)$
Figura 10.47

EJEMPLO 6 Hallar las rectas tangentes horizontales y verticales

Hallar las rectas tangentes horizontales y verticales a la gráfica de $r = 2(1 - \cos\theta)$.

Solución Se usa $y = r \operatorname{sen}\theta$, se deriva y $dy/d\theta$ se iguala a 0.

$$y = r \operatorname{sen}\theta = 2(1 - \cos\theta)\operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 2[(1 - \cos\theta)(\cos\theta) + \operatorname{sen}\theta(\operatorname{sen}\theta)]$$

$$= -2(2\cos\theta + 1)(\cos\theta - 1) = 0$$

Por tanto, $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ y $\cos\theta = 1$, y se concluye que $dy/d\theta = 0$ cuando $\theta = 2\pi/3$, $4\pi/3$ y 0. De manera semejante, al emplear $x = r\cos\theta$, se tiene

$$x = r\cos\theta = 2\cos\theta - 2\cos^2\theta$$

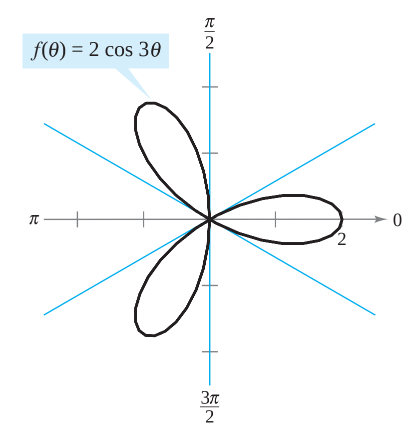
$$\frac{dx}{d\theta} = -2\operatorname{sen}\theta + 4\cos\theta\operatorname{sen}\theta = 2\operatorname{sen}\theta(2\cos\theta - 1) = 0.$$

Por tanto, $\operatorname{sen}\theta = 0$ o $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, y se concluye que $dy/d\theta = 0$ cuando $\theta = 0$, π, $\pi/3$ y $5\pi/3$. A partir de estos resultados y de la gráfica que se presenta en la figura 10.47, se concluye que la gráfica tiene tangentes horizontales en $(3, 2\pi/3)$ y $(3, 4\pi/3)$, y tangentes verticales en $(1, \pi/3)$, $(1, 5\pi/3)$ y $(4, \pi)$. A esta gráfica se le llama **cardioide**. Obsérvese que cuando $\theta = 0$ ambas derivadas ($dy/d\theta$ y $dx/d\theta$) son cero (es decir, se anulan). Sin embargo, esta única información no permite saber si la gráfica tiene una recta tangente horizontal o vertical en el polo. Pero a partir de la figura 10.47 se puede observar que la gráfica tiene una cúspide (o punto anguloso o cuspidal) en el polo.

El teorema 10.11 tiene una consecuencia importante. Supóngase que la gráfica de $r = f(\theta)$ pasa por el polo cuando $\theta = \alpha$ y $f'(\alpha) \neq 0$. Entonces la fórmula para dy/dx se simplifica como sigue.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(\alpha)\operatorname{sen}\alpha + f(\alpha)\cos\alpha}{f'(\alpha)\cos\alpha - f(\alpha)\operatorname{sen}\alpha} = \frac{f'(\alpha)\operatorname{sen}\alpha + 0}{f'(\alpha)\cos\alpha - 0} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

Por tanto, la recta $\theta = \alpha$ es tangente a la gráfica en el polo, $(0, \alpha)$.



Esta curva rosa tiene, en el polo, tres rectas tangentes ($\theta = \pi/6$, $\theta = \pi/2$ y $\theta = 5\pi/6$)
Figura 10.48

TEOREMA 10.12 RECTAS TANGENTES EN EL POLO

Si $f(\alpha) = 0$ y $f'(\alpha) \neq 0$, entonces la recta $\theta = \alpha$ es tangente a la gráfica de $r = f(\theta)$ en el polo.

El teorema 10.12 es útil porque establece que los ceros de $r = f(\theta)$ pueden usarse para encontrar las rectas tangentes en el polo. Obsérvese que, puesto que una curva polar puede cruzar el polo más de una vez, en el polo puede haber más de una recta tangente. Por ejemplo, la curva rosa

$$f(\theta) = 2\cos 3\theta$$

tiene tres rectas tangentes en el polo, como se ilustra en la figura 10.48. En esta curva, $f(\theta) = 2\cos 3\theta$ es 0 cuando θ es $\pi/6$, $\pi/2$, y $5\pi/6$. La derivada $f'(\theta) = -6\operatorname{sen}\theta$ no es 0 en estos valores de θ.

Gráficas polares especiales

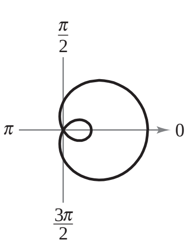
Varios tipos importantes de gráficas tienen ecuaciones que son más simples en forma polar que en forma rectangular. Por ejemplo, la ecuación polar de un círculo de radio a y centro en el origen es simplemente $r = a$. Más adelante se verán las ventajas que esto tiene. Por ahora, se muestran abajo algunos tipos de gráficas cuyas ecuaciones son más simples en forma polar. (Las cónicas se abordan en la sección 10.6.)

Caracoles

$r = a \pm b \cos \theta$

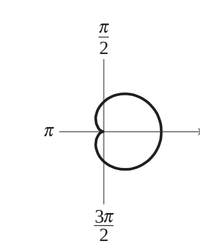
$r = a \pm b \operatorname{sen} \theta$

$(a > 0, b > 0)$



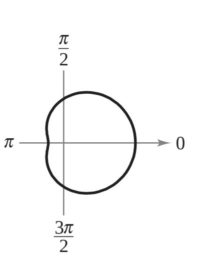
$\frac{a}{b} < 1$

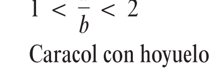
Caracol con lazo interior



$\frac{a}{b} = 1$

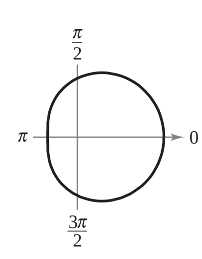
Cardioide (forma de corazón)





$1 < \frac{a}{b} < 2$

Caracol con hoyuelo



$\frac{a}{b} \geq 2$

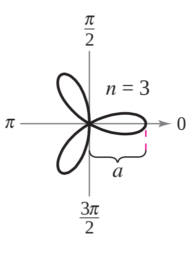
Caracol convexo

Curvas rosa

n pétalos si n es impar

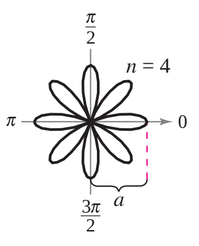
$2n$ pétalos si n es par

$(n \geq 2)$



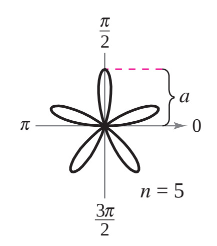
$r = a \cos n\theta$

Curva rosa



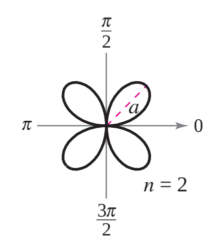
$r = a \cos n\theta$

Curva rosa



$r = a \operatorname{sen} n\theta$

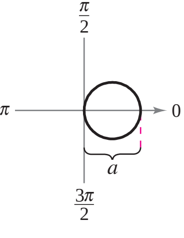
Curva rosa



$r = a \operatorname{sen} n\theta$

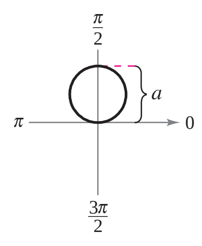
Curva rosa

Círculos y lemniscatas



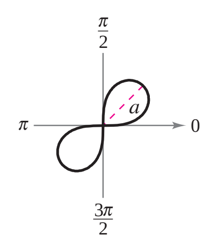
$r = a \cos \theta$

Círculo



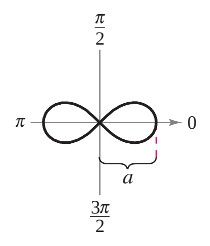
$r = a \operatorname{sen} \theta$

Círculo



$r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$

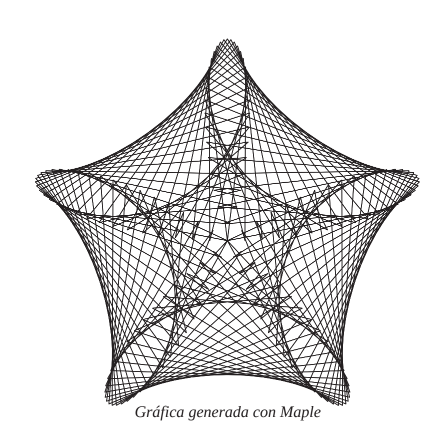
Lemniscata



$r^2 = a^2 \cos 2\theta$

Lemniscata

TECNOLOGÍA Las curvas rosa descritas arriba son de la forma $r = a \cos n\theta$ o $r = a \operatorname{sen} n\theta$, donde n es un entero positivo mayor o igual a 2. Usar una herramienta de graficación para trazar las gráficas de $r = a \cos n\theta$ o $r = a \operatorname{sen} n\theta$ con valores no enteros de n. ¿Son estas gráficas también curvas rosa? Por ejemplo, trazar la gráfica de $r = \cos \frac{2}{3}\theta$, $0 \leq \theta \leq 6\pi$.



Gráfica generada con Maple

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre curvas rosa y otras curvas relacionadas con ellas, ver el artículo "A Rose is a Rose..." de Peter M. Maurer en *The American Mathematical Monthly*. La gráfica generada por computadora que se observa al lado izquierdo, es resultado de un algoritmo que Maurer llama "La rosa".

10.4 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, representar gráficamente el punto dado en coordenadas polares y hallar las coordenadas rectangulares correspondientes.

1. $(8, \pi/2)$ **2.** $(-2, 5\pi/3)$

3. $(-4, -3\pi/4)$ **4.** $(0, -7\pi/6)$

5. $(\sqrt{2}, 2.36)$ **6.** $(-3, -1.57)$

En los ejercicios 7 a 10, emplear la función *ángulo* de una herramienta de graficación para encontrar las coordenadas rectangulares del punto dado en coordenadas polares. Representar gráficamente el punto.

7. $(7, 5\pi/4)$ **8.** $(-2, 11\pi/6)$

9. $(-4.5, 3.5)$ **10.** $(9.25, 1.2)$

En los ejercicios 11 a 16, se dan las coordenadas rectangulares de un punto. Localizar gráficamente el punto y hallar *dos* conjuntos de coordenadas polares del punto con $0 \leq \theta < 2\pi$.

11. $(2, 2)$ **12.** $(0, -6)$

13. $(-3, 4)$ **14.** $(4, -2)$

15. $(-1, -\sqrt{3})$ **16.** $(3, -\sqrt{3})$



En los ejercicios 17 a 20, emplear la función *ángulo* de una herramienta de graficación para hallar un conjunto de coordenadas polares del punto dado en coordenadas rectangulares.

17. $(3, -2)$ **18.** $(3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$

19. $\left(\frac{7}{4}, \frac{5}{2}\right)$ **20.** $(0, -5)$

21. Represente gráficamente el punto (4, 3.5) si el punto está dado *a*) en coordenadas rectangulares y *b*) en coordenadas polares.



22. ***Razonamiento gráfico***

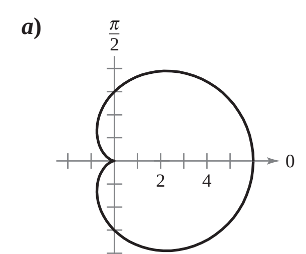
a) En una herramienta de graficación, seleccionar formato de ventana para coordenadas polares y colocar el cursor en cualquier posición fuera de los ejes. Mover el cursor en sentido horizontal y en sentido vertical. Describir todo cambio en las coordenadas de los puntos.

b) En una herramienta de graficación, seleccionar el formato de ventana para coordenadas polares y colocar el cursor en cualquier posición fuera de los ejes. Mover el cursor en sentido horizontal y en sentido vertical. Describir todo cambio en las coordenadas de los puntos.

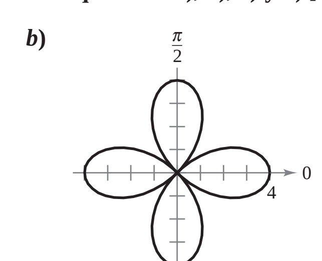
c) ¿Por qué difieren los resultados obtenidos en los incisos *a*) y *b*)?

En los ejercicios 23 a 26, hacer que corresponda la gráfica con su ecuación polar. [Las gráficas están etiquetadas *a*), *b*), *c*) y *d*).]

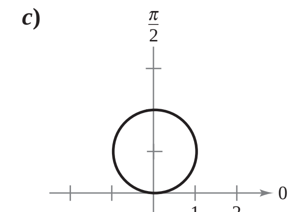
a)



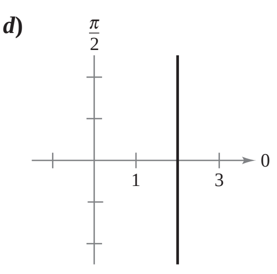
b)



c)



d)



23. $r = 2 \operatorname{sen} \theta$ **24.** $r = 4 \cos 2\theta$

25. $r = 3(1 + \cos \theta)$ **26.** $r = 2 \sec \theta$

En los ejercicios 27 a 36, transformar la ecuación rectangular a la forma polar y trazar su gráfica.

27. $x^2 + y^2 = 9$ **28.** $x^2 - y^2 = 9$

29. $x^2 + y^2 = a^2$ **30.** $x^2 + y^2 - 2ax = 0$

31. $y = 8$ **32.** $x = 10$

33. $3x - y + 2 = 0$

34. $xy = 4$

35. $y^2 = 9x$

36. $(x^2 + y^2)^2 - 9(x^2 - y^2) = 0$

En los ejercicios 37 a 46, pasar la ecuación polar a la forma rectangular y trazar su gráfica.

37. $r = 4$ **38.** $r = -5$

39. $r = \operatorname{sen} \theta$ **40.** $r = 5 \cos \theta$

41. $r = \theta$ **42.** $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$

43. $r = 3 \sec \theta$ **44.** $r = 2 \csc \theta$

45. $r = \sec \theta \tan \theta$ **46.** $r = \cot \theta \csc \theta$

En los ejercicios 47 a 56, emplear una herramienta de graficación para representar la ecuación polar. Hallar un intervalo para θ en el que la gráfica se trace *sólo una vez*.

47. $r = 2 - 5 \cos \theta$ **48.** $r = 3(1 - 4 \operatorname{sen} \theta)$

49. $r = 2 + \operatorname{sen} \theta$ **50.** $r = 4 + 3 \cos \theta$

51. $r = \dfrac{2}{1 + \cos \theta}$ **52.** $r = \dfrac{2}{4 - 3 \operatorname{sen} \theta}$

53. $r = 2 \cos\left(\dfrac{3\theta}{2}\right)$ **54.** $r = 3\operatorname{sen}\left(\dfrac{5\theta}{2}\right)$

55. $r^2 = 4 \operatorname{sen} 2\theta$ **56.** $r^2 = \dfrac{1}{\theta}$

57. Pasar la ecuación

$$r = 2(h \cos \theta + k \operatorname{sen} \theta)$$

a la forma rectangular y verificar que sea la ecuación de un círculo. Hallar el radio y las coordenadas rectangulares de su centro.

58. *Fórmula para la distancia*

a) Verificar que la fórmula para la distancia entre dos puntos (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2) dados en coordenadas polares es

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}.$$

b) Describir las posiciones de los puntos, en relación uno con otro, si $\theta_1 = \theta_2$. Simplificar la fórmula de la distancia para este caso. ¿Es la simplificación lo que se esperaba? Explicar por qué.

c) Simplificar la fórmula de la distancia si $\theta_1 - \theta_2 = 90°$. ¿Es la simplificación lo que se esperaba? Explicar por qué.

d) Elegir dos puntos en el sistema de coordenadas polares y encontrar la distancia entre ellos. Luego elegir representaciones polares diferentes para los mismos dos puntos y aplicar la fórmula para la distancia. Analizar el resultado.

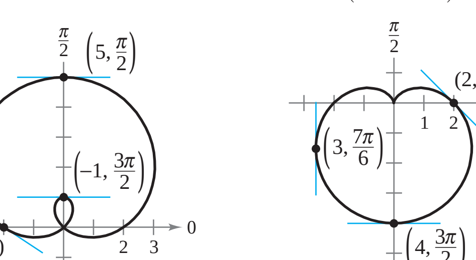
En los ejercicios 59 a 62, usar el resultado del ejercicio 58 para aproximar la distancia entre los dos puntos descritos en coordenadas polares.

59. $\left(1, \frac{5\pi}{6}\right), \quad \left(4, \frac{\pi}{3}\right)$ **60.** $\left(8, \frac{7\pi}{4}\right), \quad (5, \pi)$

61. $(2, 0.5), \quad (7, 1.2)$ **62.** $(4, 2.5), \quad (12, 1)$

En los ejercicios 63 y 64, hallar dy/dx y las pendientes de las rectas tangentes que se muestran en las gráficas de las ecuaciones polares.

63. $r = 2 + 3\,\text{sen}\,\theta$ **64.** $r = 2(1 - \text{sen}\,\theta)$





En los ejercicios 65 a 68, usar una herramienta de graficación y *a*) trazar la gráfica de la ecuación polar, *b*) dibujar la recta tangente en el valor dado de θ y *c*) hallar dy/dx en el valor dado de θ. (*Sugerencia:* Tomar incrementos de θ iguales a $\pi/24$.)

65. $r = 3(1 - \cos\theta),\ \theta = \frac{\pi}{2}$ **66.** $r = 3 - 2\cos\theta,\ \theta = 0$

67. $r = 3\,\text{sen}\,\theta,\ \theta = \frac{\pi}{3}$ **68.** $r = 4,\ \theta = \frac{\pi}{4}$

En los ejercicios 69 y 70, hallar los puntos de tangencia horizontal y vertical (si los hay) a la curva polar.

69. $r = 1 - \text{sen}\,\theta$ **70.** $r = a\,\text{sen}\,\theta$

En los ejercicios 71 y 72, hallar los puntos de tangencia horizontal (si los hay) a la curva polar.

71. $r = 2\csc\theta + 3$ **72.** $r = a\,\text{sen}\,\theta\cos^2\theta$



En los ejercicios 73 a 76, usar una herramienta de graficación para representar la ecuación polar y hallar todos los puntos de tangencia horizontal.

73. $r = 4\,\text{sen}\,\theta\cos^2\theta$ **74.** $r = 3\cos 2\theta\sec\theta$

75. $r = 2\csc\theta + 5$ **76.** $r = 2\cos(3\theta - 2)$

En los ejercicios 77 a 84, dibujar la gráfica de la ecuación polar y hallar las tangentes en el polo.

77. $r = 3\,\text{sen}\,\theta$ **78.** $r = 5\cos\theta$

79. $r = 2(1 - \text{sen}\,\theta)$ **80.** $r = 3(1 - \cos\theta)$

81. $r = 2\cos 3\theta$ **82.** $r = -\text{sen}\,5\theta$

83. $r = 3\,\text{sen}\,2\theta$ **84.** $r = 3\cos 2\theta$

En los ejercicios 85 a 96, trazar la gráfica de la ecuación polar.

85. $r = 8$ **86.** $r = 1$

87. $r = 4(1 + \cos\theta)$ **88.** $r = 1 + \text{sen}\,\theta$

89. $r = 3 - 2\cos\theta$ **90.** $r = 5 - 4\,\text{sen}\,\theta$

91. $r = 3\csc\theta$ **92.** $r = \dfrac{6}{2\,\text{sen}\,\theta - 3\cos\theta}$

93. $r = 2\theta$ **94.** $r = \dfrac{1}{\theta}$

95. $r^2 = 4\cos 2\theta$ **96.** $r^2 = 4\,\text{sen}\,\theta$

En los ejercicios 97 a 100, usar una herramienta de graficación para representar la ecuación y mostrar que la recta dada es una asíntota de la gráfica.

	Nombre de la gráfica	*Ecuación polar*	*Asíntota*
97.	Concoide	$r = 2 - \sec\theta$	$x = -1$
98.	Concoide	$r = 2 + \csc\theta$	$y = 1$
99.	Espiral hiperbólica	$r = 2/\theta$	$y = 2$
100.	Estrofoide	$r = 2\cos 2\theta\sec\theta$	$x = -2$

Desarrollo de conceptos

101. Describir las diferencias entre el sistema de coordenadas rectangulares y el sistema de coordenadas polares.

102. Dar las ecuaciones para pasar de coordenadas rectangulares a coordenadas polares y viceversa.

103. ¿Cómo se determinan las pendientes de rectas tangentes en coordenadas polares? ¿Qué son las rectas tangentes en el polo y cómo se determinan?

Para discusión

104. Describir las gráficas de las siguientes ecuaciones polares.

a) $r = 7$ *b*) $r^2 = 7$

c) $r = \dfrac{7}{\cos\theta}$ *d*) $r = \dfrac{7}{\text{sen}\,\theta}$

e) $r = 7\cos\theta$ *f*) $r = 7\,\text{sen}\,\theta$

105. Trazar la gráfica de $r = 4\,\text{sen}\,\theta$ en el intervalo dado.

a) $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ *b*) $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$ *c*) $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$



106. *Para pensar* Utilizar una herramienta graficadora para representar la ecuación polar $r = 6[1 + \cos(\theta - \phi)]$ para *a*) $\phi = 0$, *b*) $\phi = \pi/4$ y *c*) $\phi = \pi/2$. Usar las gráficas para describir el efecto del ángulo ϕ. Escribir la ecuación como función de $\text{sen}\,\theta$ para el inciso *c*).

107. Verificar que si la curva correspondiente a la ecuación polar $r = f(\theta)$ gira un ángulo ϕ, alrededor del polo, entonces la ecuación de la curva girada es $r = f(\theta - \phi)$.

108. La forma polar de una ecuación de una curva es $r = f(\operatorname{sen}\theta)$. Comprobar que la forma se convierte en

a) $r = f(-\cos\theta)$ si la curva gira $\pi/2$ radianes alrededor del polo en sentido contrario a las manecillas del reloj.

b) $r = f(-\operatorname{sen}\theta)$ si la curva gira π radianes alrededor del polo en sentido contrario a las manecillas del reloj.

c) $r = f(\cos\theta)$ si la curva gira $3\pi/2$ radianes alrededor del polo en sentido contrario a las manecillas del reloj.

En los ejercicios 109 a 112, usar los resultados de los ejercicios 107 y 108.


109. Dar la ecuación del caracol $r = 2 - \operatorname{sen}\theta$ después de girar la cantidad indicada. Utilizar una herramienta de graficación para representar el giro del caracol.

a) $\dfrac{\pi}{4}$ *b*) $\dfrac{\pi}{2}$ *c*) π *d*) $\dfrac{3\pi}{2}$

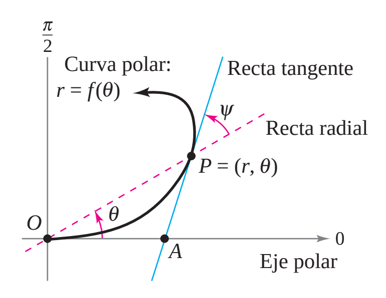

110. Dar una ecuación para la curva rosa $r = 2\operatorname{sen}2\theta$ después de girar la cantidad dada. Verificar los resultados usando una herramienta de graficación para representar el giro de la curva rosa.

a) $\dfrac{\pi}{6}$ *b*) $\dfrac{\pi}{2}$ *c*) $\dfrac{2\pi}{3}$ *d*) π

111. Dibujar la gráfica de cada ecuación.

a) $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$ *b*) $r = 1 - \operatorname{sen}\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$

112. Demostrar que la tangente del ángulo $\psi = 0 \leq \psi \leq \pi/2$) entre la recta radial y la recta tangente en el punto (r, θ) en la gráfica de $r = f(\theta)$ (ver la figura) está dada por $\tan\psi = |r/(dr/d\theta)|$.



En los ejercicios 113 a 118, usar los resultados del ejercicio 112 para hallar el ángulo ψ entre las rectas radial y tangente a la gráfica en el valor indicado de θ. Usar una herramienta de graficación para representar la ecuación polar, de la recta radial y la recta tangente en el valor indicado de θ. Identificar el ángulo ψ.

	Ecuación polar	*Valor de θ*
113.	$r = 2(1 - \cos\theta)$	$\theta = \pi$
114.	$r = 3(1 - \cos\theta)$	$\theta = 3\pi/4$
115.	$r = 2\cos 3\theta$	$\theta = \pi/4$
116.	$r = 4\operatorname{sen}2\theta$	$\theta = \pi/6$
117.	$r = \dfrac{6}{1 - \cos\theta}$	$\theta = 2\pi/3$
118.	$r = 5$	$\theta = \pi/6$

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 119 a 122, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que muestre que es falsa.**

119. Si (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2) representan el mismo punto en el sistema de coordenadas polares, entonces $|r_1| = |r_2|$.

120. Si (r, θ_1) y (r, θ_2) representan el mismo punto en el sistema de coordenadas polares, entonces $\theta_1 = \theta_2 + 2\pi n$ para algún entero n.

121. Si $x > 0$, entonces el punto (x, y) en el sistema de coordenadas rectangulares (o cartesianas) puede representarse mediante (r, θ) en el sistema de coordenadas polares, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\theta = \arctan(y/x)$.

122. Las ecuaciones polares $r = \operatorname{sen}2\theta$ y $r = -\operatorname{sen}2\theta$ tienen la misma gráfica.

PROYECTO DE TRABAJO

Arte anamórfico

El arte anamórfico parece distorsionado, pero cuando se ve desde un particular punto de vista o con un dispositivo como un espejo parece que está normal. Usar las siguientes transformaciones anamórficas

$$r = y + 16 \quad \text{y} \quad \theta = -\frac{\pi}{8}x, \quad -\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$$

para dibujar la imagen polar transformada de la gráfica rectangular. Cuando se observa la reflexión (en un espejo cilíndrico centrado en el polo) de una imagen polar desde el eje polar, el espectador ve la imagen rectangular original.

a) $y = 3$ *b*) $x = 2$ *c*) $y = x + 5$ *d*) $x^2 + (y - 5)^2 = 5^2$



Este ejemplo de arte anamórfico es de la Colección Millington-Barnard en la Universidad de Mississippi. Cuando se observa el reflejo de la "pintura polar" transformada en el espejo, el espectador ve el arte distorsionado en sus proporciones adecuadas.

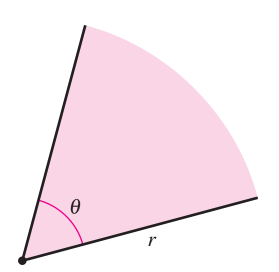
PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre arte anamórfico, consultar al artículo "Anamorphisms" de Philip Hickin en *Mathematical Gazette*.

10.5 Área y longitud de arco en coordenadas polares

- **Hallar el área de una región limitada por una gráfica polar.**
- **Hallar los puntos de intersección de dos gráficas polares.**
- **Hallar la longitud de arco de una gráfica polar.**
- **Hallar el área de una superficie de revolución (forma polar).**

Área de una región polar

El desarrollo de una fórmula para el área de una región polar se asemeja al del área de una región en el sistema de coordenadas rectangulares (o cartesianas), pero en lugar de rectángulos se usan sectores circulares como elementos básicos del área. En la figura 10.49, obsérvese que el área de un sector circular de radio r es $\frac{1}{2}\theta r^2$, siempre que θ esté dado en radianes.



El área de un sector circular es $A = \frac{1}{2}\theta r^2$.
Figura 10.49

Considérese la función dada por $r = f(\theta)$, donde f es continua y no negativa en el intervalo $\alpha \leq \theta \leq \beta$. La región limitada por la gráfica de f y las rectas radiales $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ se muestra en la figura 10.50*a*. Para encontrar el área de esta región, se hace una partición del intervalo $[\alpha, \beta]$ en n subintervalos iguales

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdot \cdot \cdot < \theta_{n-1} < \theta_n = \beta.$$

A continuación, se aproxima el área de la región por medio de la suma de las áreas de los n sectores, como se muestra en la figura 10.50*b*.

$$\text{Radio del } i\text{-ésimo sector} = f(\theta_i)$$

$$\text{Ángulo central del } i\text{-ésimo sector} = \frac{\beta - \alpha}{n} = \Delta\theta$$

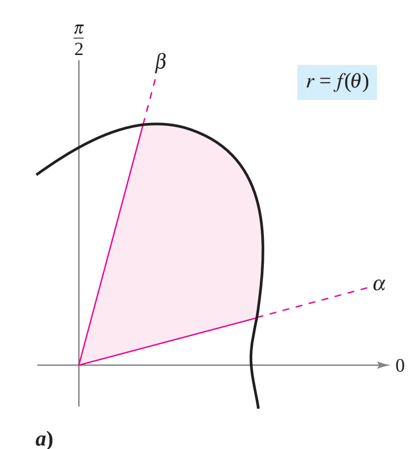
$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right) \Delta\theta [f(\theta_i)]^2$$

Tomando el límite cuando $n \to \infty$ se obtiene

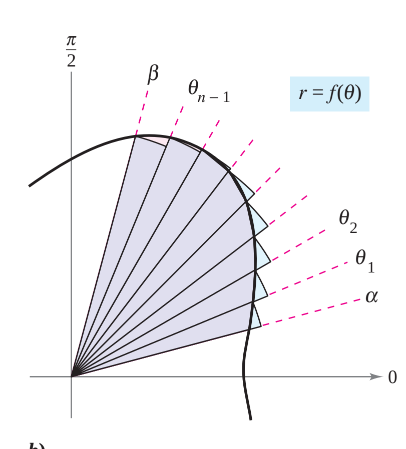
$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} [f(\theta_i)]^2 \Delta\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 \, d\theta$$

lo cual conduce al teorema siguiente.



a)



b)
Figura 10.50

TEOREMA 10.13 ÁREA EN COORDENADAS POLARES

Si f es continua y no negativa en el intervalo $[\alpha, \beta]$, $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$, entonces el área de la región limitada (o acotada) por la gráfica de $r = f(\theta)$ entre las rectas radiales $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ está dada por

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 \, d\theta$$

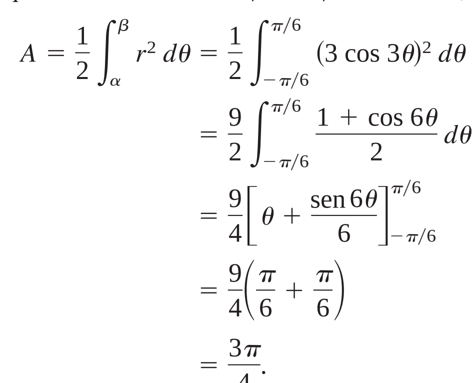
$$= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \, d\theta. \qquad 0 < \beta - \alpha \leq 2\pi.$$

NOTA La misma fórmula se puede usar para hallar el área de una región limitada por la gráfica de una función continua *no positiva*. Sin embargo, la fórmula no es necesariamente válida si f toma valores tanto positivos *como* negativos en el intervalo $[\alpha, \beta]$. ■

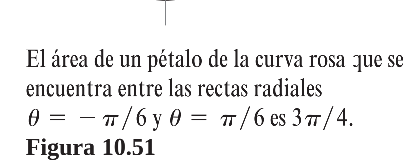
EJEMPLO 1 Encontrar el área de una región polar

Encontrar el área de un pétalo de la curva rosa dada por $r = 3\cos 3\theta$.

Solución En la figura 10.51 se puede ver que el pétalo al lado derecho se recorre a medida que θ aumenta de $-\pi/6$ a $\pi/6$. Por tanto, el área es



$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} (3\cos 3\theta)^2\,d\theta && \text{Fórmula para el área en coordenadas polares.}\\
&= \frac{9}{2}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{1+\cos 6\theta}{2}\,d\theta && \text{Identidad trigonométrica.}\\
&= \frac{9}{4}\left[\theta + \frac{\operatorname{sen} 6\theta}{6}\right]_{-\pi/6}^{\pi/6}\\
&= \frac{9}{4}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)\\
&= \frac{3\pi}{4}.
\end{aligned}$$



r = 3 cos 3θ

El área de un pétalo de la curva rosa que se encuentra entre las rectas radiales $\theta = -\pi/6$ y $\theta = \pi/6$ es $3\pi/4$.
Figura 10.51

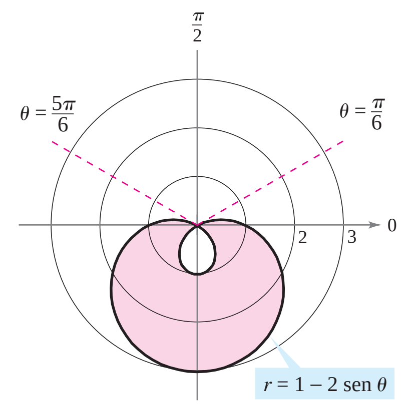
NOTA Para hallar el área de la región comprendida dentro de los tres pétalos de la curva rosa del ejemplo 1, no se puede simplemente integrar entre 0 y 2π. Si se hace así, se obtiene $9\pi/2$, que es el doble del área de los tres pétalos. Esta duplicación ocurre debido a que la curva rosa es trazada dos veces cuando θ aumenta de 0 a 2π. ■

EJEMPLO 2 Hallar el área limitada por una sola curva

Hallar el área de la región comprendida entre los lazos interior y exterior del caracol $r = 1 - 2\operatorname{sen}\theta$.

Solución En la figura 10.52, obsérvese que el lazo interior es trazado a medida que θ aumenta de $\pi/6$ a $5\pi/6$. Por tanto, el área comprendida por el *lazo interior* es

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} (1-2\operatorname{sen}\theta)^2\,d\theta && \text{Fórmula para el área en coordenadas polares.}\\
&= \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} (1-4\operatorname{sen}\theta+4\operatorname{sen}^2\theta)\,d\theta\\
&= \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \left[1-4\operatorname{sen}\theta+4\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)\right]d\theta && \text{Identidad trigonométrica.}\\
&= \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} (3-4\operatorname{sen}\theta-2\cos 2\theta)\,d\theta && \text{Simplificación.}\\
&= \frac{1}{2}\Big[3\theta+4\cos\theta-\operatorname{sen}2\theta\Big]_{\pi/6}^{5\pi/6}\\
&= \frac{1}{2}\left(2\pi-3\sqrt{3}\right)\\
&= \pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$



El área entre los lazos interior y exterior es aproximadamente 8.34
Figura 10.52

De manera similar, se puede integrar de $5\pi/6$ a $13\pi/6$ para hallar que el área de la región comprendida por el *lazo exterior* es $A_2 = 2\pi + \left(3\sqrt{3}/2\right)$. El área de la región comprendida entre los dos lazos es la diferencia entre A_2 y A_1.

$$A = A_2 - A_1 = \left(2\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = \pi + 3\sqrt{3} \approx 8.34$$

Puntos de intersección de gráficas polares

Debido a que un punto en coordenadas polares se puede representar de diferentes maneras, hay que tener cuidado al determinar los puntos de intersección de dos gráficas. Por ejemplo, considérense los puntos de intersección de las gráficas de

$$r = 1 - 2\cos\theta \quad \text{y} \quad r = 1$$

mostradas en la figura 10.53. Si, como se hace con ecuaciones rectangulares, se trata de hallar los puntos de intersección resolviendo las dos ecuaciones en forma simultánea, se obtiene

$r = 1 - 2\cos\theta$ Primera ecuación.

$1 = 1 - 2\cos\theta$ Sustitución de $r = 1$ de la segunda ecuación en la primera ecuación.

$\cos\theta = 0$ Simplificación.

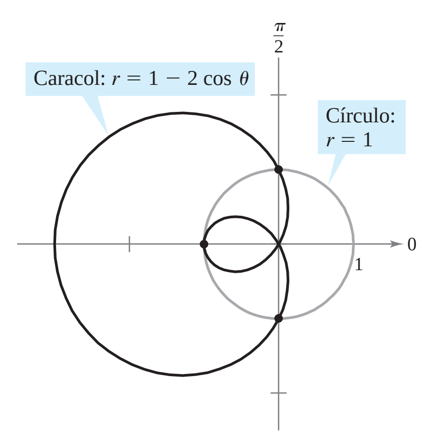
$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}.$ Despejar θ.

PARA MAYOR INFORMACIÓN
Para más información sobre el uso de la tecnología para encontrar puntos de intersección, consultar el artículo "Finding Points of Intersection of Polar-Coordinate Graphs" de Warren W. Esty en *Mathematics Teacher*.

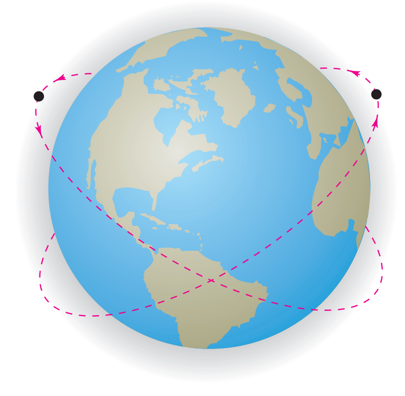
Los puntos de intersección correspondientes son $(1, \pi/2)$ y $(1, 3\pi/2)$. Sin embargo, en la figura 10.53 se ve que hay un *tercer* punto de intersección que no apareció al resolver simultáneamente las dos ecuaciones polares. (Ésta es una de las razones por las que es necesario trazar una gráfica cuando se busca el área de una región polar.) La razón por la que el tercer punto no se encontró es que no aparece con las mismas coordenadas en ambas gráficas. En la gráfica de $r = 1$, el punto se encuentra en las coordenadas $(1, \pi)$, mientras que en la gráfica de $r = 1 - 2\cos\theta$, el punto se encuentra en las coordenadas $(-1, 0)$.

El problema de hallar los puntos de intersección de dos gráficas polares se puede comparar con el problema de encontrar puntos de colisión de dos satélites cuyas órbitas alrededor de la Tierra se cortan, como se ilustra en la figura 10.54. Los satélites no colisionan mientras lleguen a los puntos de intersección en momentos diferentes (valores de θ). Las colisiones sólo ocurren en los puntos de intersección que sean "puntos simultáneos", puntos a los que llegan al mismo tiempo (valor de θ).

NOTA Puesto que el polo puede representarse mediante $(0, \theta)$, donde θ es *cualquier* ángulo, el polo debe verificarse por separado cuando se buscan puntos de intersección. ■



Tres puntos de intersección: $(1, \pi/2)$, $(-1, 0)$, $(1, 3\pi/2)$
Figura 10.53



Las trayectorias de los satélites pueden cruzarse sin causar colisiones
Figura 10.54

EJEMPLO 3 Hallar el área de la región entre dos curvas

Hallar el área de la región común a las dos regiones limitadas por las curvas siguientes.

$r = -6 \cos \theta$ Circunferencia.

$r = 2 - 2 \cos \theta$ Cardioide.

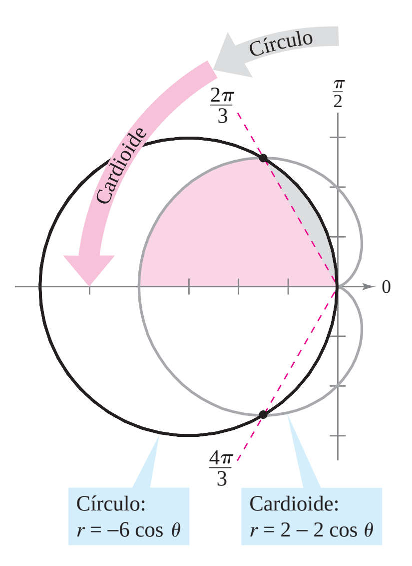


Figura 10.55

Solución Debido a que ambas curvas son simétricas respecto al eje x, se puede trabajar con la mitad superior del plano (o semiplano superior), como se ilustra en la figura 10.55. La región sombreada en gris se encuentra entre la circunferencia y la recta radial $\theta = 2\pi/3$. Puesto que la circunferencia tiene coordenadas $(0, \pi/2)$ en el polo, se puede integrar entre $\pi/2$ y $2\pi/3$ para obtener el área de esta región. La región sombreada en rojo está limitada por las rectas radiales $\theta = 2\pi/3$ y $\theta = \pi$ y la cardioide. Por tanto, el área de esta segunda región se puede encontrar por integración entre $2\pi/3$ y π. La suma de estas dos integrales da el área de la región común que se encuentra *sobre* la recta radial $\theta = \pi$.

Región entre la circunferencia y la recta radial $\theta = 2\pi/3$ — Región entre la cardioide y las rectas radiales $\theta = 2\pi/3$ y $\theta = \pi$

$$\begin{aligned}
\frac{A}{2} &= \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{2\pi/3} (-6 \cos \theta)^2 \, d\theta + \frac{1}{2}\int_{2\pi/3}^{\pi} (2 - 2 \cos \theta)^2 \, d\theta \\
&= 18 \int_{\pi/2}^{2\pi/3} \cos^2 \theta \, d\theta + \frac{1}{2}\int_{2\pi/3}^{\pi} (4 - 8 \cos \theta + 4 \cos^2 \theta) \, d\theta \\
&= 9 \int_{\pi/2}^{2\pi/3} (1 + \cos 2\theta) \, d\theta + \int_{2\pi/3}^{\pi} (3 - 4 \cos \theta + \cos 2\theta) \, d\theta \\
&= 9\left[\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right]_{\pi/2}^{2\pi/3} + \left[3\theta - 4 \operatorname{sen} \theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right]_{2\pi/3}^{\pi} \\
&= 9\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{2}\right) + \left(3\pi - 2\pi + 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \\
&= \frac{5\pi}{2} \\
&\approx 7.85
\end{aligned}$$

Por último, multiplicando por 2 se concluye que el área total es 5π.

NOTA Para verificar que el resultado obtenido en el ejemplo 3 es razonable, adviértase que el área de la región circular es $\pi r^2 = 9\pi$. Por tanto, parece razonable que el área de la región que se encuentra dentro de la circunferencia y dentro de la cardioide sea 5π. ■

Para apreciar la ventaja de las coordenadas polares al encontrar el área del ejemplo 3, considérese la integral siguiente, que da el área en coordenadas rectangulares (o cartesianas).

$$\frac{A}{2} = \int_{-4}^{-3/2} \sqrt{2\sqrt{1 - 2x} - x^2 - 2x + 2} \, dx + \int_{-3/2}^{0} \sqrt{-x^2 - 6x} \, dx$$

Emplear las funciones de integración de una herramienta de graficación para comprobar que se obtiene la misma área encontrada en el ejemplo 3.

Longitud de arco en forma polar

NOTA Cuando se aplica la fórmula de la longitud de arco a una curva polar, es necesario asegurarse de que la curva esté trazada (se recorra) sólo una vez en el intervalo de integración. Por ejemplo, la rosa dada por $r = \cos 3\theta$ está trazada (se recorre) una sola vez en el intervalo $0 \le \theta \le \pi$, pero está trazada (se recorre) dos veces en el intervalo $0 \le \theta \le 2\pi$. ■

La fórmula para la longitud de un arco en coordenadas polares se obtiene a partir de la fórmula para la longitud de arco de una curva descrita mediante ecuaciones paramétricas. (Ver el ejercicio 89.)

TEOREMA 10.14 LONGITUD DE ARCO DE UNA CURVA POLAR

Sea f una función cuya derivada es continua en un intervalo $\alpha \le \theta \le \beta$. La longitud de la gráfica de $r = f(\theta)$, desde $\theta = \alpha$ hasta $\theta = \beta$ es

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2}\, d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

EJEMPLO 4 Encontrar la longitud de una curva polar

Encontrar la longitud del arco que va de $\theta = 0$ a $\theta = 2\pi$ en la cardioide

$$r = f(\theta) = 2 - 2\cos\theta$$

que se muestra en la figura 10.56.

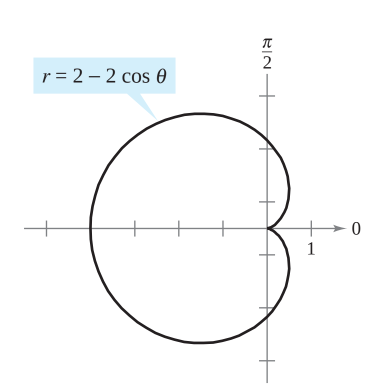


Figura 10.56

Solución Como $f'(\theta) = 2\,\text{sen}\,\theta$, se puede encontrar la longitud de arco de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
s &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2}\, d\theta && \text{Fórmula para la longitud de arco de una curva polar.}\\
&= \int_{0}^{2\pi} \sqrt{(2 - 2\cos\theta)^2 + (2\,\text{sen}\,\theta)^2}\, d\theta\\
&= 2\sqrt{2}\int_{0}^{2\pi} \sqrt{1 - \cos\theta}\, d\theta && \text{Simplificación.}\\
&= 2\sqrt{2}\int_{0}^{2\pi} \sqrt{2\,\text{sen}^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta && \text{Identidad trigonométrica.}\\
&= 4\int_{0}^{2\pi} \text{sen}\,\frac{\theta}{2}\, d\theta && \text{sen}\,\frac{\theta}{2} \ge 0 \text{ para } 0 \le \theta \le 2\pi.\\
&= 8\Big[-\cos\frac{\theta}{2}\Big]_{0}^{2\pi}\\
&= 8(1 + 1)\\
&= 16
\end{aligned}$$

En el quinto paso de la solución, es legítimo escribir

$$\sqrt{2\,\text{sen}^2(\theta/2)} = \sqrt{2}\,|\text{sen}\,(\theta/2)|$$

en lugar de

$$\sqrt{2\,\text{sen}^2(\theta/2)} = \sqrt{2}\,|\text{sen}\,(\theta/2)|$$

porque $\text{sen}(\theta/2) \ge 0$ para $0 \le \theta \le 2\pi$.

NOTA Empleando la figura 10.56 se puede ver que esta respuesta es razonable mediante comparación con la circunferencia de un círculo. Por ejemplo, un círculo con radio $\frac{5}{2}$ tiene una circunferencia de $5\pi \approx 15.7$. ■

Área de una superficie de revolución

La versión, en coordenadas polares, de las fórmulas para el área de una superficie de revolución se puede obtener a partir de las versiones paramétricas dadas en el teorema 10.9, usando las ecuaciones $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$.

NOTA Al aplicar el teorema 10.15, hay que verificar que la gráfica de $r = f(\theta)$ se recorra una sola vez en el intervalo $\alpha \le \theta \le \beta$. Por ejemplo, la circunferencia dada por $r = \cos\theta$ se recorre sólo una vez en el intervalo $0 \le \theta \le \pi$. ■

TEOREMA 10.15 ÁREA DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

Sea f una función cuya derivada es continua en un intervalo $\alpha \le \theta \le \beta$. El área de la superficie generada por revolución de la gráfica de $r = f(\theta)$, desde $\theta = \alpha$ hasta $\theta = \beta$, alrededor de la recta indicada es la siguiente.

1. $S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)\,\text{sen}\,\theta\sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2}\,d\theta$ — Alrededor del eje polar.

2. $S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)\cos\theta\sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2}\,d\theta$ — Alrededor de la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$.

EJEMPLO 5 Hallar el área de una superficie de revolución

Hallar el área de la superficie obtenida por revolución de la circunferencia $r = f(\theta) = \cos\theta$ alrededor de la recta $\theta = \pi/2$, como se ilustra en la figura 10.57.

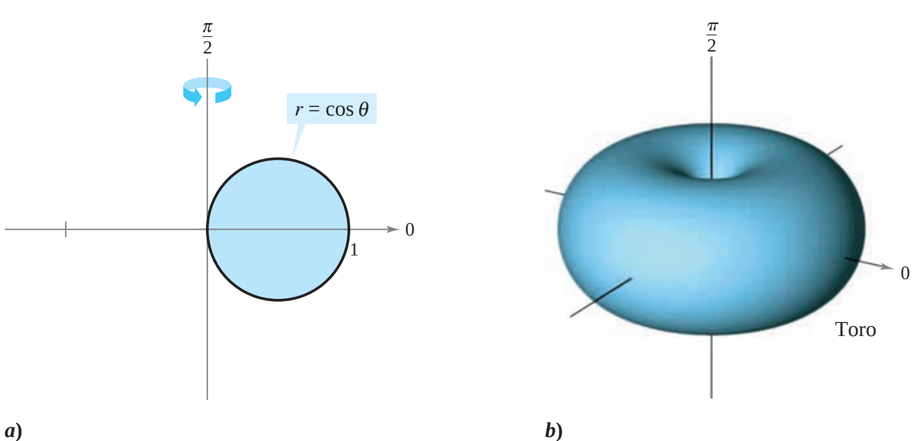


Figura 10.57

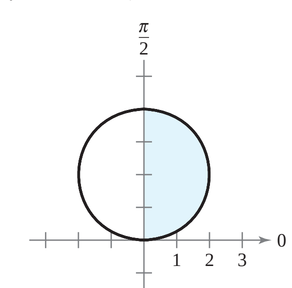
Solución Se puede usar la segunda fórmula dada en el teorema 10.15 con $f'(\theta) = -\text{sen}\,\theta$. Puesto que la circunferencia se recorre sólo una vez cuando θ aumenta de 0 a π, se tiene

$$
\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)\cos\theta\sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2}\,d\theta && \text{Fórmula para el área de una superficie de revolución.}\\
&= 2\pi \int_{0}^{\pi} \cos\theta(\cos\theta)\sqrt{\cos^2\theta + \text{sen}^2\,\theta}\,d\theta \\
&= 2\pi \int_{0}^{\pi} \cos^2\theta\,d\theta && \text{Identidad trigonométrica.}\\
&= \pi \int_{0}^{\pi} (1 + \cos 2\theta)\,d\theta && \text{Identidad trigonométrica.}\\
&= \pi\left[\theta + \frac{\text{sen}2\theta}{2}\right]_{0}^{\pi} = \pi^2.
\end{aligned}
$$

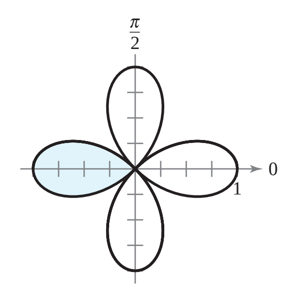
10.5 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, dar una integral que represente el área de la región sombreada que se muestra en la figura. No evaluar la integral.

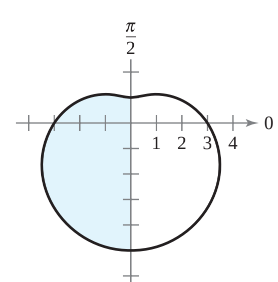
1. $r = 4 \operatorname{sen} \theta$



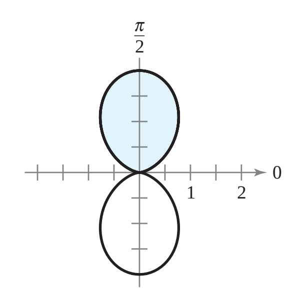
2. $r = \cos 2\theta$



3. $r = 3 - 2 \operatorname{sen} \theta$



4. $r = 1 - \cos 2\theta$



En los ejercicios 5 a 16, hallar el área de la región.

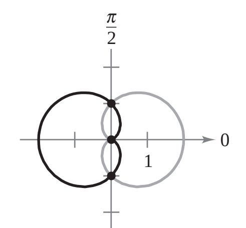
5. Interior de $r = 6 \operatorname{sen} \theta$
6. Interior de $r = 3 \cos \theta$
7. Un pétalo de $r = 2 \cos 3\theta$
8. Un pétalo de $r = 4 \operatorname{sen} 3\theta$
9. Un pétalo de $r = \operatorname{sen} 2\theta$
10. Un pétalo de $r = \cos 5\theta$
11. Interior de $r = 1 - \operatorname{sen} \theta$
12. Interior de $r = 1 - \operatorname{sen} \theta$ (arriba del eje polar)
13. Interior de $r = 5 + 2 \operatorname{sen} \theta$
14. Interior de $r = 4 - 4 \cos \theta$
15. Interior de $r^2 = 4 \cos 2\theta$
16. Interior de $r^2 = 6 \operatorname{sen} 2\theta$

En los ejercicios 17 a 24, emplear una herramienta de graficación para representar la ecuación polar y encontrar el área de la región indicada.

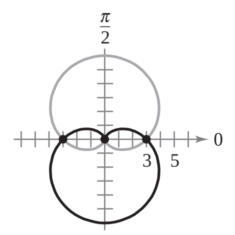
17. Lazo interior de $r = 1 + 2 \cos \theta$
18. Lazo interior de $r = 2 - 4 \cos \theta$
19. Lazo interior de $r = 1 + 2 \operatorname{sen} \theta$
20. Lazo interior de $r = 4 - 6 \operatorname{sen} \theta$
21. Entre los lazos de $r = 1 + 2 \cos \theta$
22. Entre los lazos de $r = 2(1 + 2 \operatorname{sen} \theta)$
23. Entre los lazos de $r = 3 - 6 \operatorname{sen} \theta$
24. Entre los lazos de $r = \frac{1}{2} + \cos \theta$

En los ejercicios 25 a 34, hallar los puntos de intersección de las gráficas de las ecuaciones.

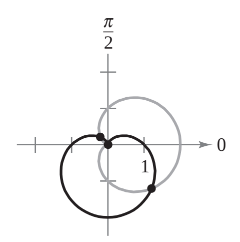
25. $r = 1 + \cos \theta$
$r = 1 - \cos \theta$



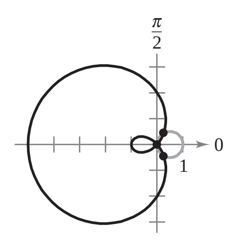
26. $r = 3(1 + \operatorname{sen} \theta)$
$r = 3(1 - \operatorname{sen} \theta)$



27. $r = 1 + \cos \theta$
$r = 1 - \operatorname{sen} \theta$



28. $r = 2 - 3 \cos \theta$
$r = \cos \theta$



29. $r = 4 - 5 \operatorname{sen} \theta$
$r = 3 \operatorname{sen} \theta$

30. $r = 1 + \cos \theta$
$r = 3 \cos \theta$

31. $r = \dfrac{\theta}{2}$
$r = 2$

32. $\theta = \dfrac{\pi}{4}$
$r = 2$

33. $r = 4 \operatorname{sen} 2\theta$
$r = 1$

34. $r = 3 + \operatorname{sen} \theta$
$r = 2 \csc \theta$

En los ejercicios 35 y 36, emplear una herramienta de graficación para aproximar los puntos de intersección de las gráficas de las ecuaciones polares. Confirmar los resultados en forma analítica.

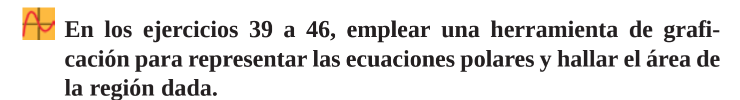
35. $r = 2 + 3 \cos \theta$
$r = \dfrac{\sec \theta}{2}$

36. $r = 3(1 - \cos \theta)$
$r = \dfrac{6}{1 - \cos \theta}$

Redacción **En los ejercicios 37 y 38, usar una herramienta de graficación para hallar los puntos de intersección de las gráficas de las ecuaciones polares. En la ventana, observar cómo se van trazando las gráficas. Explicar por qué el polo no es un punto de intersección que se obtenga al resolver las ecuaciones en forma simultánea.**

37. $r = \cos \theta$
$r = 2 - 3 \operatorname{sen} \theta$

38. $r = 4 \operatorname{sen} \theta$
$r = 2(1 + \operatorname{sen} \theta)$



En los ejercicios 39 a 46, emplear una herramienta de graficación para representar las ecuaciones polares y hallar el área de la región dada.

39. Interior común a $r = 4 \operatorname{sen} 2\theta$ y $r = 2$

40. Interior común a $r = 3(1 + \cos\theta)$ y $r = 2(1 - \cos\theta)$

41. Interior común a $r = 3 - 2 \operatorname{sen}\theta$ y $r = -3 + 2 \operatorname{sen}\theta$

42. Interior común a $r = 5 - 3 \operatorname{sen}\theta$ y $r = 5 - 3 \cos\theta$

43. Interior común a $r = 4 \operatorname{sen}\theta$ y $r = 2$

44. Interior común de $r = 2 \cos\theta$ y $r = 2 \operatorname{sen}\theta$

45. Interior $r = 2\cos\theta$ y exterior $r = 1$

46. Interior $r = 3 \operatorname{sen}\theta$ y exterior $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$

En los ejercicios 47 a 50, hallar el área de la región.

47. En el interior de $r = a(1 + \cos\theta)$ y en el exterior de $r = a\cos\theta$

48. En el interior de $r = 2a\cos\theta$ y en el exterior de $r = a$

49. Interior común a $r = a(1 + \cos\theta)$ y $r = a \operatorname{sen}\theta$

50. Interior común a $r = a\cos\theta$ y a $r = a \operatorname{sen}\theta$ donde $a > 0$

51. ***Radiación de una antena*** La radiación proveniente de una antena de transmisión no es uniforme en todas direcciones. La intensidad de la transmisión proveniente de una determinada antena se describe por medio del modelo $r = a\cos^2\theta$.

a) Transformar la ecuación polar a la forma rectangular.

b) Utilizar una herramienta de graficación para trazar el modelo con $a = 4$ y $a = 6$.

c) Hallar el área de la región geográfica que se encuentra entre las dos curvas del inciso *b*).

52. ***Área*** El área en el interior de una o más de las tres circunferencias entrelazadas $r = 2a\cos\theta$, $r = 2a \operatorname{sen}\theta$, y $r = a$ está dividida en siete regiones. Hallar el área de cada región.

53. ***Conjetura*** Hallar el área de la región limitada por

$$r = a\cos(n\theta)$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$ Con base en los resultados formular una conjetura acerca del área limitada por la función cuando n es par y cuando n es impar.

54. ***Área*** Dibujar la estrofoide

$$r = \sec\theta - 2\cos\theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Transformar estas ecuaciones a coordenadas rectangulares (o cartesianas). Encontrar el área comprendida en el lazo.

En los ejercicios 55 a 60, hallar la longitud de la curva sobre el intervalo indicado.

	Ecuación polar	*Intervalo*
55.	$r = 8$	$0 \le \theta \le 2\pi$
56.	$r = a$	$0 \le \theta \le 2\pi$
57.	$r = 4 \operatorname{sen}\theta$	$0 \le \theta \le 2\pi$
58.	$r = 2a\cos\theta$	$-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$
59.	$r = 1 + \operatorname{sen}\theta$	$0 \le \theta \le 2\pi$
60.	$r = 8(1 + \cos\theta)$	$0 \le \theta \le 2\pi$



En los ejercicios 61 a 66, utilizar una herramienta de graficación para representar la ecuación polar sobre el intervalo dado. Emplear las funciones de integración de una herramienta de graficación para estimar la longitud de la curva con una precisión de dos decimales.

61. $r = 2\theta, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

62. $r = \sec\theta, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$

63. $r = \frac{1}{\theta}, \quad \pi \le \theta \le 2\pi$

64. $r = e^{\theta}, \quad 0 \le \theta \le \pi$

65. $r = \operatorname{sen}(3\cos\theta), \quad 0 \le \theta \le \pi$

66. $r = 2 \operatorname{sen}(2\cos\theta), \quad 0 \le \theta \le \pi$

En los ejercicios 67 a 70, encontrar el área de la superficie generada por revolución de la curva en torno a la recta dada.

	Ecuación polar	*Intervalo*	*Eje de revolución*
67.	$r = 6\cos\theta$	$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$	Eje polar
68.	$r = a\cos\theta$	$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$	$\theta = \frac{\pi}{2}$
69.	$r = e^{a\theta}$	$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$	$\theta = \frac{\pi}{2}$
70.	$r = a(1 + \cos\theta)$	$0 \le \theta \le \pi$	Eje polar



En los ejercicios 71 y 72, usar las funciones de integración de una herramienta de graficación para estimar, con una precisión de dos cifras decimales, el área de la superficie generada por revolución de la curva alrededor del eje polar.

71. $r = 4\cos 2\theta, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$

72. $r = \theta, \quad 0 \le \theta \le \pi$

Desarrollo de conceptos

73. Explicar por qué para encontrar puntos de intersección de gráficas polares es necesario efectuar un análisis además de resolver dos ecuaciones en forma simultánea.

74. ¿Cuál de las integrales da la longitud de arco de $r = 3(1 - \cos 2\theta)$? Decir por qué las otras integrales son incorrectas.

a) $3\int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos 2\theta)^2 + 4 \operatorname{sen}^2 2\theta}\, d\theta$

b) $12\int_0^{\pi/4} \sqrt{(1 - \cos 2\theta)^2 + 4 \operatorname{sen}^2 2\theta}\, d\theta$

c) $3\int_0^{\pi} \sqrt{(1 - \cos 2\theta)^2 + 4 \operatorname{sen}^2 2\theta}\, d\theta$

d) $6\int_0^{\pi/2} \sqrt{(1 - \cos 2\theta)^2 + 4 \operatorname{sen}^2 2\theta}\, d\theta$

75. Dar las fórmulas de las integrales para el área de una superficie de revolución generada por la gráfica de $r = f(\theta)$ alrededor *a*) del eje x y *b*) del eje y.

Para discusión

76. Para cada ecuación polar, dibujar su gráfica, determinar el intervalo que traza la gráfica sólo una vez y encontrar el área de la región acotada por la gráfica utilizando una fórmula geométrica e integración.

a) $r = 10 \cos \theta$ *b*) $r = 5 \operatorname{sen} \theta$

77. ***Área de la superficie de un toro*** Hallar el área de la superficie del toro generado por revolución de la circunferencia $r = 2$ alrededor de la recta $r = 5 \sec \theta$.

78. ***Área de la superficie de un toro*** Hallar el área de la superficie del toro generado por revolución de la circunferencia $r = a$ en torno a la recta $r = b \sec \theta$, donde $0 < a < b$.

79. ***Aproximación de un área*** Considerar la circunferencia $r = 8 \cos \theta$.

a) Hallar el área del círculo.

b) Completar la tabla dando las áreas A de los sectores circulares entre $\theta = 0$ y los valores de θ dados en la tabla.

θ	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
A							

c) Emplear la tabla del inciso *b*) para aproximar los valores de θ para los cuales el sector circular contiene $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, y $\frac{3}{4}$ del área total de la circunferencia.

d) Usar una herramienta de graficación para aproximar, con una precisión de dos cifras decimales, los ángulos θ para los cuales el sector circular contiene $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$ del área total de la circunferencia.

e) ¿Dependen los resultados del inciso *d*) del radio del círcu-lo? Explicar la respuesta.

80. ***Área aproximada*** Dado el círculo $r = 3 \operatorname{sen} \theta$.

a) Hallar el área de la circunferencia correspondiente.

b) Completar la tabla dando las áreas A de los sectores circulares comprendidos entre $\theta = 0$ y los valores de θ dados en la tabla.

θ	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
A							

c) Utilizar la tabla del inciso *b*) para aproximar los valores de θ para los cuales el sector circular representa $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, y $\frac{1}{2}$ del área total de la circunferencia.

d) Usar una herramienta de graficación para aproximar, con una precisión de dos cifras decimales, los ángulos θ para los que el sector circular representa $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$ del área total del círculo.

81. ¿Qué sección cónica representa la siguiente ecuación polar?

$$r = a \operatorname{sen} \theta + b \cos \theta$$

82. ***Área*** Hallar el área del círculo dado por $r = \operatorname{sen} \theta + \cos \theta$. Comprobar el resultado transformando la ecuación polar a la forma rectangular y usando después la fórmula para el área del círculo.

83. ***Espiral de Arquímedes*** La curva representada por la ecuación $r = a\theta$, donde a es una constante, se llama espiral de Arquímedes.

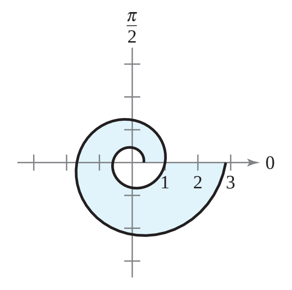
a) Emplear una herramienta de graficación para trazar la gráfica de $r = \theta$, donde $\theta \geq 0$. ¿Qué ocurre con la gráfica de $r = a\theta$ a medida que a aumenta? ¿Qué pasa si $\theta \leq 0$?

b) Determinar los puntos de la espiral $r = a\theta$ $(a > 0, \theta \geq 0)$, en los que la curva cruza el eje polar.

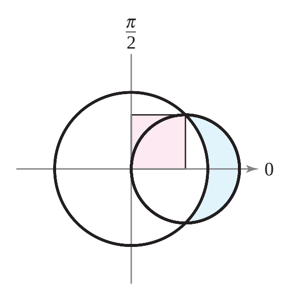
c) Hallar la longitud de $r = \theta$ sobre el intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

d) Hallar el área bajo la curva $r = \theta$ para $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

84. ***Espiral logarítmica*** La curva descrita por la ecuación $r = ae^{b\theta}$, donde a y b son constantes, se denomina **espiral logarítmica**. La figura siguiente muestra la gráfica de $r = e^{\theta/6}$, $-2\pi \leq \theta \leq 2\pi$. Hallar el área de la zona sombreada.



85. La mayor de las circunferencias mostradas en la figura siguiente es la gráfica de $r = 1$. Hallar la ecuación polar para la circunferencia menor de manera que las áreas sombreadas sean iguales.



86. ***Hoja (o folio) de Descartes*** Una curva llamada **hoja (o folio) de Descartes** puede representarse por medio de las ecuaciones paramétricas

$$x = \frac{3t}{1 + t^3} \quad \text{y} \quad y = \frac{3t^2}{1 + t^3}.$$

a) Convertir las ecuaciones paramétricas a la forma polar.

b) Dibujar la gráfica de la ecuación polar del inciso *a*).

c) Emplear una herramienta de graficación para aproximar el área comprendida en el lazo de la curva.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 87 y 88, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.**

87. Si $f(\theta) > 0$ para todo θ y $g(\theta) < 0$ para todo θ, entonces las gráficas de $r = f(\theta)$ y $r = g(\theta)$ no se cortan.

88. Si $f(\theta) = g(\theta)$ para $\theta = 0, \pi/2$ y $3\pi/2$, entonces las gráficas de $r = f(\theta)$ y $r = g(\theta)$ tienen cuando menos cuatro puntos de intersección.

89. Usar la fórmula para la longitud de arco de una curva en forma paramétrica para obtener la fórmula de la longitud de arco de una curva polar.

10.6 Ecuaciones polares de las cónicas y leyes de Kepler

- **Analizar y dar las ecuaciones polares de las cónicas.**
- **Entender y emplear las leyes del movimiento planetario de Kepler.**

> **EXPLORACIÓN**
>
> ***Representación gráfica de cónicas*** En una herramienta de graficación elegir el modo polar e introducir ecuaciones polares de la forma
>
> $$r = \frac{a}{1 \pm b\cos\theta}$$
>
> o
>
> $$r = \frac{a}{1 \pm b\,\text{sen}\,\theta}.$$
>
> Si $a \neq 0$, la gráfica será una cónica. Describir los valores de a y b que generan parábolas. ¿Qué valores generan elipses? ¿Qué valores generan hipérbolas?

Ecuaciones polares de las cónicas

En este capítulo se ha visto que las ecuaciones rectangulares de elipses e hipérbolas adquieren formas simples cuando sus *centros* se encuentran en el origen. Sin embargo, existen muchas aplicaciones importantes de las cónicas en las cuales resulta más conveniente usar uno de los focos como punto de referencia (el origen) del sistema de coordenadas. Por ejemplo, el Sol se encuentra en uno de los focos de la órbita de la Tierra; la fuente de luz en un reflector parabólico se encuentra en su foco. En esta sección se verá que las ecuaciones polares de las cónicas adoptan formas simples si uno de los focos se encuentra en el polo.

El teorema siguiente usa el concepto de *excentricidad*, definido en la sección 10.1, para clasificar los tres tipos básicos de cónicas. En el apéndice A se da una demostración de este teorema.

TEOREMA 10.16 CLASIFICACIÓN DE LAS CÓNICAS DE ACUERDO CON LA EXCENTRICIDAD

Sean F un punto fijo (*foco*) y D una recta fija (*directriz*) en el plano. Sean P otro punto en el plano y e (*excentricidad*) el cociente obtenido al dividir la distancia de P a F entre la distancia de P a D. El conjunto de todos los puntos P con una determinada excentricidad es una cónica.

1. La cónica es una elipse si $0 < e < 1$.
2. La cónica es una parábola si $e = 1$.
3. La cónica es una hipérbola si $e > 1$.

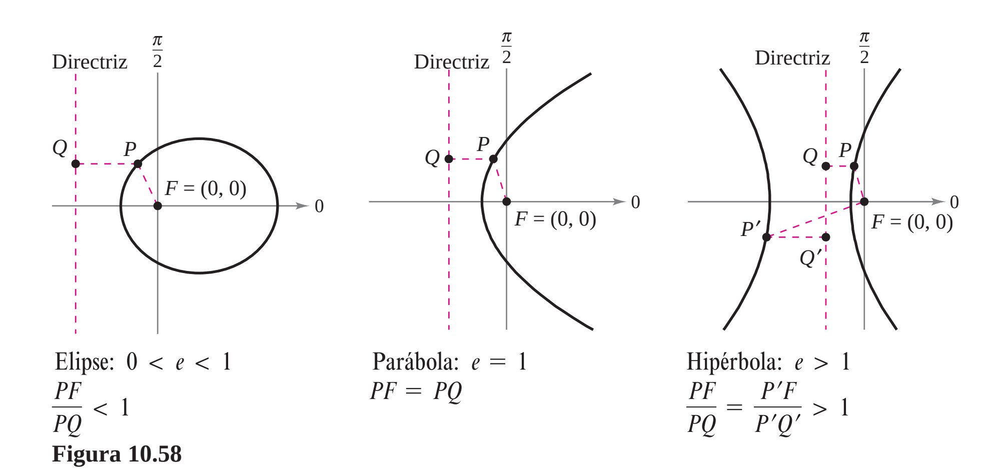


Figura 10.58

En la figura 10.58, obsérvese que en todos los tipos de cónicas el polo coincide con el punto fijo (foco) que se da en la definición. La ventaja de esta ubicación se aprecia en la demostración del teorema siguiente.

TEOREMA 10.17 ECUACIONES POLARES DE LAS CÓNICAS

La gráfica de una ecuación polar de la forma

$$r = \frac{ed}{1 \pm e \cos \theta} \quad \text{o} \quad r = \frac{ed}{1 \pm e \operatorname{sen} \theta}$$

es una cónica, donde $e > 0$ es la excentricidad y $|d|$ es la distancia entre el foco, en el polo, y la directriz correspondiente.

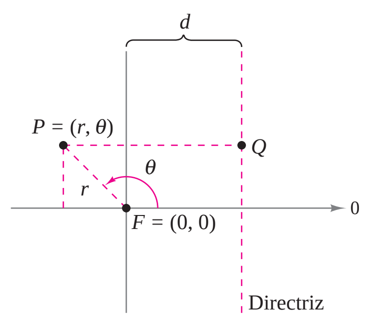


Figura 10.59

DEMOSTRACIÓN La siguiente es una demostración de $r = ed/(1 + e \cos \theta)$ con $d > 0$. En la figura 10.59, considérese una directriz vertical que se encuentra d unidades a la derecha del foco $F = (0, 0)$. Si $P = (r, \theta)$ es un punto en la gráfica de $r = ed/(1 + e \cos \theta)$, se puede demostrar que la distancia entre P y la directriz es

$$PQ = |d - x| = |d - r \cos \theta| = \left|\frac{r(1 + e \cos \theta)}{e} - r \cos \theta\right| = \left|\frac{r}{e}\right|.$$

Como la distancia entre P y el polo es simplemente $PF = |r|$, el radio PF entre PQ es $PF/PQ = |r|/|r/e| = |e| = e$ y, de acuerdo con el teorema 10.16, la gráfica de la ecuación debe ser una cónica. Las demostraciones de los otros casos son similares.

Los cuatro tipos de ecuaciones que se indican en el teorema 10.17 se pueden clasificar como sigue, siendo $d > 0$.

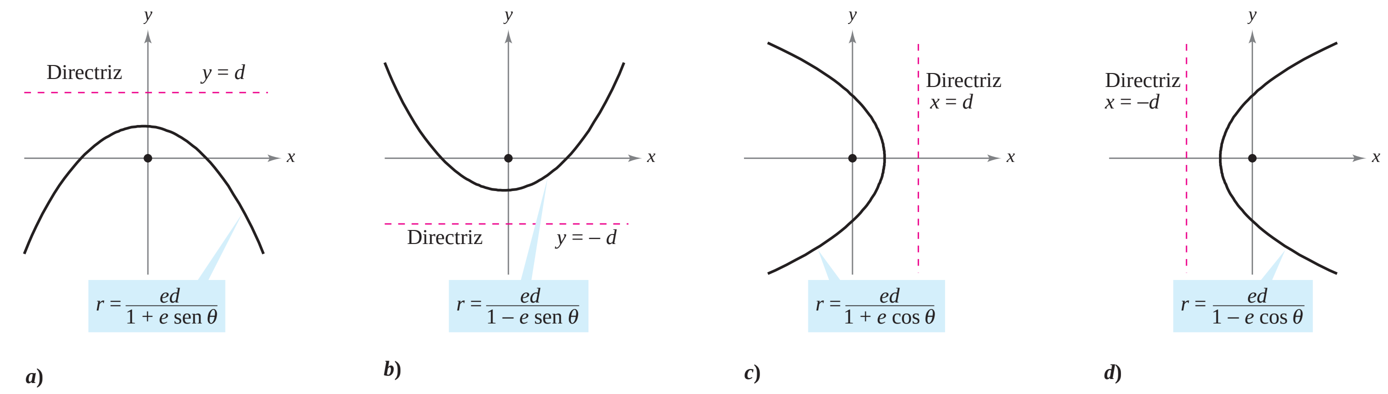
***a*)** Directriz horizontal arriba del polo: $r = \dfrac{ed}{1 + e \quad \theta}$

***b*)** Directriz horizontal abajo del polo: $r = \dfrac{ed}{1 - e \quad \theta}$

***c*)** Directriz vertical a la derecha del polo: $r = \dfrac{ed}{1 + e \cos \theta}$

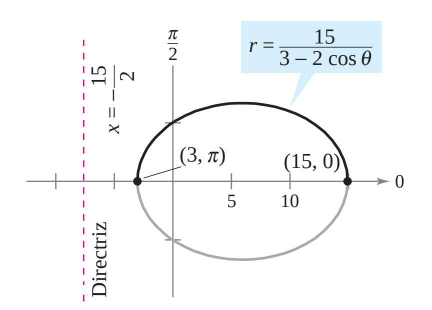
***d*)** Directriz vertical a la izquierda del polo: $r = \dfrac{ed}{1 - e \cos \theta}$

La figura 10.60 ilustra estas cuatro posibilidades en el caso de una parábola.



***a*)** ***b*)** ***c*)** ***d*)**

Los cuatro tipos de ecuaciones polares para una parábola
Figura 10.60



La gráfica de la cónica es una elipse con $e = \frac{2}{3}$.
Figura 10.61

EJEMPLO 1 Determinar una cónica a partir de su ecuación

Dibujar la gráfica de la cónica descrita por $r = \dfrac{15}{3 - 2\cos\theta}$.

Solución Para determinar el tipo de cónica, reescribir la ecuación como sigue

$$r = \frac{15}{3 - 2\cos\theta} \qquad \text{Escribir la ecuación original.}$$

$$= \frac{5}{1 - (2/3)\cos\theta}. \qquad \text{Dividir el numerador y el denominador entre 3.}$$

Por tanto, la gráfica es una elipse con $e = \frac{2}{3}$. Se traza la mitad superior de la elipse localizando gráficamente los puntos desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \pi$, como se muestra en la figura 10.61. Luego, empleando la simetría respecto al eje polar se traza la mitad inferior de la elipse.

En la elipse en la figura 10.61, el eje mayor es horizontal y los vértices se encuentran en (15, 0) y $(3, \pi)$. Por tanto, la longitud del eje *mayor* es $2a = 18$. Para encontrar la longitud del eje menor, se usan las ecuaciones $e = c/a$ y $b^2 = a^2 - c^2$ para concluir que

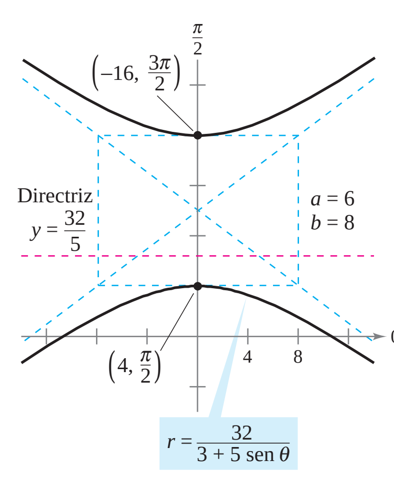
$$b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - (ea)^2 = a^2(1 - e^2). \qquad \text{Elipse.}$$

Como $e = \frac{2}{3}$, se tiene

$$b^2 = 9^2\left[1 - \left(\tfrac{2}{3}\right)^2\right] = 45$$

lo cual implica que $b = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$. Por tanto, la longitud del eje menor es $2b = 6\sqrt{5}$. Un análisis similar para la hipérbola da

$$b^2 = c^2 - a^2 = (ea)^2 - a^2 = a^2(e^2 - 1). \qquad \text{Hipérbola.}$$



La gráfica de la cónica es una hipérbola con $e = \frac{5}{3}$.
Figura 10.62

EJEMPLO 2 Trazar una cónica a partir de su ecuación polar

Trazar la gráfica de la ecuación polar $r = \dfrac{32}{3 + 5\,\text{sen}\,\theta}$.

Solución Se divide el numerador y el denominador entre 3 y se obtiene

$$r = \frac{32/3}{1 + (5/3)\,\text{sen}\,\theta}.$$

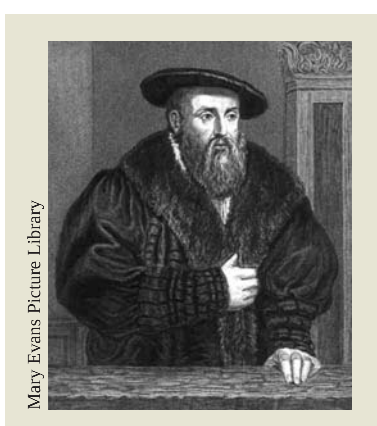
Como $e = \frac{5}{3} > 1$, la gráfica es una hipérbola. Como $d = \frac{32}{5}$, la directriz es la recta $y = \frac{32}{5}$. El eje transversal de la hipérbola se encuentra en la recta $\theta = \pi/2$, y los vértices se encuentran en

$$(r, \theta) = \left(4, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{y} \quad (r, \theta) = \left(-16, \frac{3\pi}{2}\right).$$

Dado que la longitud del eje transversal es 12, puede verse que $a = 6$. Para encontrar b, se escribe

$$b^2 = a^2(e^2 - 1) = 6^2\left[\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 1\right] = 64.$$

Por tanto, $b = 8$. Por último, se usan a y b para determinar las asíntotas de la hipérbola y obtener la gráfica que se muestra en la figura 10.62.



JOHANNES KEPLER (1571-1630)

Kepler formuló sus tres leyes a partir de la extensa recopilación de datos del astrónomo danés Tycho Brahe, así como de la observación directa de la órbita de Marte.

Leyes de Kepler

Las leyes de Kepler, las cuales deben su nombre al astrónomo alemán Johannes Kepler, se emplean para describir las órbitas de los planetas alrededor del Sol.

1. Todo planeta se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol.
2. Un rayo que va del Sol al planeta barre áreas iguales de la elipse en tiempos iguales.
3. El cuadrado del periodo es proporcional al cubo de la distancia media entre el planeta y el Sol.*

Aun cuando Kepler dedujo estas leyes de manera empírica, más tarde fueron confirmadas por Newton. De hecho, Newton demostró que todas las leyes pueden deducirse de un conjunto de leyes universales del movimiento y la gravitación que gobiernan los movimientos de todos los cuerpos celestes, incluyendo cometas y satélites. Esto se muestra en el ejemplo siguiente con el cometa que debe su nombre al matemático inglés Edmund Halley (1656-1742).

EJEMPLO 3 Cometa Halley

El cometa Halley tiene una órbita elíptica, con el Sol en uno de sus focos y una excentricidad $e \approx 0.967$. La longitud del eje mayor de la órbita es aproximadamente 35.88 unidades astronómicas (UA). (Una unidad astronómica se define como la distancia media entre la Tierra y el Sol, 93 millones de millas.) Hallar una ecuación polar de la órbita. ¿Qué tan cerca llega a pasar el cometa Halley del Sol?

Solución Utilizando un eje vertical, se puede elegir una ecuación de la forma

$$r = \frac{ed}{(1 + e \operatorname{sen} \theta)}.$$

Como los vértices de la elipse se encuentran en $\theta = \pi/2$ y $\theta = 3\pi/2$, la longitud del eje mayor es la suma de los valores r en los vértices, como se observa en la figura 10.63. Es decir,

$$2a = \frac{0.967d}{1 + 0.967} + \frac{0.967d}{1 - 0.967}$$

$$35.88 \approx 27.79d. \qquad 2a \approx 35.88$$

Por tanto, $d \approx 1.204$ y $ed \approx (0.967)(1.204) \approx 1.164$. Usando este valor en la ecuación se obtiene

$$r = \frac{1.164}{1 + 0.967 \operatorname{sen} \theta}$$

donde r se mide en unidades astronómicas. Para hallar el punto más cercano al Sol (el foco), se escribe $c = ea \approx (0.967)(17.94) \approx 17.35$. Puesto que c es la distancia entre el foco y el centro, el punto más cercano es

$$\begin{aligned} a - c &\approx 17.94 - 17.35 \\ &\approx 0.59 \text{ UA} \\ &\approx 55\,000\,000 \text{ millas.} \end{aligned}$$

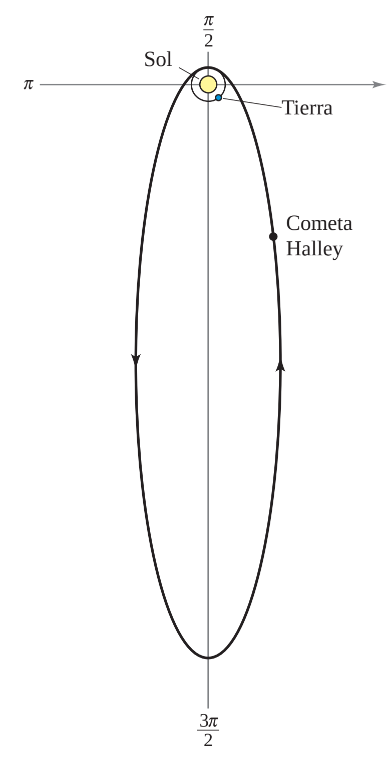
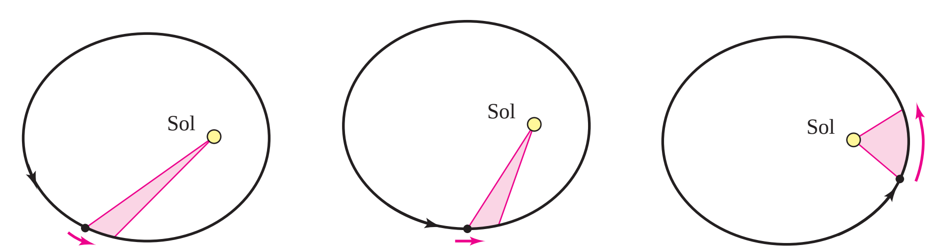


Figura 10.63

** Si se usa como referencia la Tierra, cuyo periodo es 1 año y cuya distancia media es 1 unidad astronómica, la constante de proporcionalidad es 1. Por ejemplo, como la distancia media de Marte al Sol es $D = 1.524$ UA, su periodo P está dado por $D^3 = P^2$. Por tanto, el periodo de Marte es $P = 1.88$.*

La segunda ley de Kepler establece que cuando un planeta se mueve alrededor del Sol, un rayo que va del Sol hacia el planeta barre áreas iguales en tiempos iguales. Esta ley también puede aplicarse a cometas y asteroides con órbitas elípticas. Por ejemplo, la figura 10.64 muestra la órbita del asteroide Apolo alrededor del Sol. Aplicando la segunda ley de Kepler a este asteroide, se sabe que cuanto más cerca está del Sol mayor es su velocidad, ya que un rayo corto debe moverse más rápido para barrer la misma área que barre un rayo largo.



Un rayo que va del Sol al asteroide barre áreas iguales en tiempos iguales
Figura 10.64

EJEMPLO 4 El asteroide Apolo

El periodo del asteroide Apolo es de 661 días terrestres, y su órbita queda descrita aproximadamente por la elipse

$$r = \frac{1}{1 + (5/9)\cos\theta} = \frac{9}{9 + 5\cos\theta}$$

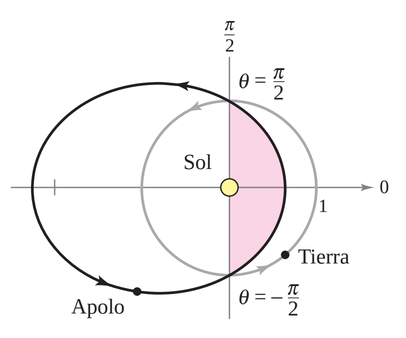


Figura 10.65

donde r se mide en unidades astronómicas. ¿Cuánto tiempo necesita Apolo para moverse de la posición dada por $\theta = -\pi/2$ a $\theta = \pi/2$, como se ilustra en la figura 10.65?

Solución Para empezar se encuentra el área barrida cuando θ aumenta de $-\pi/2$ a $\pi/2$.

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\, d\theta \qquad \text{Fórmula para el área de una gráfica polar.}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{9}{9 + 5\cos\theta}\right)^2 d\theta$$

Usando la sustitución $u = \tan(\theta/2)$, analizada en la sección 8.6, se obtiene

$$A = \frac{81}{112}\left[\frac{-5\,\text{sen}\,\theta}{9 + 5\cos\theta} + \frac{18}{\sqrt{56}}\arctan\frac{\sqrt{56}\tan(\theta/2)}{14}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \approx 0.90429.$$

Como el eje mayor de la elipse tiene longitud $2a = 81/28$ y la excentricidad es $e = 5/9$, se encuentra que $b = a\sqrt{1 - e^2} = 9/\sqrt{56}$. Por tanto, el área de la elipse es

$$\text{Área de la elipse} = \pi ab = \pi\left(\frac{81}{56}\right)\left(\frac{9}{\sqrt{56}}\right) \approx 5.46507.$$

Como el tiempo requerido para recorrer la órbita es 661 días, se puede aplicar la segunda ley de Kepler para concluir que el tiempo t requerido para moverse de la posición $\theta = -\pi/2$ a la posición $\theta = \pi/2$ está dado por

$$\frac{t}{661} = \frac{\text{área del segmento elíptico}}{\text{área de la elipse}} \approx \frac{0.90429}{5.46507}$$

lo cual implica que $t \approx 109$ días.

10.6 Ejercicios

Razonamiento gráfico **En los ejercicios 1 a 4, usar una herramienta de graficación para representar la ecuación polar cuando *a*) $e = 1$, *b*) $e = 0.5$ y *c*) $e = 1.5$. Identificar la cónica.**

1. $r = \dfrac{2e}{1 + e\cos\theta}$

2. $r = \dfrac{2e}{1 - e\cos\theta}$

3. $r = \dfrac{2e}{1 - e\,\text{sen}\,\theta}$

4. $r = \dfrac{2e}{1 + e\,\text{sen}\,\theta}$



5. ***Redacción*** Considerar la ecuación polar

$$r = \frac{4}{1 + e\,\text{sen}\,\theta}.$$

a) Usar una herramienta de graficación para representar la ecuación con $e = 0.1$, $e = 0.25$, $e = 0.5$, $e = 0.75$, y $e = 0.9$. Identificar la cónica y analizar la variación en su forma cuando $e \to 1^-$ y $e \to 0^+$.

b) Usar una herramienta de graficación para representar la ecuación cuando $e = 1$. Identificar la cónica.

c) Usar una herramienta de graficación para representar la ecuación cuando $e = 1.1$, $e = 1.5$ y $e = 2$. Identificar la cónica y analizar la variación en su forma a medida que $e \to 1^+$ y $e \to \infty$.

6. Considerar la ecuación polar

$$r = \frac{4}{1 - 0.4\cos\theta}.$$

a) Identificar la cónica sin elaborar la gráfica de la ecuación.

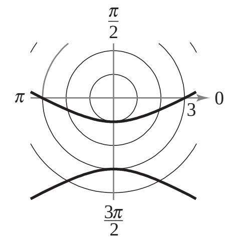
b) Sin elaborar la gráfica de las ecuaciones polares siguientes, describir la diferencia de cada una con la ecuación polar de arriba.

$$r = \frac{4}{1 + 0.4\cos\theta}, \quad r = \frac{4}{1 - 0.4\,\text{sen}\,\theta}$$

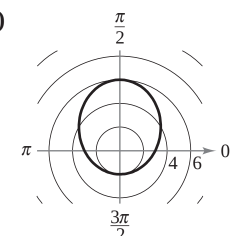
c) Verificar en forma gráfica los resultados del inciso *b*).

En los ejercicios 7 a 12 hacer corresponder la ecuación polar con su gráfica. [Las gráficas están etiquetadas *a*), *b*), *c*), *d*), *e*) y *f*).]

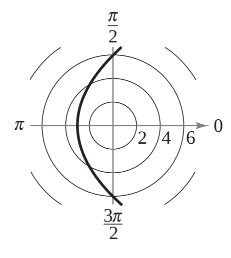
a)



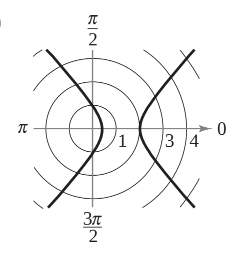
b)



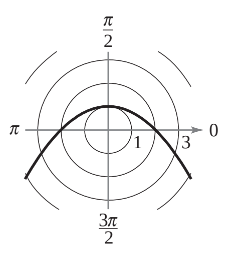
c)



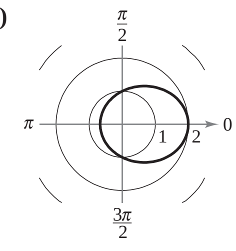
d)



e)



f)



7. $r = \dfrac{6}{1 - \cos\theta}$

8. $r = \dfrac{2}{2 - \cos\theta}$

9. $r = \dfrac{3}{1 - 2\,\text{sen}\,\theta}$

10. $r = \dfrac{2}{1 + \text{sen}\,\theta}$

11. $r = \dfrac{6}{2 - \text{sen}\,\theta}$

12. $r = \dfrac{2}{2 + 3\cos\theta}$

En los ejercicios 13 a 26, hallar la excentricidad y la distancia del polo a la directriz de la cónica. Después trazar e identificar la gráfica. Usar una herramienta de graficación para confirmar los resultados.

13. $r = \dfrac{1}{1 - \cos\theta}$

14. $r = \dfrac{1}{1 + \text{sen}\,\theta}$

15. $r = \dfrac{-4}{1 - \text{sen}\,\theta}$

16. $r = \dfrac{4}{1 + \cos\theta}$

17. $r = \dfrac{6}{2 + \cos\theta}$

18. $r = \dfrac{10}{5 + 4\,\text{sen}\,\theta}$

19. $r(2 + \text{sen}\,\theta) = 4$

20. $r(3 - 2\cos\theta) = 6$

21. $r = \dfrac{5}{-1 + 2\cos\theta}$

22. $r = \dfrac{-6}{3 + 7\,\text{sen}\,\theta}$

23. $r = \dfrac{3}{2 + 6\,\text{sen}\,\theta}$

24. $r = \dfrac{8}{1 + 4\cos\theta}$

25. $r = \dfrac{300}{-12 + 6\,\text{sen}\,\theta}$

26. $r = \dfrac{180}{15 - 3.75\cos\theta}$

En los ejercicios 27 a 30, usar una herramienta de graficación para representar la ecuación polar. Identificar la gráfica.

27. $r = \dfrac{3}{-4 + 2\,\text{sen}\,\theta}$

28. $r = \dfrac{-15}{2 + 8\,\text{sen}\,\theta}$

29. $r = \dfrac{-10}{1 - \cos\theta}$

30. $r = \dfrac{6}{6 + 7\cos\theta}$



En los ejercicios 31 a 34, usar una graficadora para representar la cónica. Describir en qué difiere la gráfica de la del ejercicio indicado.

31. $r = \dfrac{-4}{1 - \operatorname{sen}(\theta - \pi/4)}$ (Ver ejercicio 15.)

32. $r = \dfrac{4}{1 + \cos(\theta - \pi/3)}$ (Ver ejercicio 16.)

33. $r = \dfrac{6}{2 + \cos(\theta + \pi/6)}$ (Ver ejercicio 17.)

34. $r = \dfrac{-6}{3 + 7\operatorname{sen}(\theta + 2\pi/3)}$ (Ver ejercicio 22.)

35. Dar la ecuación de la elipse que se obtiene al girar $\pi/6$ radianes en sentido de las manecillas del reloj la elipse

$$r = \frac{8}{8 + 5\cos\theta}.$$

36. Dar la ecuación de la parábola que se obtiene al girar $\pi/4$ radianes en sentido contrario a las manecillas del reloj la parábola

$$r = \frac{9}{1 + \operatorname{sen}\theta}.$$

En los ejercicios 37 a 48, hallar una ecuación polar de la cónica con foco en el polo. (Por conveniencia, la ecuación de la directriz está dada en forma rectangular.)

	Cónica	*Excentricidad*	*Directriz*
37.	Parábola	$e = 1$	$x = -1$
38.	Parábola	$e = 1$	$y = 1$
39.	Elipse	$e = \frac{1}{2}$	$y = 1$
40.	Elipse	$e = \frac{3}{4}$	$y = -2$
41.	Hipérbola	$e = 2$	$x = 1$
42.	Hipérbola	$e = \frac{3}{2}$	$x = -1$

	Cónica	*Vértice o vértices*
43.	Parábola	$\left(1, -\frac{\pi}{2}\right)$
44.	Parábola	$(5, \pi)$
45.	Elipse	$(2, 0)$, $(8, \pi)$
46.	Elipse	$\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(4, \frac{3\pi}{2}\right)$
47.	Hipérbola	$\left(1, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(9, \frac{3\pi}{2}\right)$
48.	Hipérbola	$(2, 0)$, $(10, 0)$

49. Encontrar la ecuación para la elipse con foco $(0, 0)$, excentricidad de $\frac{1}{2}$ y directriz en $r = 4\sec\theta$.

50. Encontrar la ecuación para una hipérbola con foco $(0, 0)$, excentricidad de 2 y directriz en $r = -8\csc\theta$.

Desarrollo de conceptos

51. Clasificar las cónicas de acuerdo con su excentricidad.

52. Identificar cada cónica.

a) $r = \dfrac{5}{1 - 2\cos\theta}$ *b)* $r = \dfrac{5}{10 - \operatorname{sen}\theta}$

c) $r = \dfrac{5}{3 - 3\cos\theta}$ *d)* $r = \dfrac{5}{1 - 3\operatorname{sen}(\theta - \pi/4)}$

53. Describir qué pasa con la distancia entre la directriz y el centro de una elipse si los focos permanecen fijos y e se aproxima a 0.

Para discusión

54. Explicar en qué difiere la gráfica de cada cónica de la gráfica de $r = \dfrac{4}{1 + \operatorname{sen}\theta}$.

a) $r = \dfrac{4}{1 - \cos\theta}$ *b)* $r = \dfrac{4}{1 - \operatorname{sen}\theta}$

c) $r = \dfrac{4}{1 + \cos\theta}$ *d)* $r = \dfrac{4}{1 - \operatorname{sen}(\theta - \pi/4)}$

55. Demostrar que la ecuación polar de $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ es

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - e^2\cos^2\theta}.$$ Elipse.

56. Demostrar que la ecuación polar de $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ es

$$r^2 = \frac{-b^2}{1 - e^2\cos^2\theta}.$$ Hipérbola.

En los ejercicios 57 a 60, usar los resultados de los ejercicios 55 y 56 para dar la forma polar de la ecuación de la cónica.

57. Elipse: foco en $(4, 0)$; vértices en $(5, 0)$, $(5, \pi)$

58. Hipérbola: foco en $(5, 0)$; vértices en $(4, 0)$, $(4, \pi)$

59. $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

60. $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$

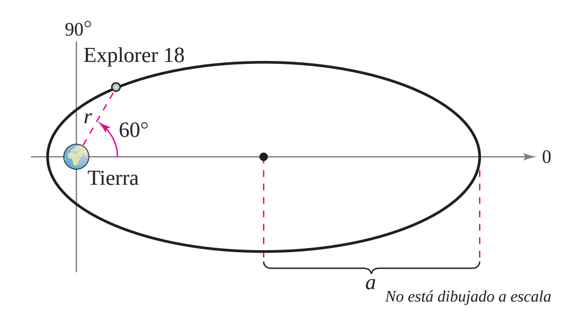


En los ejercicios 61 a 64, usar las funciones de integración de una herramienta de graficación para estimar con una precisión de dos cifras decimales el área de la región limitada por la gráfica de la ecuación polar.

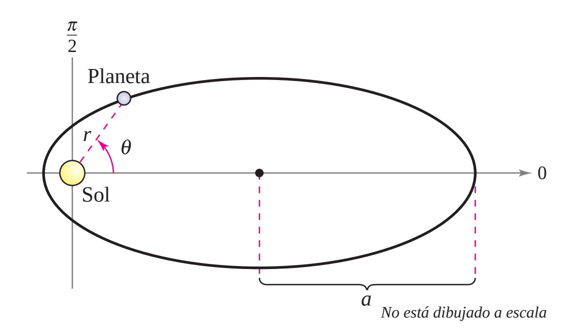
61. $r = \dfrac{3}{2 - \cos\theta}$ **62.** $r = \dfrac{9}{4 + \cos\theta}$

63. $r = \dfrac{2}{3 - 2\operatorname{sen}\theta}$ **64.** $r = \dfrac{3}{6 + 5\operatorname{sen}\theta}$

65. ***Explorer 18*** El 27 de noviembre de 1963, Estados Unidos lanzó el Explorer 18. Sus puntos bajo y alto sobre la superficie de la Tierra fueron aproximadamente 119 millas y 123 000 millas, respectivamente (ver la figura). El centro de la Tierra es el foco de la órbita. Hallar la ecuación polar de la órbita y hallar la distancia entre la superficie de la Tierra y el satélite cuando $\theta = 60°$. (Tomar como radio de la Tierra 4 000 millas.)



66. ***Movimiento planetario*** Los planetas giran en órbitas elípticas con el Sol como uno de sus focos, como se muestra en la figura.



a) Mostrar que la ecuación polar de la órbita está dada por

$$r = \frac{(1 - e^2)a}{1 - e \cos \theta}$$

donde e es la excentricidad.

b) Mostrar que la distancia mínima (*perihelio*) entre el Sol y el planeta es $r = a(1 - e)$ y que la distancia máxima (*afelio*) es $r = a(1 + e)$.

En los ejercicios 67 a 70, usar el ejercicio 66 para hallar la ecuación polar de la órbita elíptica del planeta, así como las distancias en el perihelio y en el afelio.

67. Tierra $a = 1.496 \times 10^8$ kilómetros
$e = 0.0167$

68. Saturno $a = 1.427 \times 10^9$ kilómetros
$e = 0.0542$

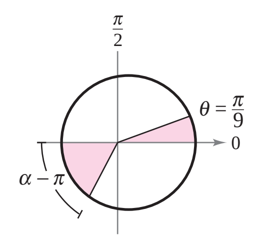
69. Neptuno $a = 4.498 \times 10^9$ kilómetros
$e = 0.0086$

70. Mercurio $a = 5.791 \times 10^7$ kilómetros
$e = 0.2056$

CAS **71.** ***Movimiento planetario*** En el ejercicio 69 se encontró la ecuación polar para la órbita elíptica de Neptuno. Usar la ecuación y un sistema algebraico por computadora.

a) Aproximar el área que barre un rayo que va del Sol al planeta cuando θ aumenta de 0 a $\pi/9$. Emplear este resultado para determinar cuántos años necesita Neptuno para recorrer este arco, si el periodo de una revolución alrededor del Sol es de 165 años.

b) Por ensayo y error, aproximar el ángulo α tal que el área barrida por un rayo que va del Sol al planeta cuando θ aumenta de π a α sea igual al área encontrada en el inciso *a*) (ver la figura). ¿Barre el rayo un ángulo mayor o menor que el del inciso *a*), para generar la misma área? ¿A qué se debe?



c) Aproximar las distancias que recorrió el planeta en los incisos *a*) y *b*). Usar estas distancias para aproximar la cantidad promedio de kilómetros al año que recorrió el planeta en los dos casos.

72. ***Cometa Hale-Bopp*** El cometa Hale-Bopp tiene una órbita elíptica con el Sol en uno de sus focos y una excentricidad de $e \approx 0.995$. La longitud del eje mayor de la órbita es aproximadamente 500 unidades astronómicas.

a) Hallar la longitud del eje menor.

b) Hallar la ecuación polar de la órbita.

c) Hallar distancias en el perihelio y en el afelio.

En los ejercicios 73 y 74, sea r_0 la distancia del foco al vértice más cercano, y r_1 la distancia del foco al vértice más lejano.

73. Mostrar que la excentricidad de una elipse puede expresarse como

$$e = \frac{r_1 - r_0}{r_1 + r_0}. \text{ Después mostrar que } \frac{r_1}{r_0} = \frac{1 + e}{1 - e}.$$

74. Mostrar que la excentricidad de una hipérbola puede expresarse como

$$e = \frac{r_1 + r_0}{r_1 - r_0}. \text{ Después, mostrar que } \frac{r_1}{r_0} = \frac{e + 1}{e - 1}.$$

En los ejercicios 75 y 76, mostrar que las gráficas de las ecuaciones dadas se cortan en ángulo recto.

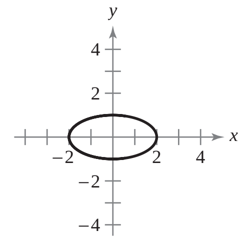
75. $r = \dfrac{ed}{1 + \operatorname{sen} \theta}$ y $r = \dfrac{ed}{1 - \operatorname{sen} \theta}$

76. $r = \dfrac{c}{1 + \cos \theta}$ y $r = \dfrac{d}{1 - \cos \theta}$

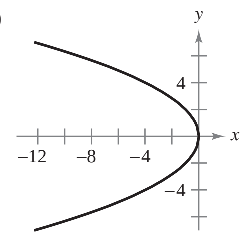
10 Ejercicios de repaso

En los ejercicios 1 a 6, hacer corresponder la ecuación con su gráfica. [Las gráficas están etiquetadas *a*), *b*), *c*), *d*), *e*) y *f*).]

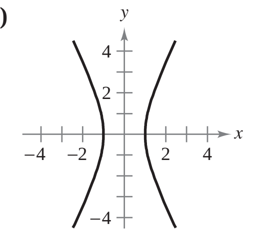
a)



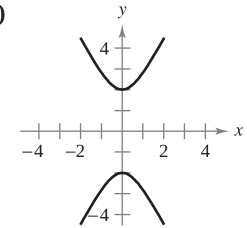
b)



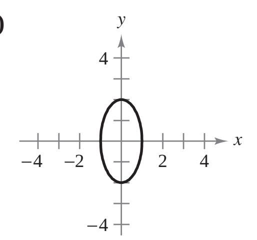
c)



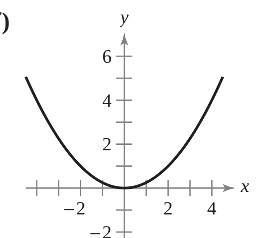
d)



e)



f)



1. $4x^2 + y^2 = 4$

2. $4x^2 - y^2 = 4$

3. $y^2 = -4x$

4. $y^2 - 4x^2 = 4$

5. $x^2 + 4y^2 = 4$

6. $x^2 = 4y$

En los ejercicios 7 a 12, analizar la ecuación y trazar su gráfica. Emplear una herramienta de graficación para confirmar los resultados.

7. $16x^2 + 16y^2 - 16x + 24y - 3 = 0$

8. $y^2 - 12y - 8x + 20 = 0$

9. $3x^2 - 2y^2 + 24x + 12y + 24 = 0$

10. $5x^2 + y^2 - 20x + 19 = 0$

11. $3x^2 + 2y^2 - 12x + 12y + 29 = 0$

12. $12x^2 - 12y^2 - 12x + 24y - 45 = 0$

En los ejercicios 13 y 14, hallar una ecuación de la parábola.

13. Vértice: $(0, 2)$; directriz: $x = -3$

14. Vértice: $(2, 6)$; foco: $(2, 4)$

En los ejercicios 15 y 16, hallar la ecuación de la elipse.

15. Vértices: $(-5, 0)$ $(7, 0)$; focos: $(-3, 0)$ $(5, 0)$

16. Centro: $(0, 0)$; puntos solución: $(1, 2)$, $(2, 0)$

En los ejercicios 17 y 18, hallar la ecuación de la hipérbola.

17. Vértice: $(\pm 7, 0)$; foco: $(\pm 9, 0)$

18. Foco: $(0, \pm 8)$; asíntotas: $y = \pm 4x$

En los ejercicios 19 y 20, usar una herramienta graficadora para aproximar al perímetro de la elipse.

19. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

20. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

21. Una recta es tangente a la parábola $y = x^2 - 2x + 2$ y perpendicular a la recta $y = x - 2$. Hallar la ecuación de la recta.

22. Una recta es tangente a la parábola $3x^2 + y = x - 6$ y perpendicular a la recta $2x + y = 5$. Hallar la ecuación de la recta.

23. ***Antena satelital*** La sección transversal de una gran antena parabólica se modela por medio de la gráfica de

$$y = \frac{x^2}{200}, \quad -100 \le x \le 100.$$

El equipo de recepción y transmisión se coloca en el foco.

a) Hallar las coordenadas del foco.

b) Hallar el área de la superficie de la antena.

24. ***Camión de bomberos*** Considerar un camión de bomberos con un tanque de agua que mide 16 pies de longitud, cuyas secciones transversales verticales son elipses que se describen por la ecuación

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

a) Hallar el volumen del tanque.

b) Hallar la fuerza ejercida sobre el fondo del tanque cuando está lleno de agua. (La densidad del agua es 62.4 libras por pie cuadrado.)

c) Hallar la profundidad del agua en el tanque si está lleno a $\frac{3}{4}$ de su capacidad (en volumen) y el camión se encuentra sobre un terreno nivelado.

d) Aproximar el área en la superficie del tanque.

En los ejercicios 25 a 32, trazar la curva representada por las ecuaciones paramétricas (indicar la orientación de la curva) y dar las ecuaciones rectangulares correspondientes mediante la eliminación del parámetro.

25. $x = 1 + 8t, \; y = 3 - 4t$

26. $x = t - 6, \; y = t^2$

27. $x = e^t - 1, \; y = e^{3t}$

28. $x = e^{4t}, \; y = t + 4$

29. $x = 6 \cos \theta, \; y = 6 \operatorname{sen} \theta$

30. $x = 2 + 5 \cos t, \; y = 3 + 2 \operatorname{sen} t$

31. $x = 2 + \sec \theta, \; y = 3 + \tan \theta$

32. $x = 5 \operatorname{sen}^3 \theta, \; y = 5 \cos^3 \theta$

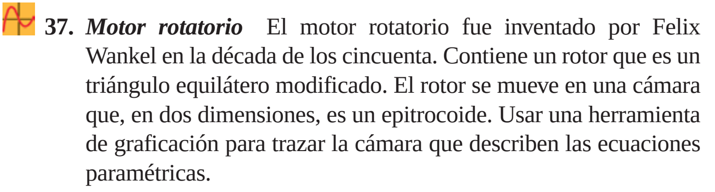
En los ejercicios 33 a 36, hallar una representación paramétrica de la recta o cónica.

33. Recta: pasa por $(-2, 6)$ y $(3, 2)$

34. Circunferencia: centro en $(-4, -5)$; radio 3

35. Elipse: centro en $(-3, 4)$; longitud del eje mayor horizontal 8 y longitud del eje menor 6

36. Hipérbola: vértice en $(0, \pm 4)$; foco en $(0, \pm 5)$



37. ***Motor rotatorio*** El motor rotatorio fue inventado por Felix Wankel en la década de los cincuenta. Contiene un rotor que es un triángulo equilátero modificado. El rotor se mueve en una cámara que, en dos dimensiones, es un epitrocoide. Usar una herramienta de graficación para trazar la cámara que describen las ecuaciones paramétricas.

$x = \cos 3\theta + 5 \cos \theta$

y

$y = \operatorname{sen} 3\theta + 5 \operatorname{sen} \theta.$

38. ***Curva serpentina*** Considerar las ecuaciones paramétricas $x = 2 \cot \theta$ y $y = 4 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$, $0 < \theta < \pi$.



a) Usar una herramienta de graficación para trazar la curva.

b) Eliminar el parámetro para mostrar que la ecuación rectangular de la curva serpentina es $(4 + x^2)y = 8x$.

En los ejercicios 39 a 48, *a*) hallar dy/dx y los puntos de tangencia horizontal, *b*) eliminar el parámetro cuando sea posible y *c*) trazar la curva representada por las ecuaciones paramétricas.

39. $x = 2 + 5t, \quad y = 1 - 4t$

40. $x = t - 6, \quad y = t^2$

41. $x = \dfrac{1}{t}, \quad y = 2t + 3$

42. $x = \dfrac{1}{t}, \quad y = t^2$

43. $x = \dfrac{1}{2t + 1}$, $y = \dfrac{1}{t^2 - 2t}$

44. $x = 2t - 1$, $y = \dfrac{1}{t^2 - 2t}$

45. $x = 5 + \cos \theta$, $y = 3 + 4 \operatorname{sen} \theta$

46. $x = 10 \cos \theta$, $y = 10 \operatorname{sen} \theta$

47. $x = \cos^3 \theta$, $y = 4 \operatorname{sen}^3 \theta$

48. $x = e^t$, $y = e^{-t}$

En los ejercicios 49 a 52, hallar todos los puntos (si los hay) de tangencia horizontal y vertical a la curva. Usar una herramienta de graficación para confirmar los resultados.

49. $x = 5 - t, \quad y = 2t^2$

50. $x = t + 2, \quad y = t^3 - 2t$

51. $x = 2 + 2 \operatorname{sen} \theta, \quad y = 1 + \cos \theta$

52. $x = 2 - 2 \cos \theta, \quad y = 2 \operatorname{sen} 2\theta$

En los ejercicios 53 y 54, *a*) usar una herramienta de graficación para trazar la curva representada por las ecuaciones paramétricas, *b*) usar una herramienta de graficación para hallar $dx/d\theta$, $dy/d\theta$ y dy/dx para $\theta = \pi/6$, y *c*) usar una herramienta de graficación para trazar la recta tangente a la curva cuando $\theta = \pi/6$.

53. $x = \cot \theta$, $y = \operatorname{sen} 2\theta$

54. $x = 2\theta - \operatorname{sen} \theta$, $y = 2 - \cos \theta$

Longitud de arco **En los ejercicios 55 y 56, hallar la longitud de arco de la curva en el intervalo que se indica.**

55. $x = r(\cos \theta + \theta \operatorname{sen} \theta)$, $y = r(\operatorname{sen} \theta - \theta \cos \theta)$, $0 \le \theta \le \pi$

56. $x = 6 \cos \theta$, $y = 6 \operatorname{sen} \theta$, $0 \le \theta \le \pi$

Área de una superficie **En los ejercicios 57 y 58, hallar el área de la superficie generada por revolución de la curva en torno *a*) al eje *x* y *b*) al eje *y*.**

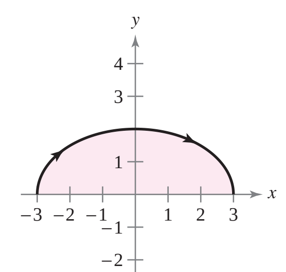
57. $x = t, \quad y = 3t, \quad 0 \le t \le 2$

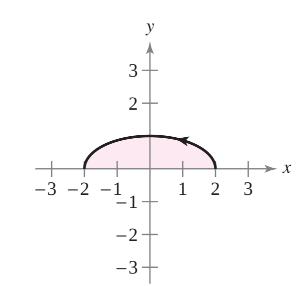
58. $x = 2 \cos \theta, \quad y = 2 \operatorname{sen} \theta, \quad 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$

Área **En los ejercicios 59 y 60, hallar el área de la región.**

59. $x = 3 \operatorname{sen} \theta$, $y = 2 \cos \theta$, $-\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$

60. $x = 2 \cos \theta$, $y = \operatorname{sen} \theta$, $0 \le \theta \le \pi$





En los ejercicios 61 a 64, representar gráficamente el punto en coordenadas polares y hallar las coordenadas rectangulares correspondientes al punto.

61. $\left(5, \dfrac{3\pi}{2}\right)$

62. $\left(-6, \dfrac{7\pi}{6}\right)$

63. $\left(\sqrt{3}, 1.56\right)$

64. $(-2, -2.45)$

En los ejercicios 65 a 68, se dan las coordenadas rectangulares de un punto. Representar gráficamente el punto y hallar *dos* pares de coordenadas polares del punto para $0 \le \theta < 2\pi$.

65. $(4, -4)$

66. $(0, -7)$

67. $(-1, 3)$

68. $\left(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}\right)$

En los ejercicios 69 a 76, pasar la ecuación polar a la forma rectangular.

69. $r = 3\cos\theta$

70. $r = 10$

71. $r = -2(1 + \cos\theta)$

72. $r = \dfrac{1}{2 - \cos\theta}$

73. $r^2 = \cos 2\theta$

74. $r = 4\sec\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)$

75. $r = 4\cos 2\theta \sec\theta$

76. $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$

En los ejercicios 77 a 80, transformar la ecuación rectangular a la forma polar.

77. $(x^2 + y^2)^2 = ax^2y$

78. $x^2 + y^2 - 4x = 0$

79. $x^2 + y^2 = a^2\left(\arctan\dfrac{y}{x}\right)^2$

80. $(x^2 + y^2)\left(\arctan\dfrac{y}{x}\right)^2 = a^2$

En los ejercicios 81 a 92, trazar la gráfica de la ecuación polar.

81. $r = 6$

82. $\theta = \dfrac{\pi}{12}$

83. $r = -\sec\theta$

84. $r = 3\csc\theta$

85. $r = -2(1 + \cos\theta)$

86. $r = 3 - 4\cos\theta$

87. $r = 4 - 3\cos\theta$

88. $r = 4\theta$

89. $r = -3\cos 2\theta$

90. $r = \cos 5\theta$

91. $r^2 = 4\,\text{sen}^2\, 2\theta$

92. $r^2 = \cos 2\theta$



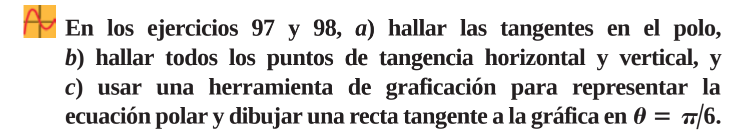
En los ejercicios 93 a 96, usar una herramienta de graficación para representar la ecuación polar.

93. $r = \dfrac{3}{\cos(\theta - \pi/4)}$

94. $r = 2\,\text{sen}\,\theta\,\cos^2\theta$

95. $r = 4\cos 2\theta \sec\theta$

96. $r = 4(\sec\theta - \cos\theta)$



En los ejercicios 97 y 98, *a*) hallar las tangentes en el polo, *b*) hallar todos los puntos de tangencia horizontal y vertical, y *c*) usar una herramienta de graficación para representar la ecuación polar y dibujar una recta tangente a la gráfica en $\theta = \pi/6$.

97. $r = 1 - 2\cos\theta$

98. $r^2 = 4\,\text{sen}\,2\theta$

En los ejercicios 99 y 100, mostrar que las gráficas de las ecuaciones polares son ortogonales en el punto de intersección. Usar una herramienta de graficación para confirmar los resultados.

99. $r = 1 + \cos\theta$
$r = 1 - \cos\theta$

100. $r = a\,\text{sen}\,\theta$
$r = a\cos\theta$

En los ejercicios 101 a 106, hallar el área de la región.

101. Un pétalo de $r = 3\cos 5\theta$

102. Un pétalo de $r = 2\,\text{sen}\,6\theta$

103. Interior de $r = 2 + \cos\theta$

104. Interior de $r = 5(1 - \text{sen}\,\theta)$

105. Interior de $r^2 = 4\,\text{sen}\,2\theta$

106. Interior común a $r = 4\cos\theta$ y $r = 2$

107. Encontrar los puntos de intersección de las gráficas de $r = 1 - \cos\theta$ y $r = 1 + \text{sen}\,\theta$.

108. Encontrar los puntos de intersección de las gráficas de $r = 1 + \text{sen}\,\theta$ y $r = 3\,\text{sen}\,\theta$.

En los ejercicios 109 a 112, usar una herramienta de graficación para representar la ecuación polar. Dar una integral para encontrar el área de la región dada y usar las funciones de integración de una herramienta de graficación para aproximar el valor de la integral con una precisión de dos cifras decimales.

109. Interior de $r = \text{sen}\,\theta\,\cos^2\theta$

110. Interior de $r = 4\,\text{sen}\,3\theta$

111. Interior común de $r = 3$ y $r^2 = 18\,\text{sen}\,2\theta$

112. Región limitada por el eje polar $r = e^{\theta}$ para $0 \leq \theta \leq \pi$

En los ejercicios 113 y 114, hallar la longitud de la curva sobre el intervalo dado.

	Ecuación polar	*Intervalo*
113.	$r = a(1 - \cos\theta)$	$0 \leq \theta \leq \pi$
114.	$r = a\cos 2\theta$	$-\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$



En los ejercicios 115 y 116, dar una integral que represente el área de la superficie generada por revolución de la curva en torno a una recta dada. Usar una herramienta de graficación para aproximar la integral.

	Ecuación polar	*Intervalo*	*Eje de revolución*
115.	$r = 1 + 4\cos\theta$	$0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$	Eje polar
116.	$r = 2\,\text{sen}\,\theta$	$0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$	$\theta = \dfrac{\pi}{2}$

En los ejercicios 117 a 122, trazar e identificar la gráfica. Usar una herramienta de graficación para confirmar los resultados.

117. $r = \dfrac{2}{1 - \text{sen}\,\theta}$

118. $r = \dfrac{2}{1 + \cos\theta}$

119. $r = \dfrac{6}{3 + 2\cos\theta}$

120. $r = \dfrac{4}{5 - 3\,\text{sen}\,\theta}$

121. $r = \dfrac{4}{2 - 3\,\text{sen}\,\theta}$

122. $r = \dfrac{8}{2 - 5\cos\theta}$

En los ejercicios 123 a 128, hallar la ecuación polar de la recta o cónica con su foco en el polo.

123. Círculo
Centro: $(5, \pi/2)$
Punto solución: $(0, 0)$

124. Recta
Punto solución: $(0, 0)$
Pendiente: $\sqrt{3}$

125. Parábola
Vértice: $(2, \pi)$

126. Parábola
Vértice: $(2, \pi/2)$

127. Elipse
Vértices: $(5, 0)$, $(1, \pi)$

128. Hipérbola
Vértices: $(1, 0)$, $(7, 0)$

SP Solución de problemas

1. Considerar la parábola $x^2 = 4y$ y la cuerda focal $y = \frac{3}{4}x + 1$.

a) Dibujar la gráfica de la parábola y la cuerda focal.

b) Mostrar que las rectas tangentes a la parábola en los extremos de la cuerda focal se cortan en ángulo recto.

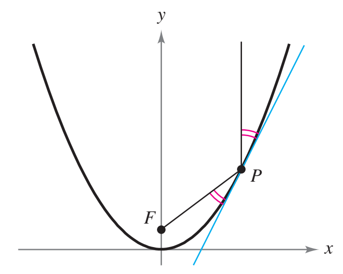
c) Mostrar que las rectas tangentes a la parábola en los extremos de la cuerda focal se cortan en la directriz de la parábola.

2. Considerar la parábola $x^2 = 4py$ y una de sus cuerdas focales.

a) Mostrar que las rectas tangentes a la parábola en los extremos de la cuerda focal se cortan en ángulos rectos.

b) Mostrar que las rectas tangentes a la parábola en los extremos de la cuerda focal se cortan en la directriz de la parábola.

3. Demostrar el teorema 10.2, la propiedad de reflexión de una parábola, como se ilustra en la figura.



4. Considerar la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con focos F_1 y F_2, como se ilustra en la figura. Sea T la recta tangente en un punto M de la hipérbola. Mostrar que los rayos de luz incidente en un foco son reflejados por un espejo hiperbólico hacia el otro foco.

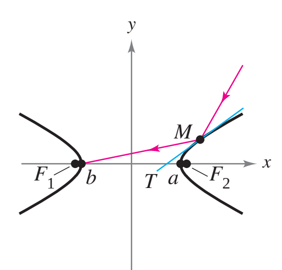


Figura para 4

Figura para 5

5. Considerar un círculo con radio a tangente al eje y y a la recta $x = 2a$, como se ilustra en la figura. Sea A el punto en el cual el segmento OB corta el círculo. La **cisoide de Diocles** consiste de todos los puntos P tales que $OP = AB$.

a) Hallar una ecuación polar de la cisoide.

b) Hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas para la cisoide que no contengan funciones trigonométricas.

c) Hallar la ecuación rectangular de la cisoide.

6. Considerar la región limitada por la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, con excentricidad $e = c/a$.

a) Mostrar que el área de la región es πab.

b) Mostrar que el volumen del sólido (esferoide oblato) generado por revolución de la región en torno al eje menor de la elipse es $V = 4\pi^2 b/3$ y el área de la superficie es

$$S = 2\pi a^2 + \pi\left(\frac{b^2}{e}\right)\ln\left(\frac{1+e}{1-e}\right).$$

c) Comprobar que el volumen del sólido (esferoide prolato) generado por revolución de la región alrededor del eje mayor de la elipse es $V = 4\pi ab^2/3$ y el área de la superficie es

$$S = 2\pi b^2 + 2\pi\left(\frac{ab}{e}\right)\operatorname{arcsen} e.$$

7. La curva descrita por las ecuaciones paramétricas

$$x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{y} \quad y(t) = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2}$$

se denomina **estrofoide**.

a) Hallar una ecuación rectangular de la estrofoide.

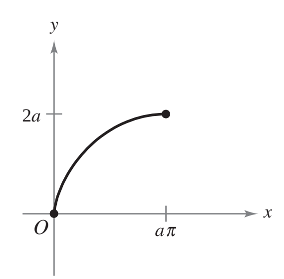
b) Hallar una ecuación polar de la estrofoide.

c) Trazar una gráfica de la estrofoide.

d) Hallar la ecuación de las dos rectas tangentes en el origen.

e) Hallar los puntos de la gráfica en los que las rectas tangentes son horizontales.

8. Hallar una ecuación rectangular para la porción de la cicloide dada por las ecuaciones paramétricas $x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta)$ y $y = a(1 - \cos\theta)$, $0 \le \theta \le \pi$, como se muestra en la figura.



9. Considerar la **espiral de Cornu** dada por

$$x(t) = \int_0^t \cos\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du \quad \text{y} \quad y(t) = \int_0^t \operatorname{sen}\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du.$$

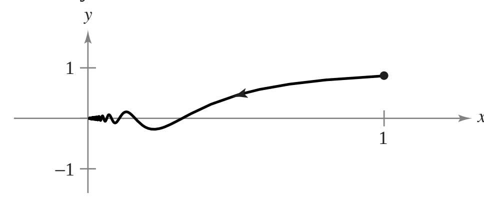


a) Usar una herramienta de graficación para representar la espiral en el intervalo $-\pi \le t \le \pi$.

b) Mostrar que la espiral cornu es simétrica respecto al origen.

c) Hallar la longitud de la espiral cornu desde $t = 0$ hasta $t = a$. ¿Cuál es la longitud de la espiral desde $t = -\pi$ hasta $t = \pi$?

10. Una partícula se mueve a lo largo de la trayectoria descrita por las ecuaciones paramétricas $x = 1/t$ y $y = \operatorname{sen} t/t$, con $1 \leq t < \infty$, como se muestra en la figura. Hallar la longitud de esta trayectoria.



11. Sean a y b constantes positivas. Hallar el área de la región del primer cuadrante limitada por la gráfica de la ecuación polar

$$r = \frac{ab}{(a \operatorname{sen}\theta + b\cos\theta)}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

12. Considerar el triángulo rectángulo de la figura.

a) Mostrar que el área del triángulo es $A(\alpha) = \frac{1}{2}\int_0^\alpha \sec^2\theta\, d\theta$.

b) Mostrar que $\tan\alpha = \int_0^\alpha \sec^2\theta\, d\theta$.

c) Usar el inciso *b*) para deducir la fórmula para la derivada de la función tangente.

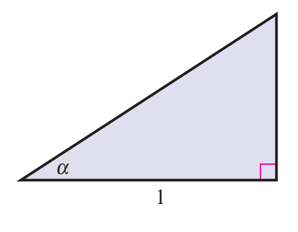


Figura para 12

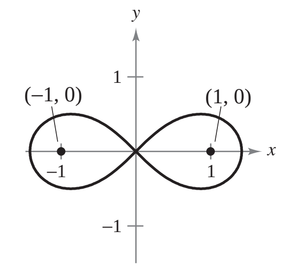
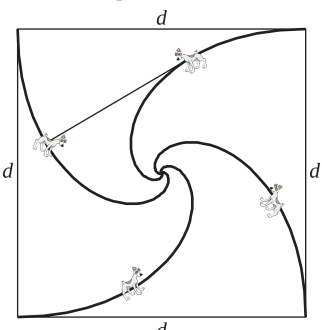


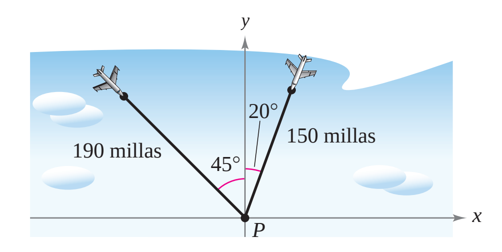
Figura para 13

13. Determinar la ecuación polar del conjunto de todos los puntos (r, θ), el producto de cuyas distancias desde los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$ es igual a 1, como se observa en la figura.

14. Cuatro perros se encuentran en las esquinas de un cuadrado con lados de longitud d. Todos los perros se mueven en sentido contrario al de las manecillas del reloj a la misma velocidad y en dirección al siguiente perro, como se muestra en la figura. Hallar la ecuación polar de la trayectoria de un perro a medida que se acerca en espiral hacia el centro del cuadrado.



15. Un controlador de tráfico aéreo ubica a la misma altitud dos aviones que vuelan uno hacia el otro (ver la figura). Sus trayectorias de vuelo son 20° y 315°. Un avión está a 150 millas del punto P con una velocidad de 375 millas por hora. El otro se encuentra a 190 millas del punto P con una velocidad de 450 millas por hora.



a) Hallar ecuaciones paramétricas para la trayectoria de cada avión donde t es tiempo en horas, y $t = 0$ corresponde al instante en que el controlador de tráfico aéreo localiza a los aviones.

b) Emplear el resultado del inciso *a*) para expresar la distancia entre los aviones como función de t.

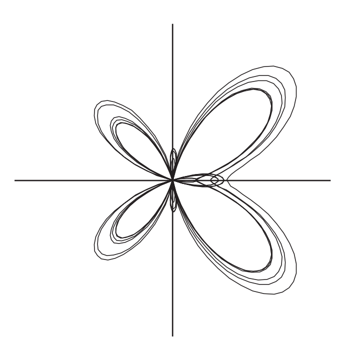


c) Usar una herramienta de graficación para representar la función del inciso *b*). ¿Cuándo será mínima la distancia entre los aviones? Si los aviones deben conservar una distancia entre ellos de por lo menos tres millas, ¿se satisface este requerimiento?

16. Usar una herramienta de graficación para trazar la curva que se muestra abajo. La curva está dada por

$$r = e^{\cos\theta} - 2\cos 4\theta + \operatorname{sen}^5 \frac{\theta}{12}.$$

¿Sobre qué intervalo debe variar θ para generar la curva?



PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre esta curva, consultar el artículo “A Study in Step Size” de Temple H. Fay en *Mathematics Magazine*.



17. Usar una herramienta de graficación para representar la ecuación polar $r = \cos 5\theta + n\cos\theta$, para $0 \leq \theta < \pi$ y para los enteros desde $n = -5$ hasta $n = 5$. ¿Qué valores de n producen la porción de la curva en forma de “corazón”? ¿Qué valores de n producen la porción de la curva en forma de “campana”? (Esta curva, creada por Michael W. Chamberlin, fue publicada en *The College Mathematics Journal*.)



11 Vectores y la geometría del espacio

En este capítulo se introducen los vectores y el sistema de coordenadas tridimensional. Los vectores se usan para representar rectas y planos, y también para representar cantidades como fuerza y velocidad. El sistema de coordenadas tridimensional se utiliza para representar superficies como elipsoides y conos elípticos. Gran parte del material en los capítulos restantes se fundamenta en el entendimiento de este sistema.

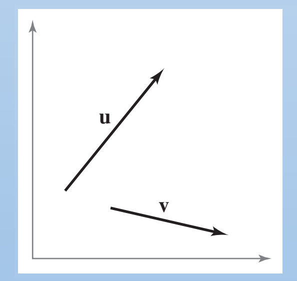
En este capítulo, se aprenderá:

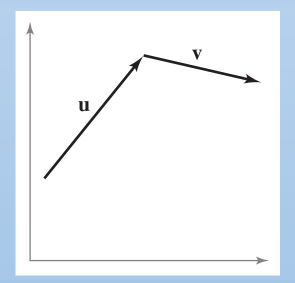
- Cómo escribir vectores, realizar operaciones vectoriales básicas y representar vectores de manera gráfica. (11.1)
- Cómo determinar puntos en un sistema de coordenadas tridimensional y analizar vectores en el espacio. (11.2)
- Cómo encontrar el producto escalar de dos vectores (en el plano y en el espacio). (11.3)
- Cómo encontrar el producto vectorial de dos vectores (en el espacio). (11.4)
- Cómo encontrar las ecuaciones de rectas y planos en el espacio, y cómo dibujar sus gráficas. (11.5)
- Cómo reconocer y escribir ecuaciones de superficies cilíndricas y cuadráticas y las superficies de revolución. (11.6)
- Cómo utilizar coordenadas cilíndricas y esféricas para representar superficies en el espacio. (11.7)

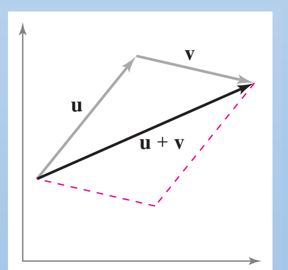


Mark Hunt/Hunt Stock

Dos remolcadores están empujando un barco trasatlántico, como se muestra en la foto. Cada barco ejerce una fuerza de 400 libras. ¿Cuál es la fuerza resultante en el barco trasatlántico? (Ver la sección 11.1, ejemplo 7.)







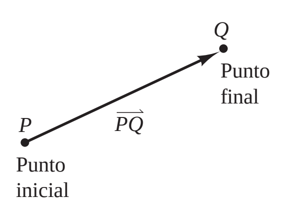
Los *vectores* indican cantidades que implican tanto magnitud como dirección. En el capítulo 11 se estudiarán operaciones de vectores en el plano y en el espacio. También se aprenderá cómo representar operaciones de vectores de manera geométrica. Por ejemplo, las gráficas que se muestran arriba representan adición de vectores en el plano.



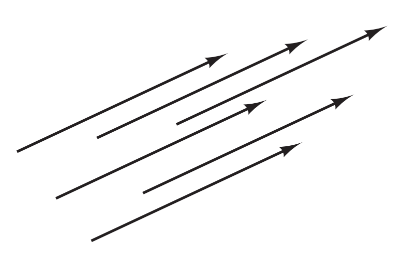
11.1 Vectores en el plano

- **Expresar un vector mediante sus componentes.**
- **Realizar operaciones vectoriales e interpretar los resultados geométricamente.**
- **Expresar un vector como combinación lineal de vectores unitarios estándar o canónicos.**
- **Usar vectores para resolver problemas de fuerza o velocidad.**

Las componentes de un vector



Un segmento de recta dirigido
Figura 11.1



Segmentos de recta dirigidos equivalentes
Figura 11.2

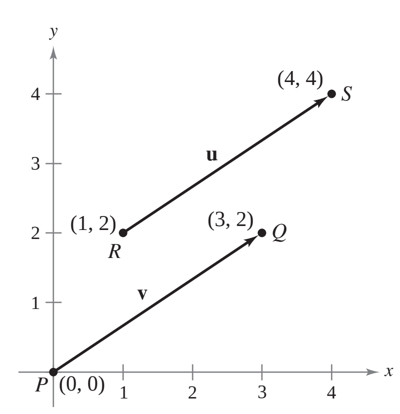
Muchas cantidades en geometría y física, como el área, el volumen, la temperatura, la masa y el tiempo, se pueden caracterizar por medio de un solo número real en unidades de medición apropiadas. Estas cantidades se llaman **escalares**, y al número real se le llama **escalar**.

Otras cantidades, como la fuerza, la velocidad y la aceleración, tienen magnitud y dirección y no pueden caracterizarse completamente por medio de un solo número real. Para representar estas cantidades se usa un **segmento de recta dirigido**, como se muestra en la figura 11.1. El segmento de recta dirigido $\overrightarrow{PQ}$ tiene como **punto inicial** P y como **punto final** Q y su **longitud** (o **magnitud**) se denota por $\|\overrightarrow{PQ}\|$. Segmentos de recta dirigidos que tienen la misma longitud y dirección son **equivalentes**, como se muestra en la figura 11.2. El conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos que son equivalentes a un segmento de recta dirigido dado $\overrightarrow{PQ}$ es un **vector en el plano** y se denota por $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$. En los libros, los vectores se denotan normalmente con letras minúsculas, en negrita, como **u**, **v** y **w**. Cuando se escriben a mano, se suelen denotar por medio de letras con una flecha sobre ellas, como $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

Es importante notar que un vector en el plano se puede representar por medio de muchos segmentos de recta dirigidos diferentes, todos apuntando en la misma dirección y todos de la misma longitud.

EJEMPLO 1 Representación de vectores por medio de segmentos de recta dirigidos

Sea **v** el vector representado por el segmento dirigido que va de (0, 0) a (3, 2), y sea **u** el vector representado por el segmento dirigido que va de (1, 2) a (4, 4). Mostrar que **v** y **u** son equivalentes.



Los vectores **u** y **v** son iguales
Figura 11.3

Solución Sean $P(0, 0)$ y $Q(3, 2)$ los puntos inicial y final de **v**, y sean $R(1, 2)$ y $S(4, 4)$ los puntos inicial y final de **u**, como se muestra en la figura 11.3. Para mostrar que $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ tienen la *misma longitud* se usa la fórmula de la distancia.

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(3-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{13} \qquad \text{Longitud de } \overrightarrow{PQ}.$$

$$\|\overrightarrow{RS}\| = \sqrt{(4-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{13} \qquad \text{Longitud de } \overrightarrow{RS}.$$

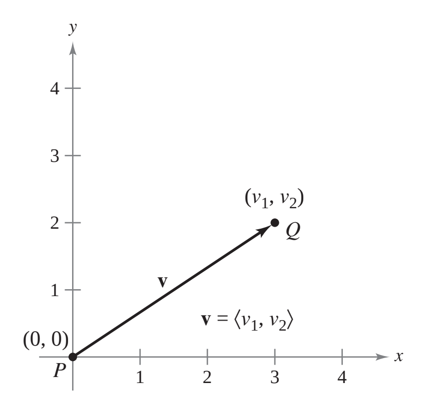
Los dos segmentos tienen la *misma dirección*, porque ambos están dirigidos hacia la derecha y hacia arriba sobre rectas que tienen la misma pendiente.

$$\text{Pendiente de } \overrightarrow{PQ} = \frac{2-0}{3-0} = \frac{2}{3}$$

y

$$\text{Pendiente de } \overrightarrow{RS} = \frac{4-2}{4-1} = \frac{2}{3}$$

Como $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ tienen la misma longitud y la misma dirección, se concluye que los dos vectores son equivalentes. Es decir, **v** y **u** son equivalentes.



Posición estándar de un vector
Figura 11.4

El segmento de recta dirigido cuyo punto inicial es el origen a menudo se considera el representante más adecuado de un conjunto de segmentos de recta dirigidos equivalentes como los que se muestran en la figura 11.3. Se dice que esta representación de **v** está en la **posición canónica** o **estándar**. Un segmento de recta dirigido cuyo punto inicial es el origen puede representarse de manera única por medio de las coordenadas de su punto final $Q(v_1, v_2)$, como se muestra en la figura 11.4.

DEFINICIÓN DE UN VECTOR EN EL PLANO MEDIANTE SUS COMPONENTES

Si **v** es un vector en el plano cuyo punto inicial es el origen y cuyo punto final es (v_1, v_2), entonces el vector **v** queda dado mediante sus componentes de la siguiente manera

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle.$$

Las coordenadas v_1 y v_2 son las **componentes de v**. Si el punto inicial y el punto final están en el origen, entonces **v** es el **vector cero** (o **vector nulo**) y se denota por $\mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle$.

Esta definición implica que dos vectores $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ son **iguales** si y sólo si $u_1 = v_1$ y $u_2 = v_2$.

Los procedimientos siguientes pueden usarse para convertir un vector dado mediante un segmento de recta dirigido en un vector dado mediante sus componentes o viceversa.

1. Si $P(p_1, p_2)$ y $Q(q_1, q_2)$ son los puntos inicial y final de un segmento de recta dirigido, el vector **v** representado por $\overrightarrow{PQ}$, dado mediante sus componentes, es $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle q_1 - p_1, q_2 - p_2 \rangle$. Además, de la fórmula de la distancia es posible ver que la **longitud** (o **magnitud**) **de v** es

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\| &= \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2} \\ &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2}. \end{aligned}$$

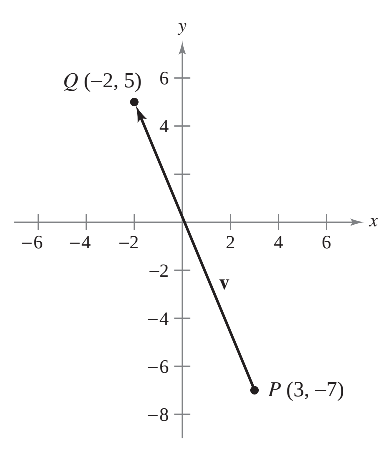
Longitud de un vector.

2. Si $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$, **v** puede representarse por el segmento de recta dirigido, en la posición canónica o estándar, que va de $P(0, 0)$ a $Q(v_1, v_2)$.

A la longitud de **v** también se le llama la **norma de v**. Si $\|\mathbf{v}\| = 1$, **v** es un **vector unitario**. Y $\|\mathbf{v}\| = 0$ si y sólo si **v** es el vector cero **0**.

EJEMPLO 2 Hallar las componentes y la longitud de un vector

Hallar las componentes y la longitud del vector **v** que tiene el punto inicial $(3, -7)$ y el punto final $(-2, 5)$.



Vector **v** dado por medio de sus componentes: $\mathbf{v} = \langle -5, 12 \rangle$
Figura 11.5

Solución Sean $P(3, -7) = (p_1, p_2)$ y $Q(-2, 5) = (q_1, q_2)$. Entonces las componentes de $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ son

$$\begin{aligned} v_1 &= q_1 - p_1 = -2 - 3 = -5 \\ v_2 &= q_2 - p_2 = 5 - (-7) = 12. \end{aligned}$$

Así, como se muestra en la figura 11.5, $\mathbf{v} = \langle -5, 12 \rangle$, y la longitud de **v** es

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\| &= \sqrt{(-5)^2 + 12^2} \\ &= \sqrt{169} \\ &= 13. \end{aligned}$$

Operaciones con vectores

DEFINICIÓN DE LA SUMA DE VECTORES Y DE LA MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR

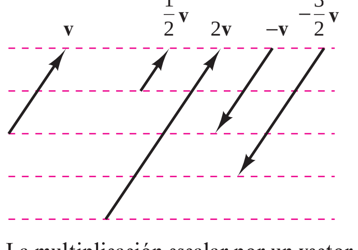
Sean $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ vectores y sea c un escalar.

1. La **suma vectorial** de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es el vector $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2 \rangle$.
2. El **múltiplo escalar** de c y $\mathbf{u}$ es el vector $c\mathbf{u} = \langle cu_1, cu_2 \rangle$.
3. El **negativo** de $\mathbf{v}$ es el vector

$$-\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v} = \langle -v_1, -v_2 \rangle.$$

4. La **diferencia** de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es

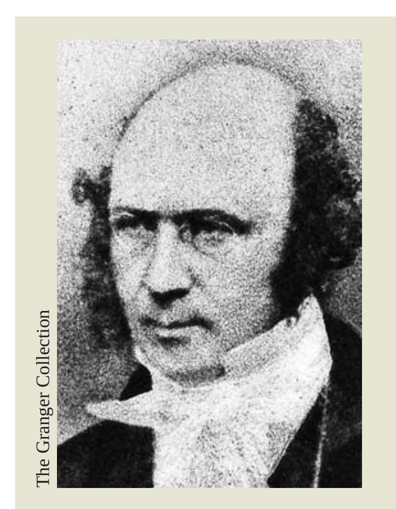
$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v}) = \langle u_1 - v_1, u_2 - v_2 \rangle.$$



La multiplicación escalar por un vector **v**
Figura 11.6

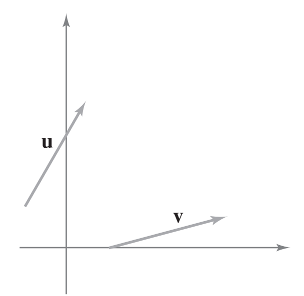
Geométricamente, el múltiplo escalar de un vector **v** y un escalar c es el vector que tiene $|c|$ veces la longitud de **v**, como se muestra en la figura 11.6. Si c es positivo, $c\mathbf{v}$ tiene la misma dirección que **v**. Si c es negativo, $c\mathbf{v}$ tiene dirección opuesta.

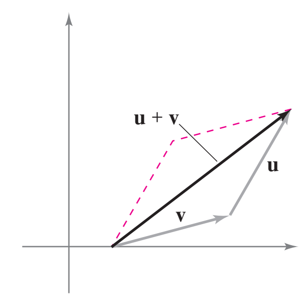
La suma de dos vectores puede representarse geométricamente colocando los vectores (sin cambiar sus magnitudes o sus direcciones) de manera que el punto inicial de uno coincida con el punto final del otro, como se muestra en la figura 11.7. El vector $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, llamado el **vector resultante**, es la diagonal de un paralelogramo que tiene **u** y **v** como lados adyacentes.



William Rowan Hamilton (1805-1865)

Algunos de los primeros trabajos con vectores fueron realizados por el matemático irlandés William Rowan Hamilton. Hamilton dedicó muchos años a desarrollar un sistema de cantidades semejantes a vectores llamados *cuaterniones*. Aunque Hamilton estaba convencido de las ventajas de los cuaterniones, las operaciones que definió no resultaron ser buenos modelos para los fenómenos físicos. No fue sino hasta la segunda mitad del siglo XIX cuando el físico escocés James Maxwell (1831-1879) reestructuró la teoría de los cuaterniones de Hamilton dándole una forma útil para la representación de cantidades como fuerza, velocidad y aceleración.





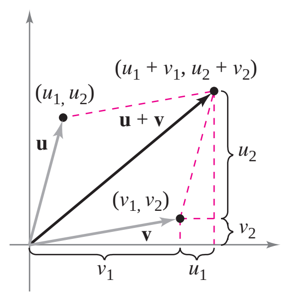
Para hallar $\mathbf{u} + \mathbf{v}$,

1) hacer coincidir el punto inicial de **v** con el punto final de **u**, o bien

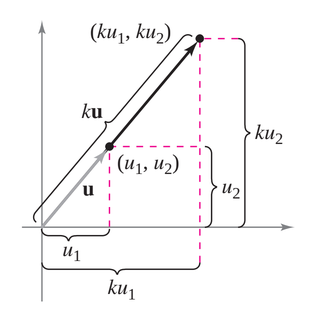
2) hacer coincidir el punto inicial de **u** con el punto final de **v**

Figura 11.7

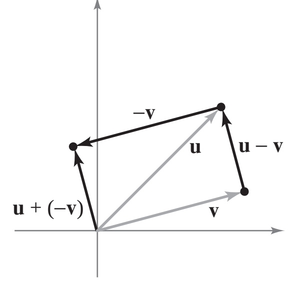
La figura 11.8 muestra la equivalencia de las definiciones geométricas y algebraicas de la suma de vectores y la multiplicación por un escalar y presenta (en el extremo derecho) una interpretación geométrica de $\mathbf{u} - \mathbf{v}$.



Suma vectorial



Multiplicación escalar



Sustracción de vectores

Figura 11.8

EJEMPLO 3 Operaciones con vectores

Dados $\mathbf{v} = \langle -2, 5\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 3, 4\rangle$, encontrar cada uno de los vectores.

a) $\frac{1}{2}\mathbf{v}$ ***b)*** $\mathbf{w} - \mathbf{v}$ ***c)*** $\mathbf{v} + 2\mathbf{w}$

Solución

a) $\frac{1}{2}\mathbf{v} = \left\langle \frac{1}{2}(-2), \frac{1}{2}(5)\right\rangle = \left\langle -1, \frac{5}{2}\right\rangle$

b) $\mathbf{w} - \mathbf{v} = \langle w_1 - v_1, w_2 - v_2\rangle = \langle 3 - (-2), 4 - 5\rangle = \langle 5, -1\rangle$

c) Usando $2\mathbf{w} = \langle 6, 8\rangle$, se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{v} + 2\mathbf{w} &= \langle -2, 5\rangle + \langle 6, 8\rangle \\ &= \langle -2 + 6, 5 + 8\rangle \\ &= \langle 4, 13\rangle.\end{aligned}$$

La suma de vectores y la multiplicación por un escalar comparten muchas propiedades con la aritmética ordinaria, como se muestra en el teorema siguiente.

TEOREMA 11.1 PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES CON VECTORES

Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ los vectores en el plano, y sean c y d escalares.

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ — Propiedad conmutativa.
2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ — Propiedad asociativa.
3. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ — Propiedad de la identidad aditiva.
4. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ — Propiedad del inverso aditivo.
5. $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$
6. $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$ — Propiedad distributiva.
7. $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$ — Propiedad distributiva.
8. $1(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$, $0(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

DEMOSTRACIÓN La demostración de la *propiedad asociativa* de la suma de vectores utiliza la propiedad asociativa de la suma de números reales.

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} &= [\langle u_1, u_2\rangle + \langle v_1, v_2\rangle] + \langle w_1, w_2\rangle \\ &= \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2\rangle + \langle w_1, w_2\rangle \\ &= \langle (u_1 + v_1) + w_1, (u_2 + v_2) + w_2\rangle \\ &= \langle u_1 + (v_1 + w_1), u_2 + (v_2 + w_2)\rangle \\ &= \langle u_1, u_2\rangle + \langle v_1 + w_1, v_2 + w_2\rangle = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})\end{aligned}$$

Asimismo, la demostración de la *propiedad distributiva* de la multiplicación escalar depende de la propiedad distributiva para los números reales.

$$\begin{aligned}(c + d)\mathbf{u} &= (c + d)\langle u_1, u_2\rangle \\ &= \langle (c + d)u_1, (c + d)u_2\rangle \\ &= \langle cu_1 + du_1, cu_2 + du_2\rangle \\ &= \langle cu_1, cu_2\rangle + \langle du_1, du_2\rangle = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}\end{aligned}$$

Las otras propiedades pueden demostrarse de manera similar.


The Granger Collection

EMMY NOETHER (1882-1935)

La matemática alemana Emmy Noether contribuyó a nuestro conocimiento de los sistemas axiomáticos. Noether generalmente se reconoce como la principal matemática de la historia reciente.

PARA MAYOR INFORMACIÓN
Para más información acerca de Emmy Noether, ver el artículo "Emmy Noether, Greatest Woman Mathematician" de Clark Kimberling en *The Mathematics Teacher*.

Cualquier conjunto de vectores (junto con un conjunto de escalares) que satisfaga las ocho propiedades dadas en el teorema 11.1 es un **espacio vectorial**.* Las ocho propiedades son los *axiomas del espacio vectorial*. Por tanto, este teorema establece que el conjunto de vectores en el plano (con el conjunto de los números reales) forma un espacio vectorial.

TEOREMA 11.2 LONGITUD DE UN MÚLTIPLO ESCALAR

Sea $\mathbf{v}$ un vector y sea c un escalar. Entonces

$$\|c\mathbf{v}\| = |c|\,\|\mathbf{v}\|.$$ $|c|$ es el valor absoluto de c.

DEMOSTRACIÓN Como $c\mathbf{v} = \langle cv_1, cv_2\rangle$, se tiene que

$$\begin{aligned}\|c\mathbf{v}\| = \|\langle cv_1, cv_2\rangle\| &= \sqrt{(cv_1)^2 + (cv_2)^2}\\ &= \sqrt{c^2v_1^2 + c^2v_2^2}\\ &= \sqrt{c^2(v_1^2 + v_2^2)}\\ &= |c|\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\\ &= |c|\,\|\mathbf{v}\|.\end{aligned}$$

En muchas aplicaciones de los vectores, es útil encontrar un vector unitario que tenga la misma dirección que un vector dado. El teorema siguiente da un procedimiento para hacer esto.

TEOREMA 11.3 VECTOR UNITARIO EN LA DIRECCIÓN DE v

Si $\mathbf{v}$ es un vector distinto de cero en el plano, entonces el vector

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$$

tiene longitud 1 y la misma dirección que $\mathbf{v}$.

DEMOSTRACIÓN Como $1/\|\mathbf{v}\|$ es positivo y $\mathbf{u} = (1/\|\mathbf{v}\|)\mathbf{v}$, se puede concluir que $\mathbf{u}$ tiene la misma dirección que $\mathbf{v}$. Para ver que $\|\mathbf{u}\| = 1$, se observa que

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\| &= \left\|\left(\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\right)\mathbf{v}\right\|\\ &= \left|\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\right|\,\|\mathbf{v}\|\\ &= \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\,\|\mathbf{v}\|\\ &= 1.\end{aligned}$$

Por tanto, $\mathbf{u}$ tiene longitud 1 y la misma dirección que $\mathbf{v}$.

Al vector $\mathbf{u}$ del teorema 11.3 se le llama un **vector unitario en la dirección de v**. El proceso de multiplicar $\mathbf{v}$ por $1/\|\mathbf{v}\|$ para obtener un vector unitario se llama **normalización de v**.

* *Para más información sobre espacios vectoriales, ver* Elementary Linear Algebra, *6a. ed., por Larson, Edwards y Falvo (Boston: Houghton Mifflin Company, 2009).*

EJEMPLO 4 Hallar un vector unitario

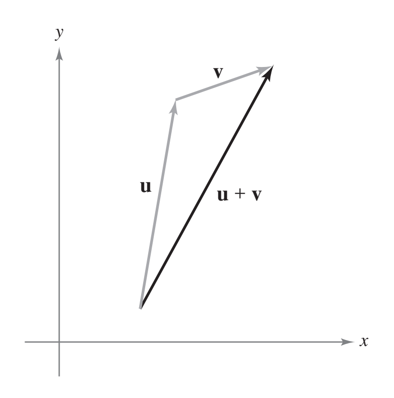
Hallar un vector unitario en la dirección de $\mathbf{v} = \langle -2, 5\rangle$ y verificar que tiene longitud 1.

Solución Por el teorema 11.3, el vector unitario en la dirección de **v** es

$$\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\langle -2, 5\rangle}{\sqrt{(-2)^2 + (5)^2}} = \frac{1}{\sqrt{29}}\langle -2, 5\rangle = \left\langle \frac{-2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}\right\rangle.$$

Este vector tiene longitud 1, porque

$$\sqrt{\left(\frac{-2}{\sqrt{29}}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{29}}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{29} + \frac{25}{29}} = \sqrt{\frac{29}{29}} = 1.$$



Desigualdad del triángulo
Figura 11.9

Generalmente, la longitud de la suma de dos vectores no es igual a la suma de sus longitudes. Para ver esto, basta tomar los vectores **u** y **v** de la figura 11.9. Considerando a **u** y **v** como dos de los lados de un triángulo, se puede ver que la longitud del tercer lado es $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$, y se tiene

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|.$$

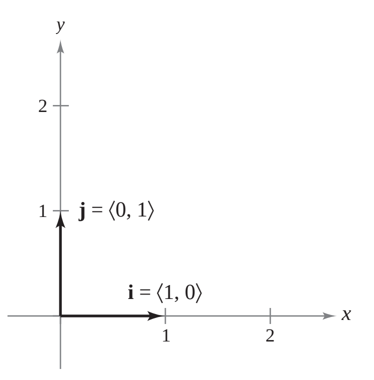
La igualdad sólo se da si los vectores **u** y **v** tienen la *misma dirección*. A este resultado se le llama la **desigualdad del triángulo** para vectores. (En el ejercicio 91, sección 11.3, se pide demostrar esto.)

Vectores unitarios canónicos o estándar

A los vectores unitarios $\langle 1, 0\rangle$ y $\langle 0, 1\rangle$ se les llama **vectores unitarios canónicos o estándar** en el plano y se denotan por

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle \quad \text{y} \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$$

Vectores unitarios canónicos o estándar.



Vectores unitarios canónicos o estándar **i** y **j**
Figura 11.10

como se muestra en la figura 11.10. Estos vectores pueden usarse para representar cualquier vector de manera única, como sigue.

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle = \langle v_1, 0\rangle + \langle 0, v_2\rangle = v_1\langle 1, 0\rangle + v_2\langle 0, 1\rangle = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$$

Al vector $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$ se le llama una **combinación lineal** de **i** y **j**. A los escalares v_1 y v_2 se les llama las **componentes horizontal** y **vertical de v**.

EJEMPLO 5 Expresar un vector como combinación lineal de vectores unitarios

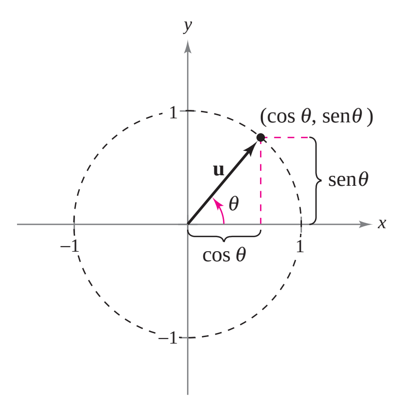
Sea **u** el vector con punto inicial $(2, -5)$ y punto final $(-1, 3)$, y sea $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$. Expresar cada vector como combinación lineal de **i** y **j**.

a) **u** *b)* $\mathbf{w} = 2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$

Solución

a) $\mathbf{u} = \langle q_1 - p_1, q_2 - p_2\rangle$
$= \langle -1 - 2, 3 - (-5)\rangle$
$= \langle -3, 8\rangle = -3\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$

b) $\mathbf{w} = 2\mathbf{u} - 3\mathbf{v} = 2(-3\mathbf{i} + 8\mathbf{j}) - 3(2\mathbf{i} - \mathbf{j})$
$= -6\mathbf{i} + 16\mathbf{j} - 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
$= -12\mathbf{i} + 19\mathbf{j}$



Ángulo θ desde el eje x positivo hasta el vector **u**
Figura 11.11

Si **u** es un vector unitario y θ es el ángulo (medido en sentido contrario a las manecillas del reloj) desde el eje x positivo hasta **u**, el punto final de **u** está en el círculo unitario, y se tiene

$$\mathbf{u} = \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta \rangle = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j} \qquad \text{Vector unitario.}$$

como se muestra en la figura 11.11. Además, cualquier vector distinto de cero **v** que forma un ángulo θ con el eje x positivo tiene la misma dirección que **u** y se puede escribir

$$\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta \rangle = \|\mathbf{v}\|\cos\theta\mathbf{i} + \|\mathbf{v}\|\operatorname{sen}\theta\mathbf{j}.$$

EJEMPLO 6 Escribir un vector de magnitud y dirección dadas

El vector **v** tiene una magnitud de 3 y forma un ángulo de $30° = \pi/6$ con el eje x positivo. Expresar **v** como combinación lineal de los vectores unitarios **i** y **j**.

Solución Como el ángulo entre **v** y el eje x positivo es $\theta = \pi/6$, se puede escribir lo siguiente.

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \|\mathbf{v}\|\cos\theta\mathbf{i} + \|\mathbf{v}\|\operatorname{sen}\theta\mathbf{j}\\ &= 3\cos\frac{\pi}{6}\mathbf{i} + 3\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\mathbf{j}\\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{3}{2}\mathbf{j}\end{aligned}$$

Aplicaciones de los vectores

Los vectores tienen muchas aplicaciones en física e ingeniería. Un ejemplo es la fuerza. Un vector puede usarse para representar fuerza porque la fuerza tiene magnitud y dirección. Si dos o más fuerzas están actuando sobre un objeto, entonces la **fuerza resultante** sobre el objeto es la suma vectorial de los vectores que representan las fuerzas.

EJEMPLO 7 Hallar la fuerza resultante

Dos botes remolcadores están empujando un barco, como se muestra en la figura 11.12. Cada bote remolcador está ejerciendo una fuerza de 400 libras. ¿Cuál es la fuerza resultante sobre el barco?

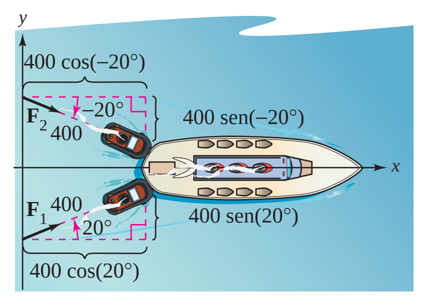
Solución Usando la figura 11.12, se pueden representar las fuerzas ejercidas por el primer y segundo botes remolcadores como

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1 &= 400\langle \cos 20°, \operatorname{sen} 20° \rangle\\ &= 400\cos(20°)\mathbf{i} + 400\operatorname{sen}(20°)\mathbf{j}\\ \mathbf{F}_2 &= 400\langle \cos(-20°), \operatorname{sen}(-20°) \rangle\\ &= 400\cos(20°)\mathbf{i} - 400\operatorname{sen}(20°)\mathbf{j}.\end{aligned}$$

La fuerza resultante sobre el barco es

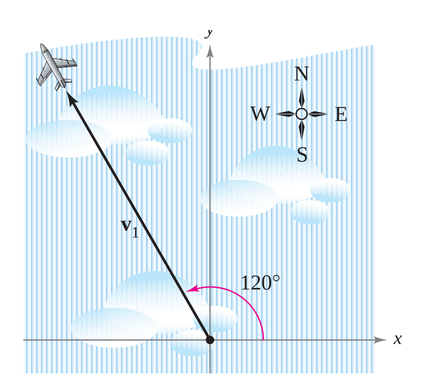
$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2\\ &= [400\cos(20°)\mathbf{i} + 400\operatorname{sen}(20°)\mathbf{j}] + [400\cos(20°)\mathbf{i} - 400\operatorname{sen}(20°)\mathbf{j}]\\ &= 800\cos(20°)\mathbf{i}\\ &\approx 752\mathbf{i}.\end{aligned}$$

Por tanto, la fuerza resultante sobre el barco es aproximadamente 752 libras en la dirección del eje x positivo.

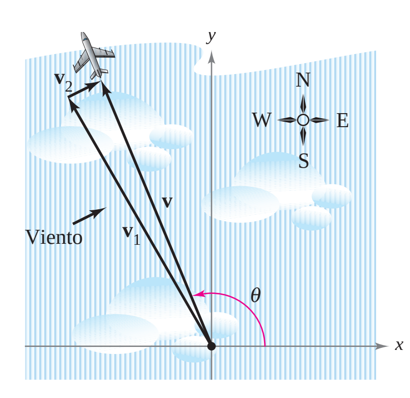


Fuerza resultante sobre el barco ejercida por los dos remolcadores
Figura 11.12

En levantamientos topográficos y en la navegación, un **rumbo** es una dirección que mide el ángulo agudo que una trayectoria o línea de mira forma con una recta fija norte-sur. En la navegación aérea, los rumbos se miden en el sentido de las manecillas del reloj en grados desde el norte.



a) Dirección sin viento



b) Dirección con viento
Figura 11.13

EJEMPLO 8 Hallar una velocidad

Un avión viaja a una altitud fija con un factor de viento despreciable, y mantiene una velocidad de 500 millas por hora con un rumbo de 330°, como se muestra en la figura 11.13*a*. Cuando alcanza cierto punto, el avión encuentra un viento con una velocidad de 70 millas por hora en dirección 45° NE (45° este del norte), como se muestra en la figura 11.13*b*. ¿Cuáles son la velocidad y la dirección resultantes del avión?

Solución Usando la figura 11.13*a*, representar la velocidad del avión (solo) como

$$\mathbf{v}_1 = 500\cos(120°)\mathbf{i} + 500\operatorname{sen}(120°)\mathbf{j}.$$

La velocidad del viento se representa por el vector

$$\mathbf{v}_2 = 70\cos(45°)\mathbf{i} + 70\operatorname{sen}(45°)\mathbf{j}.$$

La velocidad resultante del avión (en el viento) es

$$\begin{aligned}\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 &= 500\cos(120°)\mathbf{i} + 500\operatorname{sen}(120°)\mathbf{j} + 70\cos(45°)\mathbf{i} + 70\operatorname{sen}(45°)\mathbf{j}\\ &\approx -200.5\mathbf{i} + 482.5\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Para encontrar la velocidad y la dirección resultantes, escribir $\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|(\cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j})$. Como $\|\mathbf{v}\| \approx \sqrt{(-200.5)^2 + (482.5)^2} \approx 522.5$, se puede escribir

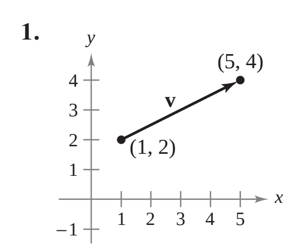
$$\mathbf{v} \approx 522.5\left(\frac{-200.5}{522.5}\mathbf{i} + \frac{482.5}{522.5}\mathbf{j}\right) \approx 522.5,[\cos(112.6°)\mathbf{i} + \operatorname{sen}(112.6°)\mathbf{j}].$$

La nueva velocidad del avión, alterada por el viento, es aproximadamente 522.5 millas por hora en una trayectoria que forma un ángulo de 112.6° con el eje x positivo.

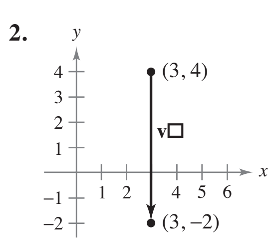
11.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, *a*) dar el vector v mediante sus componentes y *b*) dibujar el vector con su punto inicial en el origen.

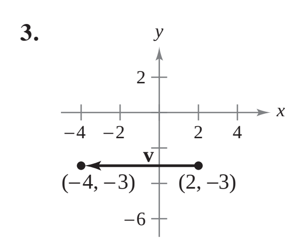
1.



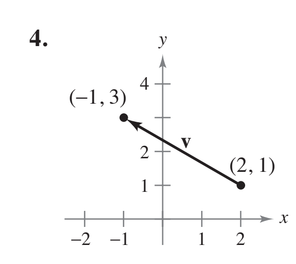
2.



3.



4.



En los ejercicios 5 a 8, hallar los vectores u y v cuyos puntos inicial y final se dan. Mostrar que u y v son equivalentes.

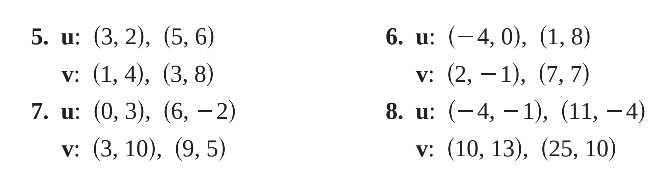
5. **u**: (3, 2), (5, 6)
v: (1, 4), (3, 8)

6. **u**: (−4, 0), (1, 8)
v: (2, −1), (7, 7)

7. **u**: (0, 3), (6, −2)
v: (3, 10), (9, 5)

8. **u**: (−4, −1), (11, −4)
v: (10, 13), (25, 10)

En los ejercicios 9 a 16, se dan los puntos inicial y final de un vector v. *a*) Dibujar el segmento de recta dirigido dado, *b*) expresar el vector mediante sus componentes, *c*) expresar el vector como la combinación lineal de los vectores unitarios estándar i y j y *d*) dibujar el vector con el punto inicial en el origen.



	Punto inicial	*Punto final*		*Punto inicial*	*Punto final*
9.	(2, 0)	(5, 5)	**10.**	(4, −6)	(3, 6)
11.	(8, 3)	(6, −1)	**12.**	(0, −4)	(−5, −1)

	Punto inicial	*Punto final*		*Punto inicial*	*Punto final*
13.	$(6, 2)$	$(6, 6)$	**14.**	$(7, -1)$	$(-3, -1)$
15.	$\left(\frac{3}{2}, \frac{4}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, 3\right)$	**16.**	$(0.12, 0.60)$	$(0.84, 1.25)$

En los ejercicios 17 y 18, dibujar cada uno de los múltiplos escalares de v.

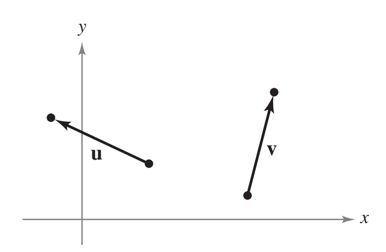
17. $\mathbf{v} = \langle 3, 5\rangle$

a) $2\mathbf{v}$ *b)* $-3\mathbf{v}$ *c)* $\frac{7}{2}\mathbf{v}$ *d)* $\frac{2}{3}\mathbf{v}$

18. $\mathbf{v} = \langle -2, 3\rangle$

a) $4\mathbf{v}$ *b)* $-\frac{1}{2}\mathbf{v}$ *c)* $0\mathbf{v}$ *d)* $-6\mathbf{v}$

En los ejercicios 19 a 22, usar la figura para representar gráficamente el vector.



19. $-\mathbf{u}$ **20.** $2\mathbf{u}$

21. $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ **22.** $\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$

En los ejercicios 23 y 24, hallar *a)* $\frac{2}{3}\mathbf{u}$, *b)* $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ y *c)* $2\mathbf{u} + 5\mathbf{v}$.

23. $\mathbf{u} = \langle 4, 9\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, -5\rangle$

24. $\mathbf{u} = \langle -3, -8\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 8, 25\rangle$

En los ejercicios 25 a 28, hallar el vector v donde $\mathbf{u} = \langle 2, -1\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 1, 2\rangle$. Ilustrar geométricamente las operaciones vectoriales.

25. $\mathbf{v} = \frac{3}{2}\mathbf{u}$ **26.** $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$

27. $\mathbf{v} = \mathbf{u} + 2\mathbf{w}$ **28.** $\mathbf{v} = 5\mathbf{u} - 3\mathbf{w}$

En los ejercicios 29 y 30 se dan el vector v y su punto inicial. Hallar el punto final.

29. $\mathbf{v} = \langle -1, 3\rangle$; punto inicial: $(4, 2)$

30. $\mathbf{v} = \langle 4, -9\rangle$; punto inicial: $(5, 3)$

En los ejercicios 31 a 36, encontrar la magnitud de v.

31. $\mathbf{v} = 7\mathbf{i}$ **32.** $\mathbf{v} = -3\mathbf{i}$

33. $\mathbf{v} = \langle 4, 3\rangle$ **34.** $\mathbf{v} = \langle 12, -5\rangle$

35. $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ **36.** $\mathbf{v} = -10\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

En los ejercicios 37 a 40, hallar el vector unitario en la dirección de v y verificar que tiene longitud 1.

37. $\mathbf{v} = \langle 3, 12\rangle$ **38.** $\mathbf{v} = \langle -5, 15\rangle$

39. $\mathbf{v} = \left\langle \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\rangle$ **40.** $\mathbf{v} = \langle -6.2, 3.4\rangle$

En los ejercicios 41 a 44, hallar lo siguiente.

a) $\|\mathbf{u}\|$ *b)* $\|\mathbf{v}\|$ *c)* $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$

d) $\left\|\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}\right\|$ *e)* $\left\|\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right\|$ *f)* $\left\|\frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|}\right\|$

41. $\mathbf{u} = \langle 1, -1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -1, 2\rangle$

42. $\mathbf{u} = \langle 0, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 3, -3\rangle$

43. $\mathbf{u} = \left\langle 1, \frac{1}{2}\right\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, 3\rangle$

44. $\mathbf{u} = \langle 2, -4\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 5, 5\rangle$

En los ejercicios 45 y 46, representar gráficamente u, v y u + v. Después demostrar la desigualdad del triángulo usando los vectores u y v.

45. $\mathbf{u} = \langle 2, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 5, 4\rangle$ **46.** $\mathbf{u} = \langle -3, 2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, -2\rangle$

En los ejercicios 47 a 50, hallar el vector v de la magnitud dada y en la misma dirección que u.

	Magnitud	*Dirección*
47.	$\|\mathbf{v}\| = 6$	$\mathbf{u} = \langle 0, 3\rangle$
48.	$\|\mathbf{v}\| = 4$	$\mathbf{u} = \langle 1, 1\rangle$
49.	$\|\mathbf{v}\| = 5$	$\mathbf{u} = \langle -1, 2\rangle$
50.	$\|\mathbf{v}\| = 2$	$\mathbf{u} = \langle \sqrt{3}, 3\rangle$

En los ejercicios 51 a 54, hallar las componentes de v dadas su magnitud y el ángulo que forma con el eje *x* positivo.

51. $\|\mathbf{v}\| = 3$, $\theta = 0°$ **52.** $\|\mathbf{v}\| = 5$, $\theta = 120°$

53. $\|\mathbf{v}\| = 2$, $\theta = 150°$ **54.** $\|\mathbf{v}\| = 4$, $\theta = 3.5°$

En los ejercicios 55 a 58, hallar las componentes de u + v dadas las longitudes de u y v y los ángulos que u y v forman con el eje *x* positivo.

55. $\|\mathbf{u}\| = 1$, $\theta_{\mathbf{u}} = 0°$; $\|\mathbf{v}\| = 3$, $\theta_{\mathbf{v}} = 45°$

56. $\|\mathbf{u}\| = 4$, $\theta_{\mathbf{u}} = 0°$; $\|\mathbf{v}\| = 2$, $\theta_{\mathbf{v}} = 60°$

57. $\|\mathbf{u}\| = 2$, $\theta_{\mathbf{u}} = 4$; $\|\mathbf{v}\| = 1$, $\theta_{\mathbf{v}} = 2$

58. $\|\mathbf{u}\| = 5$, $\theta_{\mathbf{u}} = -0.5$; $\|\mathbf{v}\| = 5$, $\theta_{\mathbf{v}} = 0.5$

Desarrollo de conceptos

59. Explicar, con sus propias palabras, la diferencia entre un escalar y un vector. Dar ejemplos de cada uno.

60. Describir geométricamente las operaciones de suma de vectores y de multiplicación de un vector por un escalar.

61. Identificar la cantidad como escalar o como vector. Explicar el razonamiento.

a) La velocidad en la boca de cañón de un arma de fuego.

b) El precio de las acciones de una empresa.

62. Identificar la cantidad como escalar o como vector. Explicar el razonamiento.

a) La temperatura del aire en un cuarto.

b) El peso de un automóvil.

En los ejercicios 63 a 68, hallar a y b tales que $\mathbf{v} = a\mathbf{u} + b\mathbf{w}$, donde $\mathbf{u} = \langle 1, 2\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 1, -1\rangle$.

63. $\mathbf{v} = \langle 2, 1\rangle$

64. $\mathbf{v} = \langle 0, 3\rangle$

65. $\mathbf{v} = \langle 3, 0\rangle$

66. $\mathbf{v} = \langle 3, 3\rangle$

67. $\mathbf{v} = \langle 1, 1\rangle$

68. $\mathbf{v} = \langle -1, 7\rangle$

En los ejercicios 69 a 74, hallar un vector unitario *a*) paralelo y *b*) normal a la gráfica de f en el punto dado. Después representar gráficamente los vectores y la función.

	Función	*Punto*
69.	$f(x) = x^2$	$(3, 9)$
70.	$f(x) = -x^2 + 5$	$(1, 4)$
71.	$f(x) = x^3$	$(1, 1)$
72.	$f(x) = x^3$	$(-2, -8)$
73.	$f(x) = \sqrt{25 - x^2}$	$(3, 4)$
74.	$f(x) = \tan x$	$\left(\dfrac{\pi}{4}, 1\right)$

En los ejercicios 75 y 76, expresar v mediante sus componentes, dadas las magnitudes de u y de u + v y los ángulos que u y u + v forman con el eje x positivo.

75. $\|\mathbf{u}\| = 1, \theta = 45°$
$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \sqrt{2}, \theta = 90°$

76. $\|\mathbf{u}\| = 4, \theta = 30°$
$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = 6, \theta = 120°$

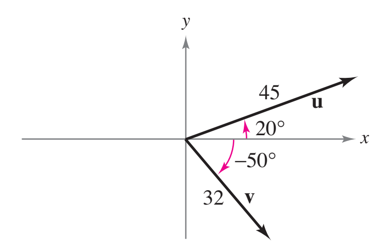


77. ***Programación*** Se dan las magnitudes de **u** y **v** y los ángulos que **u** y **v** forman con el eje x positivo. Escribir un programa para una herramienta de graficación que calcule lo siguiente.

a) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ *b*) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$

c) El ángulo que $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ forma con el eje x positivo

d) Utilizar el programa para encontrar la magnitud y la dirección de la resultante de los vectores indicados.



Para discusión

78. Los puntos inicial y final del vector **v** son (3, –4) y (9, 1), respectivamente.

a) Escribir **v** en forma de componentes.

b) Escribir **v** como la combinación lineal de los vectores unitarios estándar **i** y **j**.

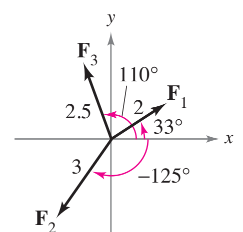
c) Dibujar **v** con su punto inicial en el origen.

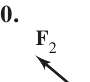
d) Encontrar la magnitud de **v**.

En los ejercicios 79 y 80, usar una herramienta de graficación para encontrar la magnitud y la dirección de la resultante de los vectores.

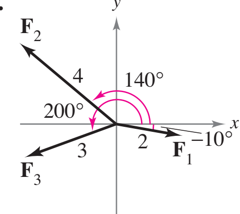


79.





80.



81. ***Fuerza resultante*** Fuerzas con magnitudes de 500 libras y 200 libras actúan sobre una pieza de la máquina a ángulos de 30° y −45°, respectivamente, con el eje x (ver la figura). Hallar la dirección y la magnitud de la fuerza resultante.

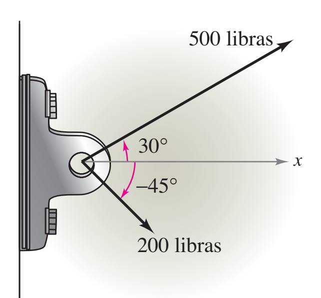


Figura para 81

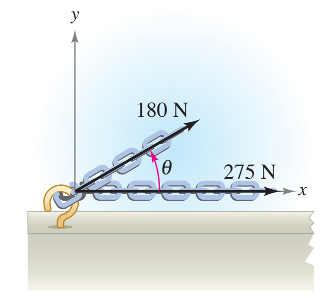


Figura para 82

82. ***Análisis numérico y gráfico*** Fuerzas con magnitudes de 180 newtons y 275 newtons actúan sobre un gancho (ver la figura). El ángulo entre las dos fuerzas es de θ grados.

a) Si $\theta = 30°$, hallar la dirección y la magnitud de la fuerza resultante.

b) Expresar la magnitud M y la dirección α de la fuerza resultante en funciones de θ, donde $0° \leq \theta \leq 180°$.

c) Usar una herramienta de graficación para completar la tabla.

θ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
M							
α							

d) Usar una herramienta de graficación para representar las dos funciones M y α.

e) Explicar por qué una de las funciones disminuye cuando θ aumenta mientras que la otra no.

83. ***Fuerza resultante*** Tres fuerzas de magnitudes de 75 libras, 100 libras y 125 libras actúan sobre un objeto a ángulos de 30°, 45° y 120°, respectivamente, con el eje x positivo. Hallar la dirección y la magnitud de la fuerza resultante.

84. ***Fuerza resultante*** Tres fuerzas de magnitudes de 400 newtons, 280 newtons y 350 newtons, actúan sobre un objeto a ángulos de −30°, 45° y 135°, respectivamente, con el eje x positivo. Hallar la dirección y la magnitud de la fuerza resultante.

85. ***Para pensar*** Considerar dos fuerzas de la misma magnitud que actúan sobre un punto.

a) Si la magnitud de la resultante es la suma de las magnitudes de las dos fuerzas, hacer una conjetura acerca del ángulo entre las fuerzas.

b) Si la resultante de las fuerzas es **0**, hacer una conjetura acerca del ángulo entre las fuerzas.

c) ¿Puede ser la magnitud de la resultante mayor que la suma de las magnitudes de las dos fuerzas? Explicar la respuesta.

86. ***Razonamiento gráfico*** Considerar dos fuerzas $\mathbf{F}_1 = \langle 20, 0\rangle$ y $\mathbf{F}_2 = 10\langle\cos\theta, \operatorname{sen}\theta\rangle$.

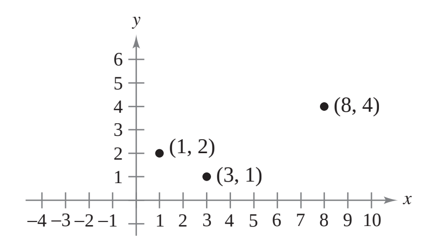
a) Hallar $\|\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2\|$.

b) Determinar la magnitud de la resultante como función de θ. Usar una herramienta de graficación para representar la función para $0 \le \theta < 2\pi$.

c) Usar la gráfica en el inciso *b*) para determinar el rango de la función. ¿Cuál es su máximo y con qué valor de θ se obtiene? ¿Cuál es su mínimo y con qué valor de θ se obtiene?

d) Explicar por qué la magnitud de la resultante nunca es 0.

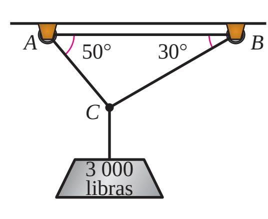
87. Tres de los vértices de un paralelogramo son (1, 2), (3, 1) y (8, 4). Hallar las tres posibilidades para el cuarto vértice (ver la figura).



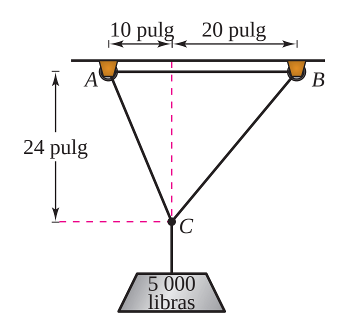
88. Usar vectores para encontrar los puntos de trisección del segmento de recta con puntos terminales (1, 2) y (7, 5).

Tensión de un cable **En los ejercicios 89 y 90, usar la figura para determinar la tensión en cada cable que sostiene la carga dada.**

89.



90.



91. ***Movimiento de un proyectil*** Un arma con una velocidad en la boca de cañón de 1 200 pies por segundo se dispara a un ángulo de 6° sobre la horizontal. Encontrar las componentes horizontal y vertical de la velocidad.

92. ***Carga compartida*** Para llevar una pesa cilíndrica de 100 libras, dos trabajadores sostienen los extremos de unas sogas cortas atadas a un aro en el centro de la parte superior del cilindro. Una soga forma un ángulo de 20° con la vertical y la otra forma un ángulo de 30° (ver la figura).

a) Hallar la tensión de cada soga si la fuerza resultante es vertical.

b) Hallar la componente vertical de la fuerza de cada trabajador.

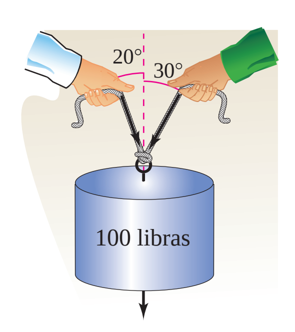


Figura para 92

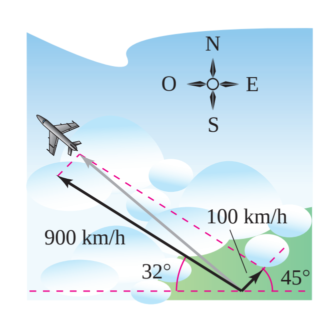


Figura para 93

93. ***Navegación*** Un avión vuela en dirección 302°. Su velocidad con respecto al aire es de 900 kilómetros por hora. El viento a la altitud del avión viene del suroeste a 100 kilómetros por hora (ver la figura). ¿Cuál es la verdadera dirección del avión y cuál es su velocidad respecto al suelo?

94. ***Navegación*** Un avión vuela a una velocidad constante de 400 millas por hora hacia el este, respecto al suelo, y se encuentra con un viento de 50 millas por hora proveniente del noroeste. Encontrar la velocidad relativa al aire y el rumbo que permitirán al avión mantener su velocidad respecto al suelo y su dirección hacia el este.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 95 a 100, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.**

95. Si **u** y **v** tienen la misma magnitud y dirección, entonces **u** y **v** son equivalentes.

96. Si **u** es un vector unitario en la dirección de **v**, entonces $\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\,\mathbf{u}$.

97. Si $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ es un vector unitario, entonces $a^2 + b^2 = 1$.

98. Si $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} = \mathbf{0}$, entonces $a = -b$.

99. Si $a = b$, entonces $\|a\mathbf{i} + b\mathbf{j}\| = \sqrt{2}a$.

100. Si **u** y **v** tienen la misma magnitud pero direcciones opuestas, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

101. Demostrar que $\mathbf{u} = (\cos\theta)\mathbf{i} - (\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = (\operatorname{sen}\theta)\mathbf{i} + (\cos\theta)\mathbf{j}$ son vectores unitarios para todo ángulo θ.

102. ***Geometría*** Usando vectores, demostrar que el segmento de recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo y mide la mitad de longitud, del tercer lado.

103. ***Geometría*** Usando vectores, demostrar que las diagonales de un paralelogramo se cortan a la mitad.

104. Demostrar que el vector $\mathbf{w} = \|\mathbf{u}\|\mathbf{v} + \|\mathbf{v}\|\mathbf{u}$ corta a la mitad el ángulo entre **u** y **v**.

105. Considerar el vector $\mathbf{u} = \langle x, y\rangle$. Describir el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que $\|\mathbf{u}\| = 5$.

Preparación del examen Putman

106. Un arma de artillería de costa puede ser disparada a cualquier ángulo de elevación entre 0° y 90° en un plano vertical fijo. Si se desprecia la resistencia del aire y la velocidad en la boca de cañón es constante $(= v_0)$, determinar el conjunto H de puntos en el plano y sobre la horizontal que puede ser golpeado.

11.2 Coordenadas y vectores en el espacio

- **Entender el sistema de coordenadas rectangulares tridimensional.**
- **Analizar vectores en el espacio.**
- **Utilizar vectores tridimensionales para resolver problemas de la vida real.**

Coordenadas en el espacio

Hasta este punto del texto ha interesado principalmente el sistema de coordenadas bidimensional. En buena parte de lo que resta del estudio del cálculo se emplea el sistema de coordenadas tridimensional.

Antes de extender el concepto de vector a tres dimensiones, se debe poder identificar puntos en el **sistema de coordenadas tridimensional**. Se puede construir este sistema trazando en el origen un eje z perpendicular al eje x y al eje y. La figura 11.14 muestra la porción positiva de cada eje de coordenadas. Tomados por pares, los ejes determinan tres **planos coordenados**: el **plano xy**, el **plano xz** y el **plano yz**. Estos tres planos coordenados dividen el espacio tridimensional en ocho **octantes**. El primer octante es en el que todas las coordenadas son positivas. En este sistema tridimensional, un punto P en el espacio está determinado por una terna ordenada (x, y, z) donde x, y y z son:

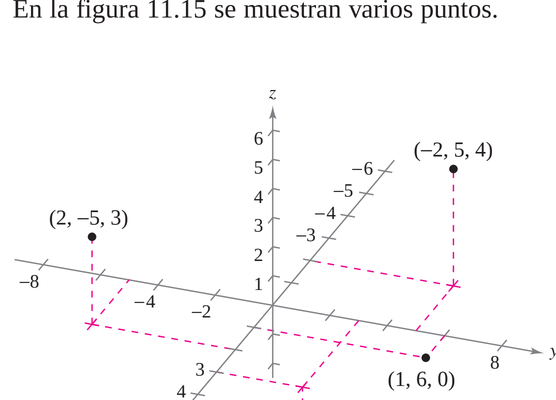
Sistema de coordenadas tridimensional
Figura 11.14

x = distancia dirigida que va del plano yz a P

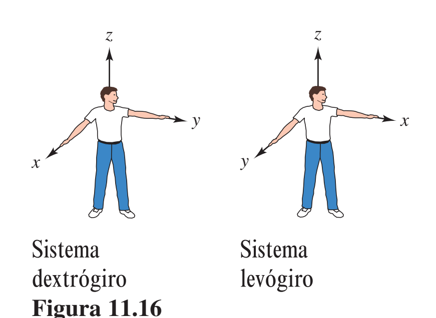
y = distancia dirigida que va del plano xz a P

z = distancia dirigida que va del plano xy a P

En la figura 11.15 se muestran varios puntos.

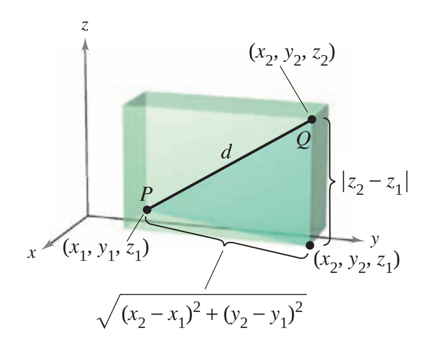


Los puntos en el sistema de coordenadas tridimensional se representan por medio de ternas ordenadas
Figura 11.15



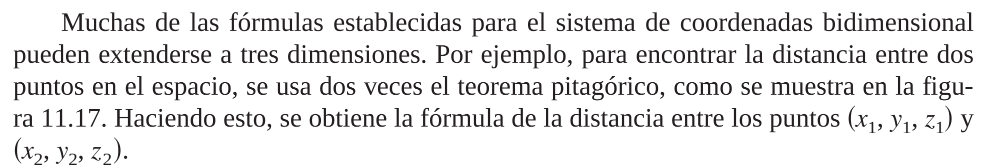
Sistema dextrógiro   Sistema levógiro
Figura 11.16

Un sistema de coordenadas tridimensional puede tener orientación **levógira** o **dextrógira**. Para determinar la orientación de un sistema, se puede imaginar de pie en el origen, con los brazos apuntando en dirección de los ejes x y y positivo y el eje z apuntando hacia arriba, como se muestra en la figura 11.16. El sistema es dextrógiro o levógiro dependiendo de qué mano queda apuntando a lo largo del eje x. En este texto, se trabaja exclusivamente con el sistema dextrógiro.



Distancia entre dos puntos en el espacio
Figura 11.17

Muchas de las fórmulas establecidas para el sistema de coordenadas bidimensional pueden extenderse a tres dimensiones. Por ejemplo, para encontrar la distancia entre dos puntos en el espacio, se usa dos veces el teorema pitagórico, como se muestra en la figura 11.17. Haciendo esto, se obtiene la fórmula de la distancia entre los puntos (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2).



$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$ Fórmula de la distancia.

EJEMPLO 1 Distancia entre dos puntos en el espacio

La distancia entre los puntos $(2, -1, 3)$ y $(1, 0, -2)$ es

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(1-2)^2 + (0+1)^2 + (-2-3)^2} \\ &= \sqrt{1 + 1 + 25} \\ &= \sqrt{27} \\ &= 3\sqrt{3}. \end{aligned}$$ Fórmula de la distancia.

Una **esfera** con centro en (x_0, y_0, z_0) y radio r está definida como el conjunto de todos los puntos (x, y, z) tales que la distancia entre (x, y, z) y (x_0, y_0, z_0) es r. Se puede usar la fórmula de la distancia para encontrar la **ecuación canónica o estándar de una esfera** de radio r, con centro en (x_0, y_0, z_0). Si (x, y, z) es un punto arbitrario en la esfera, la ecuación de la esfera es

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$ Ecuación de la esfera.

como se muestra en la figura 11.18. El punto medio del segmento de recta que une a los puntos (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) tiene coordenadas



Figura 11.18

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$ Regla del punto medio.

EJEMPLO 2 Ecuación de una esfera

Hallar la ecuación canónica o estándar de la esfera que tiene los puntos (5, –2, 3) y (0, 4, –3) como extremos de un diámetro.

Solución Según la regla del punto medio, el centro de la esfera es

$$\left(\frac{5+0}{2}, \frac{-2+4}{2}, \frac{3-3}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, 1, 0\right).$$ Regla del punto medio.

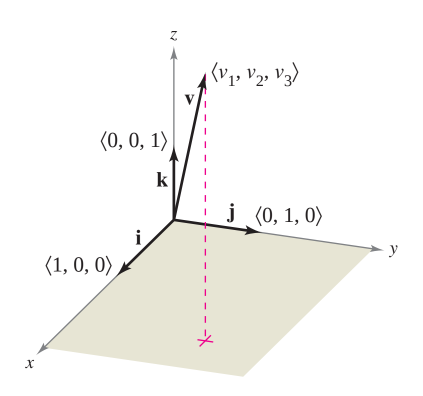
Según la fórmula de la distancia, el radio es

$$r = \sqrt{\left(0 - \frac{5}{2}\right)^2 + (4-1)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{\frac{97}{4}} = \frac{\sqrt{97}}{2}.$$

Por consiguiente, la ecuación canónica o estándar de la esfera es

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = \frac{97}{4}.$$ Ecuación de la esfera.

Vectores en el espacio



Los vectores unitarios canónicos o estándar en el espacio
Figura 11.19

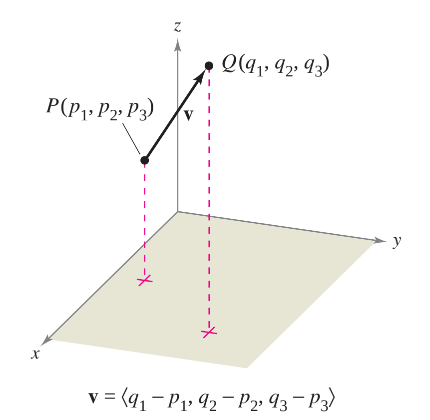


Figura 11.20

En el espacio los vectores se denotan mediante ternas ordenadas $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$. El **vector cero** se denota por $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0\rangle$. Usando los vectores unitarios $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0\rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0\rangle$ y $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1\rangle$ en la dirección del eje positivo z, la **notación empleando los vectores unitarios canónicos o estándar** para $\mathbf{v}$ es

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

como se muestra en la figura 11.19. Si $\mathbf{v}$ se representa por el segmento de recta dirigido de $P(p_1, p_2, p_3)$ a $Q(q_1, q_2, q_3)$, como se muestra en la figura 11.20, las componentes de $\mathbf{v}$ se obtienen restando las coordenadas del punto inicial de las coordenadas del punto final, como sigue

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle = \langle q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3\rangle$$

VECTORES EN EL ESPACIO

Sean $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ vectores en el espacio y sea c un escalar.

1. *Igualdad de vectores:* $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ si y sólo si $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ y $u_3 = v_3$.
2. *Expresión mediante las componentes:* Si $\mathbf{v}$ se representa por el segmento de recta dirigido de $P(p_1, p_2, p_3)$ a $Q(q_1, q_2, q_3)$, entonces
$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle = \langle q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3\rangle.$$
3. *Longitud:* $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$
4. *Vector unitario en la dirección de* $\mathbf{v}$: $\dfrac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \left(\dfrac{1}{\|\mathbf{v}\|}\right)\langle v_1, v_2, v_3\rangle, \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$
5. *Suma de vectores:* $\mathbf{v} + \mathbf{u} = \langle v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3\rangle$
6. *Multiplicación por un escalar:* $c\mathbf{v} = \langle cv_1, cv_2, cv_3\rangle$

NOTA Las propiedades de la suma de vectores y de la multiplicación por un escalar dadas en el teorema 11.1 son también válidas para vectores en el espacio. ■

EJEMPLO 3 Hallar las componentes de un vector en el espacio

Hallar las componentes y la longitud del vector $\mathbf{v}$ que tiene punto inicial $(-2, 3, 1)$ y punto final $(0, -4, 4)$. Después, hallar un vector unitario en la dirección de $\mathbf{v}$.

Solución El vector $\mathbf{v}$ dado mediante sus componentes es

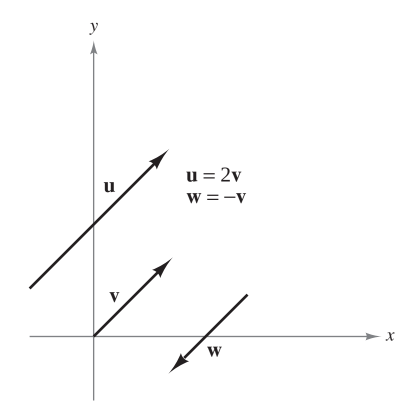
$$\begin{aligned}\mathbf{v} = \langle q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3\rangle &= \langle 0 - (-2), -4 - 3, 4 - 1\rangle \\ &= \langle 2, -7, 3\rangle\end{aligned}$$

lo cual implica que su longitud es

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + (-7)^2 + 3^2} = \sqrt{62}.$$

El vector unitario en la dirección de $\mathbf{v}$ es

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{62}}\langle 2, -7, 3\rangle = \left\langle \frac{2}{\sqrt{62}}, \frac{-7}{\sqrt{62}}, \frac{3}{\sqrt{62}}\right\rangle.$$



Vectores paralelos
Figura 11.21

Recordar que en la definición de la multiplicación por un escalar se vio que múltiplos escalares positivos de un vector **v** distinto de cero tienen la misma dirección que **v**, mientras que múltiplos negativos tienen dirección opuesta a la de **v**. En general, dos vectores distintos de cero **u** y **v** son **paralelos** si existe algún escalar c tal que $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$.

DEFINICIÓN DE VECTORES PARALELOS

Dos vectores distintos de cero **u** y **v** son **paralelos** si hay algún escalar c tal que $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$.

Por ejemplo, en la figura 11.21, los vectores **u**, **v** y **w** son paralelos porque $\mathbf{u} = 2\mathbf{v}$ y $\mathbf{w} = -\mathbf{v}$.

EJEMPLO 4 Vectores paralelos

El vector **w** tiene punto inicial $(2, -1, 3)$ y punto final $(-4, 7, 5)$. ¿Cuál de los vectores siguientes es paralelo a **w**?

a) $\mathbf{u} = \langle 3, -4, -1 \rangle$

b) $\mathbf{v} = \langle 12, -16, 4 \rangle$

Solución Empezar expresando **w** mediante sus componentes.

$$\mathbf{w} = \langle -4 - 2, 7 - (-1), 5 - 3 \rangle = \langle -6, 8, 2 \rangle$$

a) Como $\mathbf{u} = \langle 3, -4, -1 \rangle = -\frac{1}{2}\langle -6, 8, 2 \rangle = -\frac{1}{2}\mathbf{w}$, se puede concluir que **u** es paralelo a **w**.

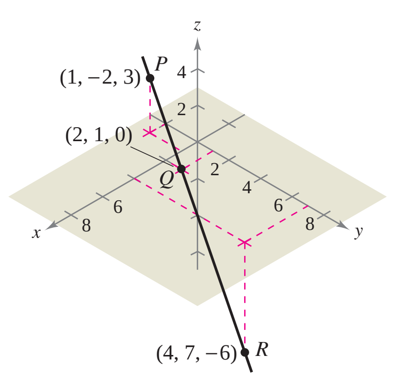
b) En este caso, se quiere encontrar un escalar c tal que

$$\langle 12, -16, 4 \rangle = c\langle -6, 8, 2 \rangle.$$

$$\begin{aligned} 12 &= -6c \rightarrow c = -2 \\ -16 &= 8c \rightarrow c = -2 \\ 4 &= 2c \rightarrow c = 2 \end{aligned}$$

Como no hay un c para el cual la ecuación tenga solución, los vectores no son paralelos.

EJEMPLO 5 Uso de vectores para determinar puntos colineales



Los puntos P, Q y R están en la misma recta
Figura 11.22

Determinar si los puntos $P(1, -2, 3)$, $Q(2, 1, 0)$ y $R(4, 7, -6)$ son colineales.

Solución Los componentes de $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son

$$\overrightarrow{PQ} = \langle 2 - 1, 1 - (-2), 0 - 3 \rangle = \langle 1, 3, -3 \rangle$$

y

$$\overrightarrow{PR} = \langle 4 - 1, 7 - (-2), -6 - 3 \rangle = \langle 3, 9, -9 \rangle.$$

Estos dos vectores tienen un punto inicial común. Por tanto, P, Q y R están en la misma recta si y sólo si $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son paralelos. $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son paralelos ya que $\overrightarrow{PR} = 3\,\overrightarrow{PQ}$, como se muestra en la figura 11.22.

EJEMPLO 6 Notación empleando los vectores unitarios canónicos

a) Expresar el vector $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 5\mathbf{k}$ por medio de sus componentes.

b) Hallar el punto final del vector $\mathbf{v} = 7\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, dado que el punto inicial es $P(-2, 3, 5)$.

Solución

a) Como falta **j**, su componente es 0 y

$$\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 5\mathbf{k} = \langle 4, 0, -5\rangle.$$

b) Se necesita encontrar $Q(q_1, q_2, q_3)$ tal que $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = 7\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Esto implica que $q_1 - (-2) = 7$, $q_2 - 3 = -1$ y $q_3 - 5 = 3$. La solución de estas tres ecuaciones es $q_1 = 5$, $q_2 = 2$ y $q_3 = 8$. Por tanto, Q es (5, 2, 8).

Aplicación

EJEMPLO 7 Magnitud de una fuerza

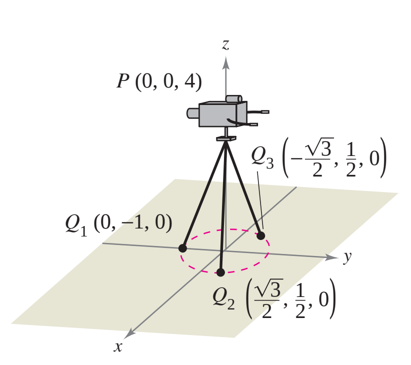


Figura 11.23

Una cámara de televisión de 120 libras está colocada en un trípode, como se muestra en la figura 11.23. Representar la fuerza ejercida en cada pata del trípode como un vector.

Solución Sean los vectores $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$ las fuerzas ejercidas en las tres patas. A partir de la figura 11.23, se puede determinar que las direcciones de $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$ son las siguientes.

$$\overrightarrow{PQ_1} = \langle 0 - 0, -1 - 0, 0 - 4\rangle = \langle 0, -1, -4\rangle$$

$$\overrightarrow{PQ_2} = \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2} - 0, \frac{1}{2} - 0, 0 - 4\right\rangle = \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -4\right\rangle$$

$$\overrightarrow{PQ_3} = \left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2} - 0, \frac{1}{2} - 0, 0 - 4\right\rangle = \left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -4\right\rangle$$

Como cada pata tiene la misma longitud, y la fuerza total se distribuye igualmente entre las tres patas, se sabe que $\|\mathbf{F}_1\| = \|\mathbf{F}_2\| = \|\mathbf{F}_3\|$. Por tanto, existe una constante c tal que

$$\mathbf{F}_1 = c\langle 0, -1, -4\rangle, \quad \mathbf{F}_2 = c\left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -4\right\rangle \quad \text{y} \quad \mathbf{F}_3 = c\left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -4\right\rangle.$$

Sea la fuerza total ejercida por el objeto la dada por $\mathbf{F} = \langle 0, 0, -120\rangle$. Entonces, usando el hecho que

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$$

se puede concluir que $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$ tienen todas una componente vertical de -40. Esto implica que $c(-4) = -40$ y $c = 10$. Por tanto, las fuerzas ejercidas sobre las patas pueden representarse por

$$\mathbf{F}_1 = \langle 0, -10, -40\rangle$$

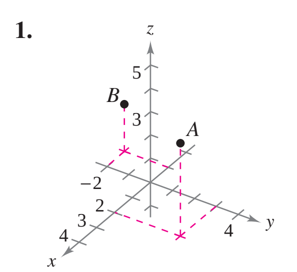
$$\mathbf{F}_2 = \langle 5\sqrt{3}, 5, -40\rangle$$

$$\mathbf{F}_3 = \langle -5\sqrt{3}, 5, -40\rangle.$$

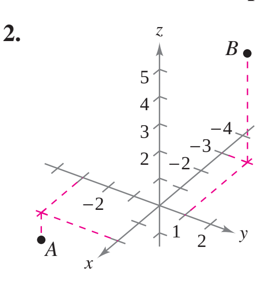
11.2 Ejercicios

En los ejercicios 1 y 2, aproximar las coordenadas de los puntos.

1.



2.



En los ejercicios 3 a 6, representar los puntos en el mismo sistema de coordenadas tridimensional.

3. *a*) $(2, 1, 3)$ *b*) $(-1, 2, 1)$

4. *a*) $(3, -2, 5)$ *b*) $\left(\frac{3}{2}, 4, -2\right)$

5. *a*) $(5, -2, 2)$ *b*) $(5, -2, -2)$

6. *a*) $(0, 4, -5)$ *b*) $(4, 0, 5)$

En los ejercicios 7 a 10, hallar las coordenadas del punto.

7. El punto se localiza tres unidades detrás del plano *yz*, cuatro unidades a la derecha del plano *xz* y cinco unidades arriba del plano *xy*.

8. El punto se localiza siete unidades delante del plano *yz*, dos unidades a la izquierda del plano *xz* y una unidad debajo del plano *xy*.

9. El punto se localiza en el eje *x*, 12 unidades delante del plano *yz*.

10. El punto se localiza en el plano *yz*, tres unidades a la derecha del plano *xz* y dos unidades arriba del plano *xy*.

11. ***Para pensar*** ¿Cuál es la coordenada *z* de todo punto en el plano *xy*?

12. ***Para pensar*** ¿Cuál es la coordenada *x* de todo punto en el plano *yz*?

En los ejercicios 13 a 24, determinar la localización de un punto (*x*, *y*, *z*) que satisfaga la(s) condición(es).

13. $z = 6$

14. $y = 2$

15. $x = -3$

16. $z = -\frac{5}{2}$

17. $y < 0$

18. $x > 0$

19. $|y| \leq 3$

20. $|x| > 4$

21. $xy > 0, \quad z = -3$

22. $xy < 0, \quad z = 4$

23. $xyz < 0$

24. $xyz > 0$

En los ejercicios 25 a 28, hallar la distancia entre los puntos.

25. $(0, 0, 0), \quad (-4, 2, 7)$

26. $(-2, 3, 2), \quad (2, -5, -2)$

27. $(1, -2, 4), \quad (6, -2, -2)$

28. $(2, 2, 3), \quad (4, -5, 6)$

En los ejercicios 29 a 32, hallar las longitudes de los lados del triángulo con los vértices que se indican, y determinar si el triángulo es un triángulo rectángulo, un triángulo isósceles, o ninguna de ambas cosas.

29. $(0, 0, 4), (2, 6, 7), (6, 4, -8)$

30. $(3, 4, 1), (0, 6, 2), (3, 5, 6)$

31. $(-1, 0, -2), (-1, 5, 2), (-3, -1, 1)$

32. $(4, -1, -1), (2, 0, -4), (3, 5, -1)$

33. ***Para pensar*** El triángulo del ejercicio 29 se traslada cinco unidades hacia arriba a lo largo del eje *z*. Determinar las coordenadas del triángulo trasladado.

34. ***Para pensar*** El triángulo del ejercicio 30 se traslada tres unidades a la derecha a lo largo del eje *y*. Determinar las coordenadas del triángulo trasladado.

En los ejercicios 35 y 36, hallar las coordenadas del punto medio del segmento de recta que une los puntos.

35. $(5, -9, 7), (-2, 3, 3)$

36. $(4, 0, -6), (8, 8, 20)$

En los ejercicios 37 a 40, hallar la ecuación estándar de la esfera.

37. Centro: $(0, 2, 5)$
Radio: 2

38. Centro: $(4, -1, 1)$
Radio: 5

39. Puntos terminales de un diámetro: $(2, 0, 0), (0, 6, 0)$

40. Centro: $(-3, 2, 4)$, tangente al plano *yz*

En los ejercicios 41 a 44, completar el cuadrado para dar la ecuación de la esfera en forma canónica o estándar. Hallar el centro y el radio.

41. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 8z + 1 = 0$

42. $x^2 + y^2 + z^2 + 9x - 2y + 10z + 19 = 0$

43. $9x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 6x + 18y + 1 = 0$

44. $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 24x - 4y + 8z - 23 = 0$

En los ejercicios 45 a 48, describir el sólido que satisface la condición.

45. $x^2 + y^2 + z^2 \leq 36$

46. $x^2 + y^2 + z^2 > 4$

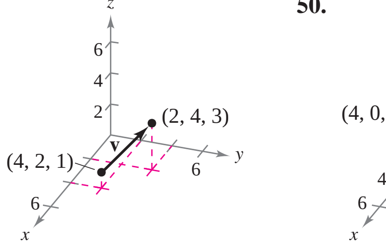
47. $x^2 + y^2 + z^2 < 4x - 6y + 8z - 13$

48. $x^2 + y^2 + z^2 > -4x + 6y - 8z - 13$

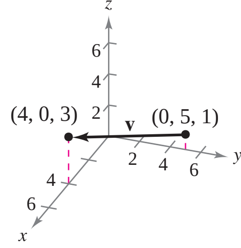
En los ejercicios 49 a 52, *a*) encontrar las componentes del vector v, *b*) escribir el vector utilizando la notación del vector unitario estándar y *c*) dibujar el vector con su punto inicial en el origen.



49.



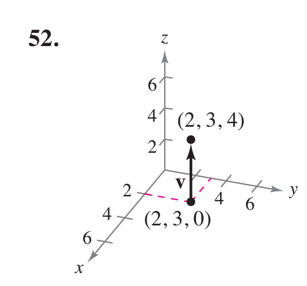
50.



51.

(0, 3, 3)
v
(3, 3, 0)

52.



En los ejercicios 53 a 56, hallar las componentes y la magnitud del vector v, dados sus puntos inicial y final. Después hallar un vector unitario en la dirección de v.

	Punto inicial	*Punto final*
53.	$(3, 2, 0)$	$(4, 1, 6)$
54.	$(4, -5, 2)$	$(-1, 7, -3)$
55.	$(-4, 3, 1)$	$(-5, 3, 0)$
56.	$(1, -2, 4)$	$(2, 4, -2)$

En los ejercicios 57 y 58 se indican los puntos inicial y final de un vector v. *a*) Dibujar el segmento de recta dirigido, *b*) encontrar las componentes del vector, *c*) escribir el vector usando la notación del vector unitario estándar y *d*) dibujar el vector con su punto inicial en el origen.

57. Punto inicial: $(-1, 2, 3)$
Punto final: $(3, 3, 4)$

58. Punto inicial: $(2, -1, -2)$
Punto final: $(-4, 3, 7)$

En los ejercicios 59 y 60, se dan el vector v y su punto inicial. Encontrar el punto final.

59. $\mathbf{v} = \langle 3, -5, 6 \rangle$
Punto inicial: $(0, 6, 2)$

60. $\mathbf{v} = \langle 1, -\frac{2}{3}, \frac{1}{2} \rangle$
Punto inicial: $(0, 2, \frac{5}{2})$

En los ejercicios 61 y 62, hallar cada uno de los múltiplos escalares de v y representar su gráfica.

61. $\mathbf{v} = \langle 1, 2, 2 \rangle$
a) $2\mathbf{v}$ *b*) $-\mathbf{v}$
c) $\frac{3}{2}\mathbf{v}$ *d*) $0\mathbf{v}$

62. $\mathbf{v} = \langle 2, -2, 1 \rangle$
a) $-\mathbf{v}$ *b*) $2\mathbf{v}$
c) $\frac{1}{2}\mathbf{v}$ *d*) $\frac{5}{2}\mathbf{v}$

En los ejercicios 63 a 68, encontrar el vector z, dado que $\mathbf{u} = \langle 1, 2, 3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, 2, -1 \rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 4, 0, -4 \rangle$.

63. $\mathbf{z} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$

64. $\mathbf{z} = \mathbf{u} - \mathbf{v} + 2\mathbf{w}$

65. $\mathbf{z} = 2\mathbf{u} + 4\mathbf{v} - \mathbf{w}$

66. $\mathbf{z} = 5\mathbf{u} - 3\mathbf{v} - \frac{1}{2}\mathbf{w}$

67. $2\mathbf{z} - 3\mathbf{u} = \mathbf{w}$

68. $2\mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{w} + 3\mathbf{z} = \mathbf{0}$

En los ejercicios 69 a 72, determinar cuáles de los vectores son paralelos a z. Usar una herramienta de graficación para confirmar sus resultados.

69. $\mathbf{z} = \langle 3, 2, -5 \rangle$
a) $\langle -6, -4, 10 \rangle$
b) $\langle 2, \frac{4}{3}, -\frac{10}{3} \rangle$
c) $\langle 6, 4, 10 \rangle$
d) $\langle 1, -4, 2 \rangle$

70. $\mathbf{z} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{3}{4}\mathbf{k}$
a) $6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$
b) $-\mathbf{i} + \frac{4}{3}\mathbf{j} - \frac{3}{2}\mathbf{k}$
c) $12\mathbf{i} + 9\mathbf{k}$
d) $\frac{3}{4}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \frac{9}{8}\mathbf{k}$

71. $\mathbf{z}$ tiene el punto inicial $(1, -1, 3)$ y el punto final $(-2, 3, 5)$.
a) $-6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ *b*) $4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

72. $\mathbf{z}$ tiene el punto inicial $(5, 4, 1)$ y el punto final $(-2, -4, 4)$.
a) $\langle 7, 6, 2 \rangle$ *b*) $\langle 14, 16, -6 \rangle$

En los ejercicios 73 a 76, usar vectores para determinar si los puntos son colineales.

73. $(0, -2, -5), (3, 4, 4), (2, 2, 1)$

74. $(4, -2, 7), (-2, 0, 3), (7, -3, 9)$

75. $(1, 2, 4), (2, 5, 0), (0, 1, 5)$

76. $(0, 0, 0), (1, 3, -2), (2, -6, 4)$

En los ejercicios 77 y 78, usar vectores para demostrar que los puntos son vértices de un paralelogramo.

77. $(2, 9, 1), (3, 11, 4), (0, 10, 2), (1, 12, 5)$

78. $(1, 1, 3), (9, -1, -2), (11, 2, -9), (3, 4, -4)$

En los ejercicios 79 a 84, hallar la longitud de v.

79. $\mathbf{v} = \langle 0, 0, 0 \rangle$

80. $\mathbf{v} = \langle 1, 0, 3 \rangle$

81. $\mathbf{v} = 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

82. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$

83. $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

84. $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$

En los ejercicios 85 a 88, hallar un vector unitario *a*) en la dirección de v y *b*) en la dirección opuesta a u.

85. $\mathbf{v} = \langle 2, -1, 2 \rangle$

86. $\mathbf{v} = \langle 6, 0, 8 \rangle$

87. $\mathbf{v} = \langle 3, 2, -5 \rangle$

88. $\mathbf{v} = \langle 8, 0, 0 \rangle$

89. ***Programación*** Se dan las componentes de los vectores **u** y **v**. Escribir un programa para una herramienta de graficación donde el resultado es *a*) las componentes de $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, *b*) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$, *c*) $\|\mathbf{u}\|$ y *d*) $\|\mathbf{v}\|$. *e*) Ejecutar el programa para los vectores $\mathbf{u} = \langle -1, 3, 4 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 5, 4.5, -6 \rangle$.

Para discusión

90. Considerar dos vectores distintos de cero **u** y **v**, y sean s y t números reales. Describir la figura geométrica generada por los puntos finales de los tres vectores $t\mathbf{v}$, $\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ y $s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$.

En los ejercicios 91 y 92, determinar los valores de *c* que satisfacen la ecuación. Sea $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

91. $\|c\mathbf{v}\| = 7$

92. $\|c\mathbf{u}\| = 4$

En los ejercicios 93 a 96, encontrar el vector v con la magnitud dada y en dirección de u.

	Magnitud	*Dirección*
93.	10	$\mathbf{u} = \langle 0, 3, 3 \rangle$
94.	3	$\mathbf{u} = \langle 1, 1, 1 \rangle$
95.	$\frac{3}{2}$	$\mathbf{u} = \langle 2, -2, 1 \rangle$
96.	7	$\mathbf{u} = \langle -4, 6, 2 \rangle$

En los ejercicios 97 y 98, dibujar el vector v y dar sus componentes.

97. $\mathbf{v}$ está en el plano yz, tiene magnitud 2 y forma un ángulo de 30° con el eje y positivo.

98. $\mathbf{v}$ está en el plano xz, tiene magnitud 5 y forma un ángulo de 45° con el eje z positivo.

En los ejercicios 99 y 100, usar vectores para encontrar el punto que se encuentra a dos tercios del camino de *P* a *Q*.

99. $P(4, 3, 0)$, $Q(1, -3, 3)$ **100.** $P(1, 2, 5)$, $Q(6, 8, 2)$

101. Sean $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{w} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$.

a) Dibujar $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

b) Si $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, demostrar que tanto a como b deben ser cero.

c) Hallar a y b tales que $\mathbf{w} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

d) Probar que ninguna elección de a y b da $\mathbf{w} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

102. ***Redacción*** Los puntos inicial y final del vector $\mathbf{v}$ son (x_1, y_1, z_1) y (x, y, z). Describir el conjunto de todos los puntos (x, y, z) tales que $\|\mathbf{v}\| = 4$.

Desarrollo de conceptos

103. Un punto en el sistema de coordenadas tridimensional tiene las coordenadas (x_0, y_0, z_0). Describir qué mide cada una de las coordenadas.

104. Dar la fórmula para la distancia entre los puntos (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2).

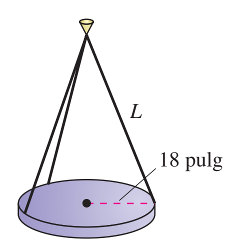
105. Dar la ecuación canónica o estándar de una esfera de radio r, centrada en (x_0, y_0, z_0).

106. Dar la definición de vectores paralelos.

107. Sean A, B y C los vértices de un triángulo. Encontrar $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$.

108. Sean $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$ y $\mathbf{r}_0 = \langle 1, 1, 1\rangle$. Describir el conjunto de todos los puntos (x, y, z) tales que $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\| = 2$.

109. ***Análisis numérico, gráfico y analítico*** Los focos en un auditorio son discos de 24 libras y 18 pulgadas de radio. Cada disco está sostenido por tres cables igualmente espaciados de L pulgadas de longitud (ver la figura).



a) Expresar la tensión T de cada cable en función de L. Determinar el dominio de la función.

b) Usar una herramienta de graficación y la función del inciso *a*) para completar la tabla.

L	20	25	30	35	40	45	50
T							

c) Representar en la herramienta de graficación el modelo del inciso *a*) y determinar las asíntotas de su gráfica.

d) Comprobar analíticamente las asíntotas obtenidas en el inciso *c*).

e) Calcular la longitud mínima que debe tener cada cable, si un cable está diseñado para llevar una carga máxima de 10 libras.

110. ***Para pensar*** Suponer que cada cable en el ejercicio 109 tiene una longitud fija $L = a$, y que el radio de cada disco es r_0 pulgadas. Hacer una conjetura acerca del límite $\lim_{r_0 \to a^-} T$ y justificar la respuesta.

111. ***Diagonal de un cubo*** Hallar las componentes del vector unitario $\mathbf{v}$ en la dirección de la diagonal del cubo que se muestra en la figura.

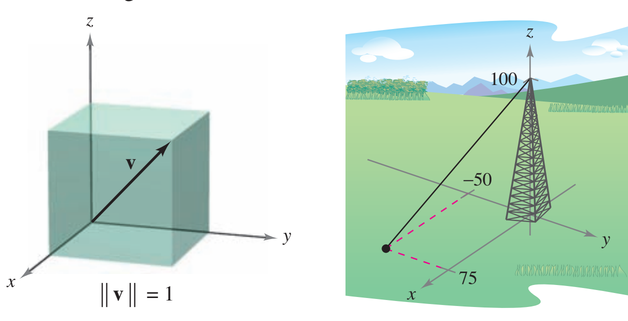


Figura para 111 **Figura para 112**

112. ***Cable de sujeción*** El cable de sujeción de una torre de 100 pies tiene una tensión de 550 libras. Usar las distancias mostradas en la figura, y dar las componentes del vector $\mathbf{F}$ que represente la tensión del cable.

113. ***Soportes de cargas*** Hallar la tensión en cada uno de los cables de soporte mostrados en la figura si el peso de la caja es de 500 newtons.

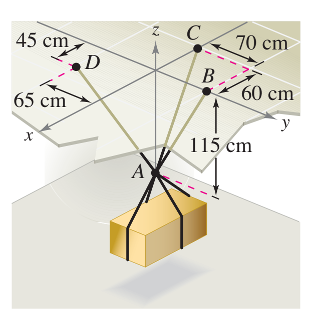


Figura para 113

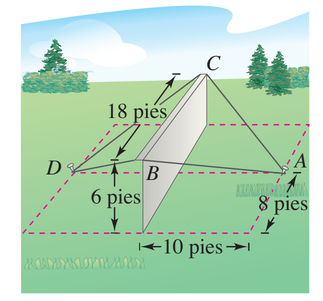


Figura para 114

114. ***Construcción de edificios*** Un muro de hormigón es sostenido temporalmente en posición vertical por medio de cuerdas (ver la figura). Hallar la fuerza total ejercida sobre la clavija en posición A. Las tensiones en AB y AC son 420 libras y 650 libras.

115. Escribir una ecuación cuya gráfica conste del conjunto de puntos $P(x, y, z)$ que distan el doble de $A(0, -1, 1)$ que de $B(1, 2, 0)$.

11.3 El producto escalar de dos vectores

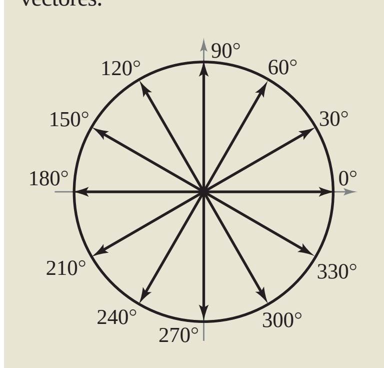
- **Usar las propiedades del producto escalar de dos vectores.**
- **Hallar el ángulo entre dos vectores usando el producto escalar.**
- **Hallar los cosenos directores de un vector en el espacio.**
- **Hallar la proyección de un vector sobre otro vector.**
- **Usar los vectores para calcular el trabajo realizado por una fuerza constante.**

El producto escalar

Hasta ahora se han estudiado dos operaciones con vectores —la suma de vectores y el producto de un vector por un escalar— cada una de las cuales da como resultado otro vector. En esta sección se presenta una tercera operación con vectores, llamada el **producto escalar**. Este producto da como resultado un escalar, y no un vector.

EXPLORACIÓN

Interpretación de un producto escalar En la figura se muestran varios vectores en el círculo unidad. Hallar los productos escalares de varios pares de vectores. Después encontrar el ángulo entre cada par usado. Hacer una conjetura sobre la relación entre el producto escalar de dos vectores y el ángulo entre los vectores.



DEFINICIÓN DE PRODUCTO ESCALAR

El **producto escalar** de $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle$ es

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2.$$

El **producto escalar** de $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ es

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

NOTA El producto escalar de dos vectores recibe este nombre debido a que da como resultado un escalar; también se le llama **producto interno** de los vectores. ■

TEOREMA 11.4 PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR

Sean **u**, **v** y **w** vectores en el plano o en el espacio y sea c un escalar.

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ — Propiedad conmutativa.
2. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ — Propiedad distributiva.
3. $c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = c\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot c\mathbf{v}$
4. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = 0$
5. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$

DEMOSTRACIÓN Para demostrar la primera propiedad, sea $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3\\ &= v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3\\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}.\end{aligned}$$

Para la quinta propiedad, sea $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} &= v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\\ &= \left(\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}\right)^2\\ &= \|\mathbf{v}\|^2.\end{aligned}$$

Se dejan las demostraciones de las otras propiedades al lector.

EJEMPLO 1 Cálculo de productos escalares

Dados $\mathbf{u} = \langle 2, -2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 5, 8\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle -4, 3\rangle$, encontrar

a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ *b)* $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$

c) $\mathbf{u} \cdot (2\mathbf{v})$ *d)* $\|\mathbf{w}\|^2$

Solución

a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \langle 2, -2\rangle \cdot \langle 5, 8\rangle = 2(5) + (-2)(8) = -6$

b) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w} = -6\langle -4, 3\rangle = \langle 24, -18\rangle$

c) $\mathbf{u} \cdot (2\mathbf{v}) = 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = 2(-6) = -12$ Teorema 11.4.

d) $\|\mathbf{w}\|^2 = \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}$ Teorema 11.4.

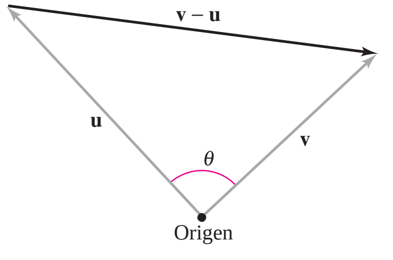
$= \langle -4, 3\rangle \cdot \langle -4, 3\rangle$ Sustituir **w** por $\langle -4, 3\rangle$.

$= (-4)(-4) + (3)(3)$ Definición del producto escalar.

$= 25$ Simplificar.

Observar que el resultado del inciso *b*) es una cantidad *vectorial*, mientras que los resultados de los otros tres incisos son cantidades *escalares*.

Ángulo entre dos vectores



El ángulo entre dos vectores
Figura 11.24

El **ángulo entre dos vectores distintos de cero** es el ángulo θ, $0 \le \theta \le \pi$, entre sus respectivos vectores en posición canónica o estándar, como se muestra en la figura 11.24. El siguiente teorema muestra cómo encontrar este ángulo usando el producto escalar. (Observar que el ángulo entre el vector cero y otro vector no está definido aquí.)

TEOREMA 11.5 ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES

Si θ es el ángulo entre dos vectores distintos de cero **u** y **v**, entonces

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}.$$

DEMOSTRACIÓN Considerar el triángulo determinado por los vectores **u, v** y $\mathbf{v} - \mathbf{u}$, como se muestra en la figura 11.24. Por la ley de los cosenos, se puede escribir

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta.$$

Usando las propiedades del producto escalar, el lado izquierdo puede reescribirse como

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 &= (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u})\\ &= (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}\\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}\\ &= \|\mathbf{v}\|^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \|\mathbf{u}\|^2\end{aligned}$$

y sustituyendo en la ley de los cosenos se obtiene

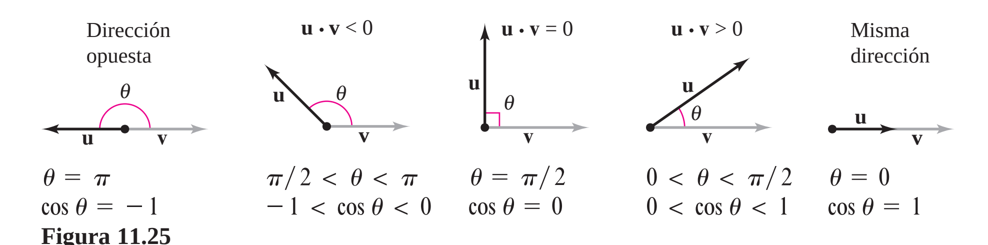
$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}\|^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \|\mathbf{u}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta\\ -2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= -2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta\\ \cos\theta &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}.\end{aligned}$$

Si el ángulo entre dos vectores es conocido, reescribiendo el teorema 11.5 en la forma

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \cos \theta$$

Forma alternativa del producto escalar.

se obtiene una manera alternativa de calcular el producto escalar. De esta forma, se puede ver que como $\|\mathbf{u}\|$ y $\|\mathbf{v}\|$ siempre son positivos, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ y $\cos \theta$ siempre tendrán el mismo signo. La figura 11.25 muestra las orientaciones posibles de los dos vectores.



$\theta = \pi$, $\cos \theta = -1$ | $\pi/2 < \theta < \pi$, $-1 < \cos \theta < 0$ | $\theta = \pi/2$, $\cos \theta = 0$ | $0 < \theta < \pi/2$, $0 < \cos \theta < 1$ | $\theta = 0$, $\cos \theta = 1$

Figura 11.25

De acuerdo con el teorema 11.5, se puede ver que dos vectores distintos de cero forman un ángulo recto si y sólo si su producto escalar es cero; entonces se dice que los dos vectores son **ortogonales**.

DEFINICIÓN DE VECTORES ORTOGONALES

Los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

NOTA Los términos “perpendicular”, “ortogonal” y “normal” significan esencialmente lo mismo: formar ángulos rectos. Sin embargo, es común decir que dos vectores son *ortogonales*, dos rectas o planos son *perpendiculares* y que un vector es *normal* a una recta o plano dado. ■

De esta definición se sigue que el vector cero es ortogonal a todo vector $\mathbf{u}$, ya que $\mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = 0$. Si $0 \le \theta \le \pi$, entonces se sabe que $\cos \theta = 0$ si y sólo si $\theta = \pi/2$. Por tanto, se puede usar el teorema 11.5 para concluir que dos vectores *distintos de cero* son ortogonales si y sólo si el ángulo entre ellos es $\pi/2$.

EJEMPLO 2 Hallar el ángulo entre dos vectores

Si $\mathbf{u} = \langle 3, -1, 2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, 0, 2\rangle$, $\mathbf{w} = \langle 1, -1, -2\rangle$ y $\mathbf{z} = \langle 2, 0, -1\rangle$, hallar el ángulo entre cada uno de los siguientes pares de vectores.

a) $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ ***b)*** $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ ***c)*** $\mathbf{v}$ y $\mathbf{z}$

Solución

a) $\cos \theta = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|} = \dfrac{-12 + 0 + 4}{\sqrt{14}\sqrt{20}} = \dfrac{-8}{2\sqrt{14}\sqrt{5}} = \dfrac{-4}{\sqrt{70}}$

Como $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$, $\theta = \arccos \dfrac{-4}{\sqrt{70}} \approx 2.069$ radianes.

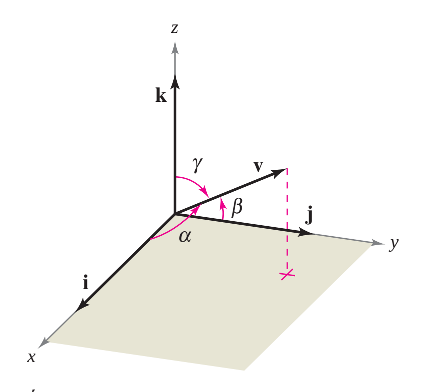
b) $\cos \theta = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{w}\|} = \dfrac{3 + 1 - 4}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \dfrac{0}{\sqrt{84}} = 0$

Como $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0$, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ son *ortogonales*. Así, $\theta = \pi/2$.

c) $\cos \theta = \dfrac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}}{\|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{z}\|} = \dfrac{-8 + 0 - 2}{\sqrt{20}\sqrt{5}} = \dfrac{-10}{\sqrt{100}} = -1$

Por consiguiente, $\theta = \pi$. Observar que $\mathbf{v}$ y $\mathbf{z}$ son paralelos, con $\mathbf{v} = -2\mathbf{z}$.

Cosenos directores



Ángulos de dirección
Figura 11.26

En el caso de un vector en el plano, se ha visto que es conveniente medir su dirección en términos del ángulo, medido en sentido contrario a las manecillas del reloj, *desde* el eje x positivo *hasta* el vector. En el espacio es más conveniente medir la dirección en términos de los ángulos *entre* el vector **v** distinto de cero y los tres vectores unitarios **i**, **j** y **k**, como se muestra en la figura 11.26. Los ángulos α, β y γ son los **ángulos de dirección de v**, y $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$ son los **cosenos directores de v**. Como

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{i} = \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{i}\|\cos\alpha = \|\mathbf{v}\|\cos\alpha$$

y

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{i} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle \cdot \langle 1, 0, 0\rangle = v_1$$

se sigue que $\cos\alpha = v_1/\|\mathbf{v}\|$. Mediante un razonamiento similar con los vectores unitarios **j** y **k**, se tiene

$$\cos\alpha = \frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|}$$ α es el ángulo entre **v** e **i**.

$$\cos\beta = \frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|}$$ β es el ángulo entre **v** y **j**.

$$\cos\gamma = \frac{v_3}{\|\mathbf{v}\|}.$$ γ es el ángulo entre **v** y **k**.

Por consiguiente, cualquier vector **v** distinto de cero en el espacio tiene la forma normalizada

$$\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{i} + \frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{j} + \frac{v_3}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{k} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k}$$

y como $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ es un vector unitario, se sigue que

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

EJEMPLO 3 Cálculo de los ángulos de dirección

Hallar los cosenos y los ángulos directores del vector $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, y mostrar que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Solución Como $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}$, se puede escribir lo siguiente.

$$\cos\alpha = \frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{2}{\sqrt{29}} \Rightarrow \alpha \approx 68.2°$$ Ángulo entre **v** e **i**.

$$\cos\beta = \frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{3}{\sqrt{29}} \Rightarrow \beta \approx 56.1°$$ Ángulo entre **v** y **j**.

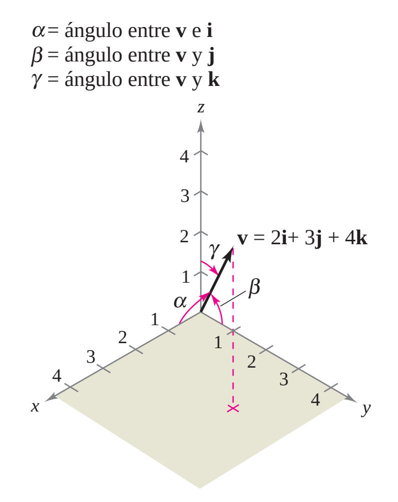
$$\cos\gamma = \frac{v_3}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{4}{\sqrt{29}} \Rightarrow \gamma \approx 42.0°$$ Ángulo entre **v** y **k**.

Además, la suma de los cuadrados de los cosenos directores es

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{4}{29} + \frac{9}{29} + \frac{16}{29} = \frac{29}{29} = 1.$$

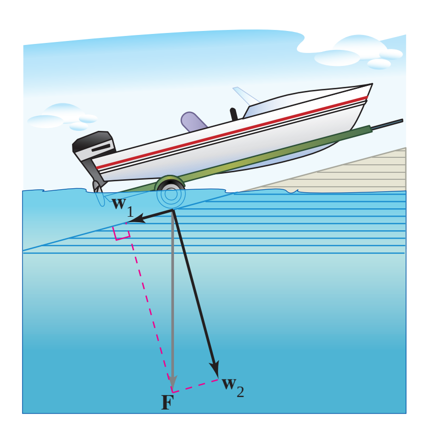
Ver figura 11.27.

α = ángulo entre **v** e **i**
β = ángulo entre **v** y **j**
γ = ángulo entre **v** y **k**



Ángulos de dirección de **v**
Figura 11.27

Proyecciones y componentes vectoriales



La fuerza debida a la gravedad empuja la lancha contra la rampa y hacia abajo por la rampa
Figura 11.28

Ya se han visto aplicaciones en las que se suman dos vectores para obtener un vector resultante. Muchas aplicaciones en la física o en la ingeniería plantean el problema inverso: descomponer un vector dado en la suma de dos **componentes vectoriales**. El ejemplo físico siguiente permitirá comprender la utilidad de este procedimiento.

Considerar una lancha sobre una rampa inclinada, como se muestra en la figura 11.28. La fuerza $\mathbf{F}$ debida a la gravedad empuja la lancha hacia *abajo* de la rampa y *contra* la rampa. Estas dos fuerzas, $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$, son ortogonales; se les llama las componentes vectoriales de $\mathbf{F}$.

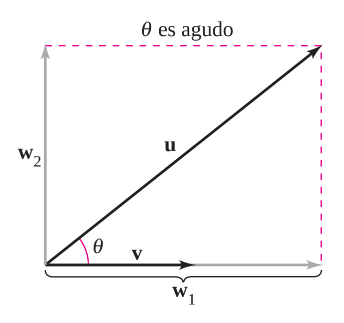
$$\mathbf{F} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$ Componentes vectoriales de $\mathbf{F}$.

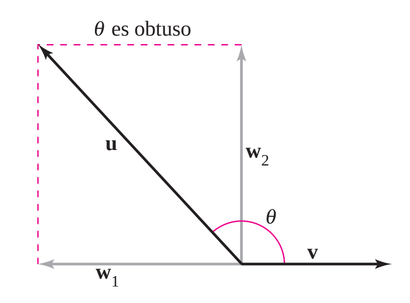
Las fuerzas $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$ ayudan a analizar el efecto de la gravedad sobre la lancha. Por ejemplo, $\mathbf{w}_1$ representa la fuerza necesaria para impedir que la lancha se deslice hacia abajo por la rampa, mientras que $\mathbf{w}_2$ representa la fuerza que deben soportar los neumáticos.

DEFINICIÓN DE PROYECCIÓN Y DE LAS COMPONENTES VECTORIALES

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores distintos de cero. Sea $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, donde $\mathbf{w}_1$ es paralelo a $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}_2$ es ortogonal a $\mathbf{v}$, como se muestra en la figura 11.29.

1. A $\mathbf{w}_1$ se le llama la **proyección de u en v** o la **componente vectorial de u a lo largo de v**, y se denota por $\mathbf{w}_1 = \text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$.
2. A $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1$ se le llama la **componente vectorial de u ortogonal a v**.





$\mathbf{w}_1 = \text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} =$ la proyección de $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ $=$ componente vectorial de $\mathbf{u}$ en dirección de $\mathbf{v}$
$\mathbf{w}_2 =$ componente vectorial de $\mathbf{u}$ ortogonal a $\mathbf{v}$
Figura 11.29

EJEMPLO 4 Hallar la componente vectorial de u ortogonal a v

Encontrar la componente del vector de $\mathbf{u} = \langle 5, 10\rangle$ que es ortogonal a $\mathbf{v} = \langle 4, 3\rangle$, dado que $\mathbf{w}_1 = \text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \langle 8, 6\rangle$ y

$$\mathbf{u} = \langle 5, 10\rangle = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2.$$

Solución Como $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, donde $\mathbf{w}_1$ es paralelo a $\mathbf{v}$, se sigue que $\mathbf{w}_2$ es la componente vectorial de $\mathbf{u}$ ortogonal a $\mathbf{v}$. Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_2 &= \mathbf{u} - \mathbf{w}_1\\ &= \langle 5, 10\rangle - \langle 8, 6\rangle\\ &= \langle -3, 4\rangle.\end{aligned}$$

Verificar que $\mathbf{w}_2$ es ortogonal a $\mathbf{v}$, como se muestra en la figura 11.30.

$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$
Figura 11.30

Del ejemplo 4, se puede ver que es fácil encontrar la componente vectorial $\mathbf{w}_2$ una vez que se ha hallado la proyección $\mathbf{w}_1$ de **u** en **v**. Para encontrar esta proyección, se usa el producto escalar como establece el teorema siguiente, el cual se demuestra en el ejercicio 92.

NOTA Ver la diferencia entre los términos "componente" y "componente vectorial". Por ejemplo, usando los vectores unitarios canónicos o estándar con $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$, u_1 es la *componente* de **u** en la dirección de **i** y $u_1\mathbf{i}$ es la *componente vectorial* de **u** en la dirección **i**. ■

TEOREMA 11.6 PROYECCIÓN UTILIZANDO EL PRODUCTO ESCALAR

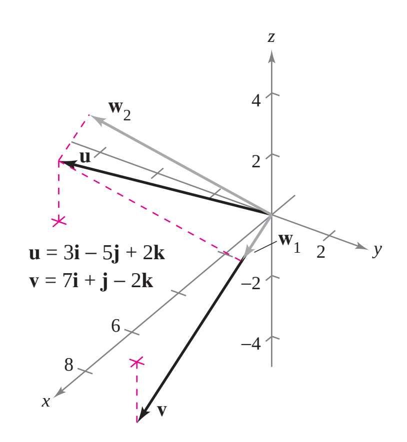
Si **u** y **v** son vectores distintos de cero, entonces la proyección de **u** en **v** está dada por

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\right)\mathbf{v}.$$

La proyección de **u** en **v** puede expresarse como un múltiplo escalar de un vector unitario en dirección de **v**. Es decir,

$$\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\right)\mathbf{v} = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right)\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = (k)\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \|\mathbf{u}\|\cos\theta.$$

Al escalar k se le llama la **componente de u en la dirección de v**.



$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$
Figura 11.31

EJEMPLO 5 Descomposición de un vector en componentes vectoriales

Hallar la proyección de **u** en **v** y la componente vectorial de **u** ortogonal a **v** de los vectores $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 7\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ mostrados en la figura 11.31.

Solución La proyección de **u** en **v** es

$$\mathbf{w}_1 = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\right)\mathbf{v} = \left(\frac{12}{54}\right)(7\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = \frac{14}{9}\mathbf{i} + \frac{2}{9}\mathbf{j} - \frac{4}{9}\mathbf{k}.$$

La componente vectorial de **u** ortogonal a **v** es el vector

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1 = (3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) - \left(\frac{14}{9}\mathbf{i} + \frac{2}{9}\mathbf{j} - \frac{4}{9}\mathbf{k}\right) = \frac{13}{9}\mathbf{i} - \frac{47}{9}\mathbf{j} + \frac{22}{9}\mathbf{k}.$$

EJEMPLO 6 Cálculo de una fuerza

Una lancha de 600 libras se encuentra sobre una rampa inclinada 30°, como se muestra en la figura 11.32. ¿Qué fuerza se requiere para impedir que la lancha resbale cuesta abajo por la rampa?

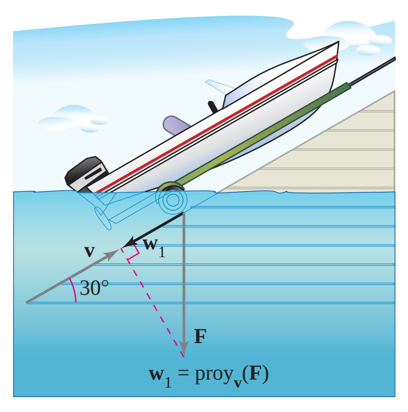


Figura 11.32

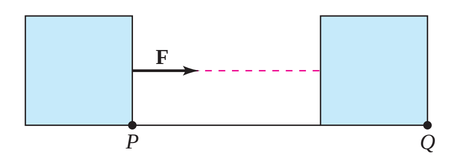
Solución Como la fuerza debida a la gravedad es vertical y hacia abajo, se puede representar la fuerza de la gravedad mediante el vector $\mathbf{F} = -600\mathbf{j}$. Para encontrar la fuerza requerida para impedir que la lancha resbale por la rampa, se proyecta **F** en un vector unitario **v** en la dirección de la rampa, como sigue.

$$\mathbf{v} = \cos 30°\,\mathbf{i} + \text{sen } 30°\,\mathbf{j} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$$ Vector unitario en la dirección de la rampa.

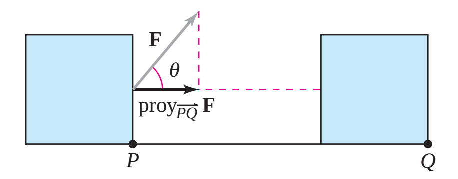
Por tanto, la proyección de **F** en **v** está dada por

$$\mathbf{w}_1 = \text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{F} = \left(\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\right)\mathbf{v} = (\mathbf{F}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v} = (-600)\left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{v} = -300\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}\right).$$

La magnitud de esta fuerza es 300, y por consiguiente se requiere una fuerza de 300 libras para impedir que la lancha resbale por la rampa.



a) La fuerza actúa a lo largo de la recta de movimiento



b) La fuerza actúa formando un ángulo θ con la recta de movimiento

Figura 11.33

Trabajo

El trabajo W realizado por una fuerza constante **F** que actúa a lo largo de la recta de movimiento de un objeto está dado por

$$W = (\text{magnitud de fuerza})(\text{distancia}) = \|\mathbf{F}\|\,\|\overrightarrow{PQ}\|$$

como se muestra en la figura 11.33*a*. Si la fuerza constante **F** no está dirigida a lo largo de la recta de movimiento, se puede ver en la figura 11.33*b* que el trabajo realizado W por la fuerza es

$$W = \|\text{proy}_{\overrightarrow{PQ}}\mathbf{F}\|\,\|\overrightarrow{PQ}\| = (\cos\theta)\|\mathbf{F}\|\,\|\overrightarrow{PQ}\| = \mathbf{F}\cdot\overrightarrow{PQ}.$$

Esta noción de trabajo se resume en la definición siguiente.

DEFINICIÓN DE TRABAJO

El trabajo W realizado por una fuerza constante **F** a medida que su punto de aplicación se mueve a lo largo del vector $\overrightarrow{PQ}$ está dado por las siguientes expresiones.

1. $W = \|\text{proy}_{\overrightarrow{PQ}}\mathbf{F}\|\,\|\overrightarrow{PQ}\|$ En forma de proyección.

2. $W = \mathbf{F}\cdot\overrightarrow{PQ}$ En forma de producto escalar.

EJEMPLO 7 Cálculo de trabajo

Para cerrar una puerta corrediza, una persona tira de una cuerda con una fuerza constante de 50 libras y un ángulo constante de 60°, como se muestra en la figura 11.34. Hallar el trabajo realizado al mover la puerta 12 pies hacia la posición en que queda cerrada.

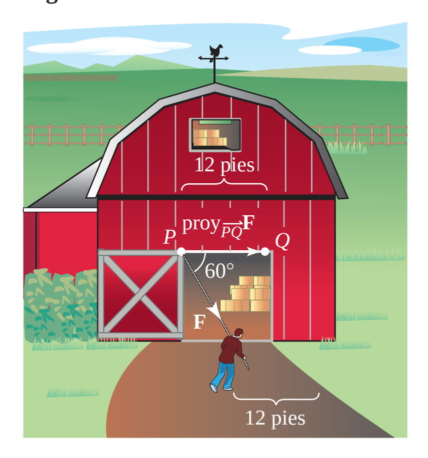


Figura 11.34

Solución Usando una proyección, se puede calcular el trabajo como sigue.

$$\begin{aligned} W &= \|\text{proy}_{\overrightarrow{PQ}}\mathbf{F}\|\,\|\overrightarrow{PQ}\| \qquad \text{Forma de proyección para el trabajo.}\\ &= \cos(60^\circ)\,\|\mathbf{F}\|\,\|\overrightarrow{PQ}\|\\ &= \frac{1}{2}(50)(12)\\ &= 300 \text{ libras-pie}\end{aligned}$$

11.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 8, hallar *a*) u · v, *b*) u · u, *c*) $\|\mathbf{u}\|^2$, *d*) (u · v)v y *e*) u · (2v).

1. $\mathbf{u} = \langle 3, 4\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -1, 5\rangle$

2. $\mathbf{u} = \langle 4, 10\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -2, 3\rangle$

3. $\mathbf{u} = \langle 6, -4\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -3, 2\rangle$

4. $\mathbf{u} = \langle -4, 8\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 7, 5\rangle$

5. $\mathbf{u} = \langle 2, -3, 4\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 0, 6, 5\rangle$

6. $\mathbf{u} = \mathbf{i}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i}$

7. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$

8. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

En los ejercicios 9 y 10, calcular u · v.

9. $\|\mathbf{u}\| = 8$, $\|\mathbf{v}\| = 5$, y el ángulo entre **u** y **v** es $\pi/3$.

10. $\|\mathbf{u}\| = 40$, $\|\mathbf{v}\| = 25$, y el ángulo entre **u** y **v** es $5\pi/6$.

En los ejercicios 11 a 18, calcular el ángulo *θ* entre los vectores.

11. $\mathbf{u} = \langle 1, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, -2\rangle$

12. $\mathbf{u} = \langle 3, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, -1\rangle$

13. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

14. $\mathbf{u} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\mathbf{i} + \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\mathbf{j}$

$\mathbf{v} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\mathbf{i} + \text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\mathbf{j}$

15. $\mathbf{u} = \langle 1, 1, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, 1, -1\rangle$

16. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

17. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

18. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

En los ejercicios 19 a 26, determinar si u y v son ortogonales, paralelos o ninguna de las dos cosas.

19. $\mathbf{u} = \langle 4, 0\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, 1\rangle$

20. $\mathbf{u} = \langle 2, 18\rangle$, $\mathbf{v} = \left\langle \frac{3}{2}, -\frac{1}{6}\right\rangle$

21. $\mathbf{u} = \langle 4, 3\rangle$, $\mathbf{v} = \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right\rangle$

22. $\mathbf{u} = -\frac{1}{3}(\mathbf{i} - 2\mathbf{j})$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

23. $\mathbf{u} = \mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

24. $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

25. $\mathbf{u} = \langle 2, -3, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -1, -1, -1\rangle$

26. $\mathbf{u} = \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta, -1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle \operatorname{sen}\theta, -\cos\theta, 0\rangle$

En los ejercicios 27 a 30, se dan los vértices de un triángulo. Determinar si el triángulo es un triángulo agudo, un triángulo obtuso o un triángulo recto. Explicar el razonamiento.

27. $(1, 2, 0), (0, 0, 0), (-2, 1, 0)$

28. $(-3, 0, 0), (0, 0, 0), (1, 2, 3)$

29. $(2, 0, 1), (0, 1, 2), (-0.5, 1.5, 0)$

30. $(2, -7, 3), (-1, 5, 8), (4, 6, -1)$

En los ejercicios 31 a 34, encontrar los cosenos directores de u y demostrar que la suma de los cuadrados de los cosenos directores es 1.

31. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

32. $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$

33. $\mathbf{u} = \langle 0, 6, -4\rangle$

34. $\mathbf{u} = \langle a, b, c\rangle$

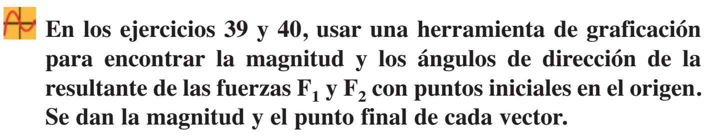
En los ejercicios 35 a 38, encontrar los ángulos de dirección del vector.

35. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

36. $\mathbf{u} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

37. $\mathbf{u} = \langle -1, 5, 2\rangle$

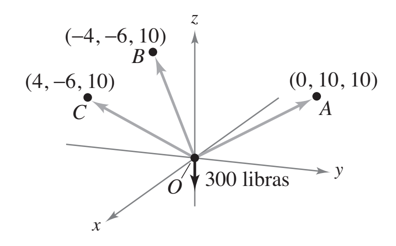
38. $\mathbf{u} = \langle -2, 6, 1\rangle$



En los ejercicios 39 y 40, usar una herramienta de graficación para encontrar la magnitud y los ángulos de dirección de la resultante de las fuerzas F_1 y F_2 con puntos iniciales en el origen. Se dan la magnitud y el punto final de cada vector.

	Vector	*Magnitud*	*Punto final*
39.	$\mathbf{F}_1$	50 lb	$(10, 5, 3)$
	$\mathbf{F}_2$	80 lb	$(12, 7, -5)$
40.	$\mathbf{F}_1$	300 N	$(-20, -10, 5)$
	$\mathbf{F}_2$	100 N	$(5, 15, 0)$

41. ***Cables que soportan una carga*** Una carga es soportada por tres cables, como se muestra en la figura. Calcular los ángulos de dirección del cable de soporte OA.



42. ***Cables que soportan una carga*** La tensión en el cable OA del ejercicio 41 es 200 newtons. Determinar el peso de la carga.

En los ejercicios 43 a 50, *a*) encontrar la proyección de u sobre v y *b*) encontrar la componente del vector de u ortogonal a v.

43. $\mathbf{u} = \langle 6, 7\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, 4\rangle$

44. $\mathbf{u} = \langle 9, 7\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, 3\rangle$

45. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j}$

46. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

47. $\mathbf{u} = \langle 0, 3, 3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -1, 1, 1\rangle$

48. $\mathbf{u} = \langle 8, 2, 0\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, 1, -1\rangle$

49. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

50. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$

Desarrollo de conceptos

51. Definir el producto escalar de los vectores **u** y **v**.

52. Dar la definición de vectores ortogonales. Si los vectores no son paralelos ni ortogonales, ¿cómo se encuentra el ángulo entre ellos? Explicar.

53. Determinar cuál de las siguientes expresiones están definidas para vectores distintos de cero **u**, **v** y **w**. Explicar el razonamiento.

a) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ *b*) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$

c) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{w}$ *d*) $\|\mathbf{u}\| \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

54. Describir los cosenos directores y los ángulos de dirección de un vector **v**.

55. Dar una descripción geométrica de la proyección de **u** en **v**.

56. ¿Qué puede decirse sobre los vectores **u** y **v** si *a*) la proyección de **u** en **v** es igual a **u** y *b*) la proyección de **u** en **v** es igual a **0**?

57. ¿Si la proyección de **u** en **v** tiene la misma magnitud que la proyección de **v** en **u**, ¿se puede concluir que $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$? Explicar.

Para discusión

58. ¿Qué se sabe acerca de θ, el ángulo entre dos vectores distintos de cero **u** y **v**, si

a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$? *b*) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$? *c*) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$?

59. ***Ingresos*** El vector $\mathbf{u} = \langle 3\,240, 1\,450, 2\,235\rangle$ da el número de hamburguesas, bocadillos de pollo y hamburguesas con queso, respectivamente, vendidos en una semana en un restaurante de comida rápida. El vector $\mathbf{v} = \langle 1.35, 2.65, 1.85\rangle$ da los precios (en dólares) por unidad de los tres artículos alimenticios. Encontrar el producto escalar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ y explicar qué información proporciona.

60. ***Ingresos*** Repita el ejercicio 59 después de incrementar los precios 4%. Identificar la operación vectorial usada para incrementar los precios 4%.

61. ***Programación*** Dados los vectores **u** y **v** mediante sus componentes, escribir un programa para una herramienta de graficación que calcule *a*) $\|\mathbf{u}\|$, *b*) $\|\mathbf{v}\|$,y *c*) ángulo entre **u** y **v**.

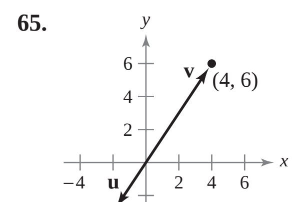
62. ***Programación*** Con el programa escrito en el ejercicio 61 encontrar el ángulo entre los vectores $\mathbf{u} = \langle 8, -4, 2\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 2, 5, 2\rangle$.

63. ***Programación*** Dados los vectores **u** y **v** mediante sus componentes, escribir un programa para herramienta de graficación que calcule las componentes de la proyección de **u** en **v**.

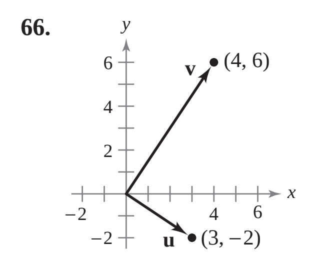
64. ***Programación*** Usar el programa escrito en el ejercicio 63 para encontrar la proyección de **u** en **v** si $\mathbf{u} = \langle 5, 6, 2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -1, 3, 4 \rangle$.

Para pensar **En los ejercicios 65 y 66, usar la figura para determinar mentalmente la proyección de u en v (se dan las coordenadas de los puntos finales de los vectores en la posición estándar). Verificar los resultados analíticamente.**

65.



66.



En los ejercicios 67 a 70, encontrar dos vectores en direcciones opuestas que sean ortogonales al vector u. (Las respuestas no son únicas.)

67. $\mathbf{u} = -\frac{1}{4}\mathbf{i} + \frac{3}{2}\mathbf{j}$

68. $\mathbf{u} = 9\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

69. $\mathbf{u} = \langle 3, 1, -2 \rangle$

70. $\mathbf{u} = \langle 4, -3, 6 \rangle$

71. ***Fuerza de frenado*** Un camión de 48 000 libras está estacionado sobre una pendiente de 10° (ver la figura). Si se supone que la única fuerza a vencer es la de la gravedad, hallar *a*) la fuerza requerida para evitar que el camión ruede cuesta abajo y *b*) la fuerza perpendicular a la pendiente.

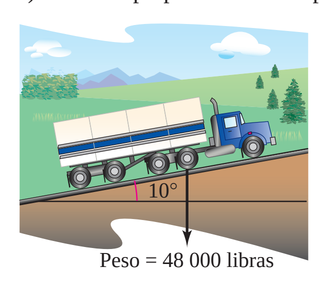


Figura para 71

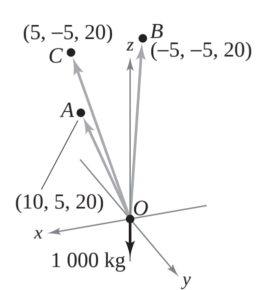


Figura para 72

72. ***Cables que soportan una carga*** Calcular la magnitud de la proyección del cable *OA* en el eje *z* positivo como se muestra en la figura.

73. ***Trabajo*** Un objeto es jalado 10 pies por el suelo, usando una fuerza de 85 libras. La dirección de la fuerza es 60° sobre la horizontal (ver la figura). Calcular el trabajo realizado.

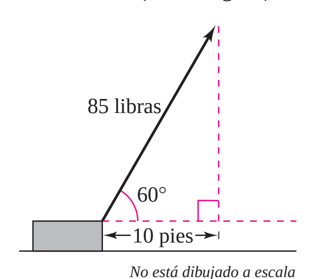


Figura para 73

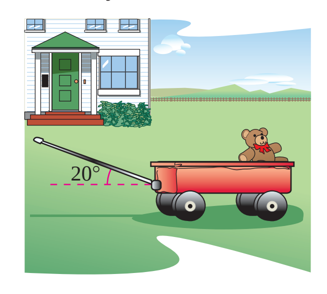


Figura para 74

74. ***Trabajo*** Un coche de juguete se jala ejerciendo una fuerza de 25 libras sobre una manivela que forma un ángulo de 20° con la horizontal (ver la figura). Calcular el trabajo realizado al jalar el coche 50 pies.

75. ***Trabajo*** Un carro se remolca usando una fuerza de 1 600 newtons. La cadena que se usa para jalar el carro forma un ángulo de 25° con la horizontal. Encontrar el trabajo que se realiza al remolcar el carro 2 kilómetros.

76. ***Trabajo*** Se tira de un trineo ejerciendo una fuerza de 100 newtons en una cuerda que hace un ángulo de 25° con la horizontal. Encontrar el trabajo efectuado al jalar el trineo 40 metros.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 77 y 78, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.**

77. Si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ y $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

78. Si **u** y **v** son ortogonales a **w**, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ es ortogonal a **w**.

79. Encontrar el ángulo entre la diagonal de un cubo y una de sus aristas.

80. Encontrar el ángulo entre la diagonal de un cubo y la diagonal de uno de sus lados.

En los ejercicios 81 a 84, *a*) encontrar todos los puntos de intersección de las gráficas de las dos ecuaciones; *b*) encontrar los vectores unitarios tangentes a cada curva en los puntos de intersección y *c*) hallar los ángulos ($0° \leq \theta \leq 90°$) entre las curvas en sus puntos de intersección.

81. $y = x^2, \quad y = x^{1/3}$

82. $y = x^3, \quad y = x^{1/3}$

83. $y = 1 - x^2, \quad y = x^2 - 1$

84. $(y + 1)^2 = x, \quad y = x^3 - 1$

85. Usar vectores para demostrar que las diagonales de un rombo son perpendiculares.

86. Usar vectores para demostrar que un paralelogramo es un rectángulo si y sólo si sus diagonales son iguales en longitud.

87. ***Ángulo de enlace*** Considerar un tetraedro regular con los vértices $(0, 0, 0)$, $(k, k, 0)$, $(k, 0, k)$ y $(0, k, k)$, donde k es un número real positivo.

a) Dibujar la gráfica del tetraedro.

b) Hallar la longitud de cada arista.

c) Hallar el ángulo entre cada dos aristas.

d) Hallar el ángulo entre los segmentos de recta desde el centroide $(k/2, k/2, k/2)$ a dos de los vértices. Éste es el ángulo de enlace en una molécula como CH_4 o $PbCl_4$, cuya estructura es un tetraedro.

88. Considerar los vectores $\mathbf{u} = \langle \cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha, 0 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle \cos \beta, \operatorname{sen} \beta, 0 \rangle$, donde $\alpha > \beta$. Calcular el producto escalar de los vectores y usar el resultado para demostrar la identidad

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta.$$

89. Demostrar que $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

90. Demostrar la **desigualdad de Cauchy-Schwarz** $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$.

91. Demostrar la desigualdad del triángulo $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

92. Demostrar el teorema 11.6.

11.4 El producto vectorial de dos vectores en el espacio

- Hallar el producto vectorial de dos vectores en el espacio.
- Usar el producto escalar triple de tres vectores en el espacio.

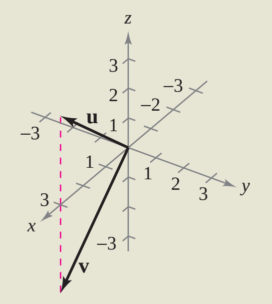
El producto vectorial

En muchas aplicaciones en física, ingeniería y geometría hay que encontrar un vector en el espacio ortogonal a dos vectores dados. En esta sección se estudia un producto que da como resultado ese vector. Se llama **producto vectorial** y se define y calcula de manera más adecuada utilizando los vectores unitarios canónicos o estándar. El producto vectorial debe su nombre a que da como resultado un vector. Al producto vectorial también se le suele llamar **producto cruz**.

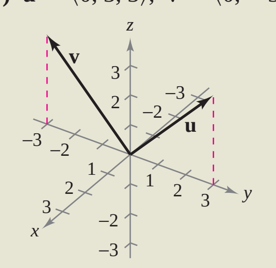
EXPLORACIÓN

Propiedad geométrica del producto vectorial Se muestran abajo tres pares de vectores. Usar la definición para encontrar el producto vectorial de cada par. Dibujar los tres vectores en un sistema tridimensional. Describir toda relación entre los tres vectores. Usar la descripción para escribir una conjetura acerca de **u**, **v** y **u** × **v**.

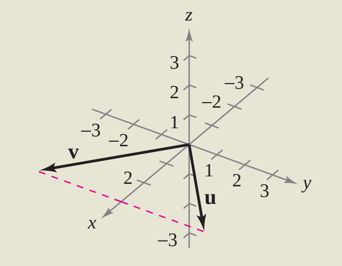
a) $\mathbf{u} = \langle 3, 0, 3\rangle,\ \mathbf{v} = \langle 3, 0, -3\rangle$



b) $\mathbf{u} = \langle 0, 3, 3\rangle,\ \mathbf{v} = \langle 0, -3, 3\rangle$



c) $\mathbf{u} = \langle 3, 3, 0\rangle,\ \mathbf{v} = \langle 3, -3, 0\rangle$



DEFINICIÓN DE PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES EN EL ESPACIO

Sean $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ vectores en el espacio. El **producto cruz** de **u** y **v** es el vector

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}.$$

NOTA Asegurarse de ver que esta definición sólo aplica a vectores tridimensionales. El producto vectorial no está definido para vectores bidimensionales. ■

Una manera adecuada para calcular **u** × **v** es usar *determinantes* con expansión de cofactores. (Esta forma empleando determinantes 3 × 3 se usa sólo para ayudar a recordar la fórmula del producto vectorial, pero técnicamente no es un determinante porque las entradas de la matriz correspondiente no son todas números reales.)

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

← Poner "**u**" en la fila 2.
← Poner "**v**" en la fila 3.

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}$$

Notar el signo menos delante de la componente **j**. Cada uno de los tres determinantes 2 × 2 se pueden evaluar usando el modelo diagonal siguiente.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Aquí están un par de ejemplos.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (2)(-1) - (4)(3) = -2 - 12 = -14$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = (4)(3) - (0)(-6) = 12$$

Notación para los productos escalar y vectorial

La notación para el producto escalar y para el producto vectorial la introdujo el físico estadounidense Josiah Willard Gibbs (1839-1903). A comienzos de la década de 1880, Gibbs construyó un sistema para representar cantidades físicas llamado "análisis vectorial". El sistema fue una variante de la teoría de los cuaterniones de Hamilton.

EJEMPLO 1 Hallar el producto vectorial

Dados $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, hallar cada uno de los siguientes productos vectoriales.

a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *b)* $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ *c)* $\mathbf{v} \times \mathbf{v}$

Solución

$$a)\ \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= (4 - 1)\mathbf{i} - (-2 - 3)\mathbf{j} + (1 + 6)\mathbf{k}$$

$$= 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$$

$$b)\ \mathbf{v} \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= (1 - 4)\mathbf{i} - (3 + 2)\mathbf{j} + (-6 - 1)\mathbf{k}$$

$$= -3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$$

Notar que este resultado es el negativo del obtenido en el inciso *a*).

$$c)\ \mathbf{v} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

Los resultados obtenidos en el ejemplo 1 sugieren algunas propiedades *algebraicas* interesantes del producto vectorial. Por ejemplo, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$ y $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Estas propiedades, y algunas otras, se presentan en forma resumida en el teorema siguiente.

TEOREMA 11.7 PROPIEDADES ALGEBRAICAS DEL PRODUCTO VECTORIAL

Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ vectores en el espacio, y sea c un escalar.

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$
2. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$
3. $c(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (c\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (c\mathbf{v})$
4. $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
5. $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
6. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$

DEMOSTRACIÓN Para demostrar la propiedad 1, sean $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ y $v = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$. Entonces,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = (v_2u_3 - v_3u_2)\mathbf{i} - (v_1u_3 - v_3u_1)\mathbf{j} + (v_1u_2 - v_2u_1)\mathbf{k}$$

la cual implica que $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$. Las demostraciones de las propiedades 2, 3, 5 y 6 se dejan como ejercicios (ver ejercicios 59 a 62).

Observar que la propiedad 1 del teorema 11.7 indica que el producto vectorial *no es conmutativo*. En particular, esta propiedad indica que los vectores $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ tienen longitudes iguales pero direcciones opuestas. El teorema siguiente da una lista de algunas otras de las propiedades *geométricas* del producto vectorial de dos vectores.

NOTA De las propiedades 1 y 2 presentadas en el teorema 11.8 se desprende que si $\mathbf{n}$ es un vector unitario ortogonal a $\mathbf{u}$ y a $\mathbf{v}$, entonces

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \pm(\|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\| \operatorname{sen} \theta)\mathbf{n}.$$

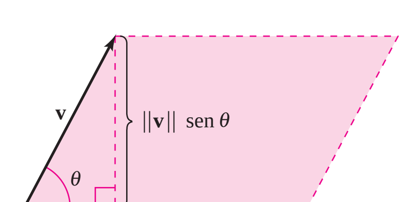
TEOREMA 11.8 PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DEL PRODUCTO VECTORIAL

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores distintos de cero en el espacio, y sea θ el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal tanto a $\mathbf{u}$ como a $\mathbf{v}$.
2. $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\| \operatorname{sen} \theta$
3. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ si y sólo si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son múltiplos escalares uno de otro.
4. $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| =$ área del paralelogramo que tiene $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ como lados adyacentes.

DEMOSTRACIÓN Para la propiedad 2, observar que como $\cos \theta = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})/(\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|)$, se sigue que

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\| \operatorname{sen} \theta &= \|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\
&= \|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\| \sqrt{1 - \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2}{\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2}} \\
&= \sqrt{\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2} \\
&= \sqrt{(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2} \\
&= \sqrt{(u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_1v_3 - u_3v_1)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2} \\
&= \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|.
\end{aligned}$$



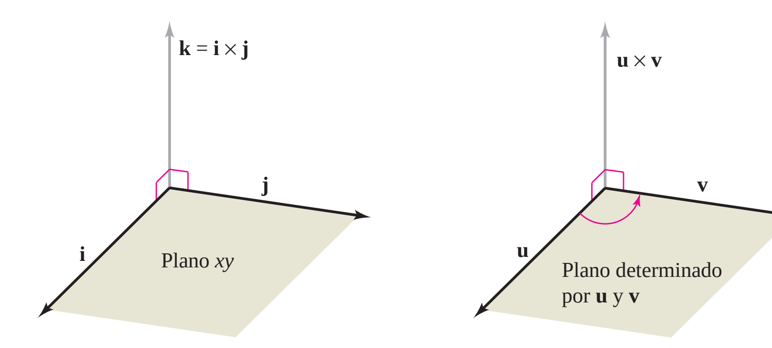
Los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son los lados adyacentes de un paralelogramo
Figura 11.35

Para demostrar la propiedad 4, ir a la figura 11.35 que es un paralelogramo que tiene $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}$ como lados adyacentes. Como la altura del paralelogramo es $\|\mathbf{v}\| \operatorname{sen} \theta$, el área es

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= (\text{base})(\text{altura}) \\
&= \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \operatorname{sen} \theta \\
&= \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|.
\end{aligned}$$

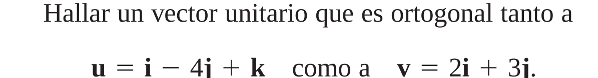
Las demostraciones de las propiedades 1 y 3 se dejan como ejercicios (ver ejercicios 63 y 64).

Tanto $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ como $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ son perpendiculares al plano determinado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Una manera de recordar las orientaciones de los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es compararlos con los vectores unitarios $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$, como se muestra en la figura 11.36. Los tres vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ forman un *sistema dextrógiro*, mientras que los tres vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ forman un *sistema levógiro*.



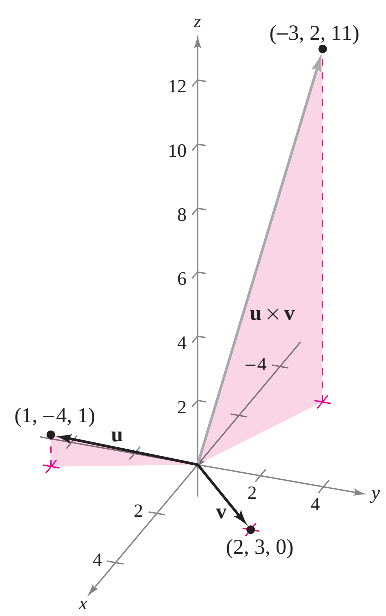
Sistemas dextrógiros
Figura 11.36

EJEMPLO 2 Utilización del producto vectorial



Hallar un vector unitario que es ortogonal tanto a

$$\mathbf{u} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k} \quad \text{como a} \quad \mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}.$$



El vector **u** × **v** es ortogonal tanto a **u** como a **v**
Figura 11.37

Solución El producto vectorial **u** × **v**, como se muestra en la figura 11.37, es ortogonal tanto a **u** como a **v**.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{Producto vectorial.}$$

$$= -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 11\mathbf{k}$$

Como

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 11^2} = \sqrt{134}$$

un vector unitario ortogonal tanto a **u** como a **v** es

$$\frac{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|} = -\frac{3}{\sqrt{134}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{134}}\mathbf{j} + \frac{11}{\sqrt{134}}\mathbf{k}.$$

NOTA En el ejemplo 2, notar que se podría haber usado el producto vectorial **v** × **u** para formar un vector unitario ortogonal tanto a **u** como a **v**. Con esa opción, se habría obtenido el negativo del vector unitario encontrado en el ejemplo.

EJEMPLO 3 Aplicación geométrica del producto vectorial

Mostrar que el cuadrilátero con vértices en los puntos siguientes es un paralelogramo y calcular su área.

$$A = (5, 2, 0) \qquad B = (2, 6, 1)$$
$$C = (2, 4, 7) \qquad D = (5, 0, 6)$$

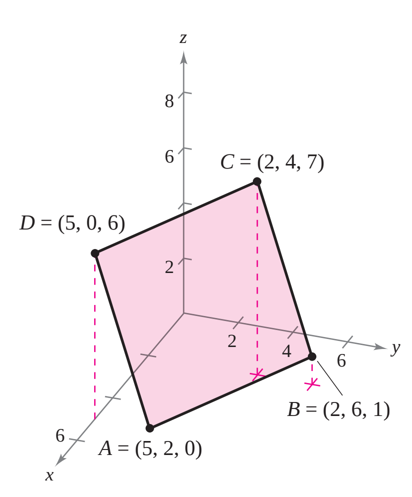
Solución En la figura 11.38 se puede ver que los lados del cuadrilátero corresponden a los siguientes cuatro vectores.

$$\overrightarrow{AB} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k} \qquad \overrightarrow{CD} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k} = -\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AD} = 0\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k} \qquad \overrightarrow{CB} = 0\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k} = -\overrightarrow{AD}$$

Por tanto, $\overrightarrow{AB}$ es paralelo a $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{AD}$ es paralelo a $\overrightarrow{CB}$, y se puede concluir que el cuadrilátero es un paralelogramo con $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ como lados adyacentes. Como

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} \qquad \text{Producto vectorial.}$$

$$= 26\mathbf{i} + 18\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

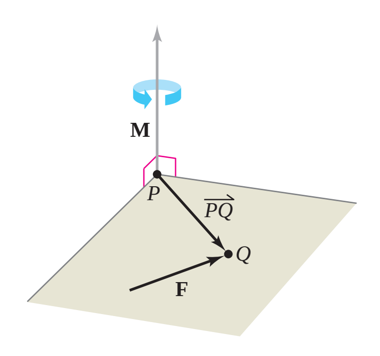


El área del paralelogramo es aproximadamente 32.19
Figura 11.38

el área del paralelogramo es

$$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\| = \sqrt{1036} \approx 32.19.$$

¿Es el paralelogramo un rectángulo? Para decidir si lo es o no, se calcula el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$.



El momento de **F** respecto a P
Figura 11.39

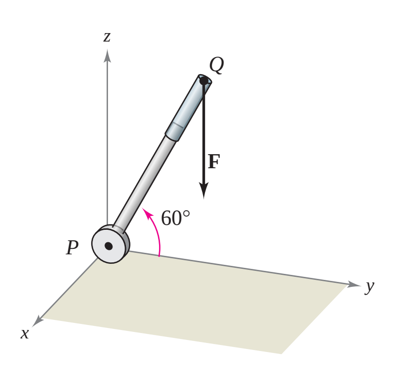
En física, el producto vectorial puede usarse para medir el **momento M de una fuerza F respecto a un punto *P***, como se muestra en la figura 11.39. Si el punto de aplicación de la fuerza es Q, el momento de **F** respecto a P está dado por

$$\mathbf{M} = \overrightarrow{PQ} \times \mathbf{F}.$$

Momento de **F** respecto a P.

La magnitud del momento **M** mide la tendencia del vector $\overrightarrow{PQ}$ al girar en sentido contrario al de las manecillas del reloj (usando la regla de la mano derecha) respecto a un eje en dirección del vector **M**.

EJEMPLO 4 Una aplicación del producto vectorial



Una fuerza vertical de 50 libras se aplica en el punto Q
Figura 11.40

Se aplica una fuerza vertical de 50 libras al extremo de una palanca de un pie de longitud unida a un eje en el punto P, como se muestra en la figura 11.40. Calcular el momento de esta fuerza respecto al punto P cuando $\theta = 60°$.

Solución Si se representa la fuerza de 50 libras como $\mathbf{F} = -50\mathbf{k}$ y la palanca como

$$\overrightarrow{PQ} = \cos(60°)\,\mathbf{j} + \operatorname{sen}(60°)\mathbf{k} = \frac{1}{2}\mathbf{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{k}$$

el momento de **F** respecto a P está dado por

$$\mathbf{M} = \overrightarrow{PQ} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & -50 \end{vmatrix} = -25\mathbf{i}.$$

Momento de **F** respecto a P.

La magnitud de este momento es 25 libras-pie.

NOTA En el ejemplo 4, notar que el momento (la tendencia de la palanca a girar sobre su eje) depende del ángulo θ. Cuando $\theta = \pi/2$, el momento es 0. El momento es máximo cuando $\theta = 0$. ■

El triple producto escalar (o producto mixto)

Dados vectores **u**, **v** y **w** en el espacio, al producto escalar de **u** y $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

se le llama **triple producto escalar**, como se define en el teorema 11.9. La demostración de este teorema se deja como ejercicio (ver ejercicio 67).

PARA MAYOR INFORMACIÓN
Para ver cómo el producto vectorial se usa para modelar el momento de un brazo de robot de un transbordador espacial, ver el artículo "The Long Arm of Calculus" de Ethan Berkove y Rich Marchand en *The College Mathematics Journal*.

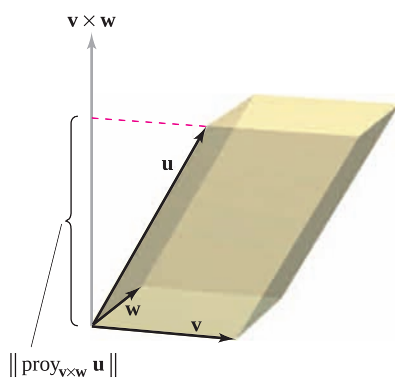
TEOREMA 11.9 EL TRIPLE PRODUCTO ESCALAR

Para $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}$, el triple producto escalar está dado por

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

NOTA El valor de un determinante se multiplica por -1 si se intercambian dos de sus filas. Después de estos dos intercambios, el valor del determinante queda inalterado. Por tanto, los triples productos escalares siguientes son equivalentes.

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$$ ■



Área de la base $= \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|$
Volumen de paralelepípedo
$= |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$
Figura 11.41

Si los vectores **u**, **v** y **w** no están en el mismo plano, el triple producto escalar $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ puede usarse para determinar el volumen del paralelepípedo (un poliedro, en el que todas sus caras son paralelogramos) con **u**, **v** y **w** como aristas adyacentes, como se muestra en la figura 11.41. Esto se establece en el teorema siguiente.

TEOREMA 11.10 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL TRIPLE PRODUCTO ESCALAR

El volumen V de un paralelepípedo con vectores **u**, **v** y **w** como aristas adyacentes está dado por

$$V = |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|.$$

DEMOSTRACIÓN En la figura 11.41 se observa que

$$\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = \text{área de la base}$$

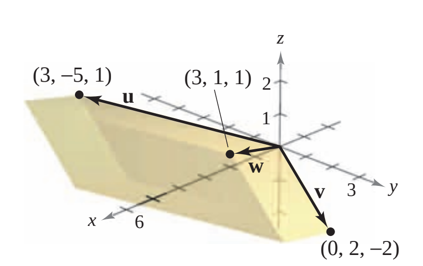
y

$$\|\text{proy}_{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}\mathbf{u}\| = \text{altura de paralelepípedo.}$$

Por consiguiente, el volumen es

$$\begin{aligned} V &= (\text{altura})(\text{área de la base}) = \|\text{proy}_{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| \\ &= \left|\frac{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|}\right| \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| \\ &= |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|. \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Cálculo de un volumen por medio del triple producto escalar



El paralelepípedo tiene un volumen de 36
Figura 11.42

Calcular el volumen del paralelepípedo mostrado en la figura 11.42 que tiene $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{w} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ como aristas adyacentes.

Solución Por el teorema 11.10, se tiene

$$\begin{aligned} V &= |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})| \qquad \text{Triple producto escalar.} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (-5)\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3(4) + 5(6) + 1(-6) \\ &= 36. \end{aligned}$$

Una consecuencia natural del teorema 11.10 es que el volumen del paralelepípedo es 0 si y sólo si los tres vectores son coplanares. Es decir, si los vectores $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ y $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ tienen el mismo punto inicial, se encuentran en el mismo plano si y sólo si

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

11.4 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, calcular el producto vectorial de los vectores unitarios y dibujar su resultado.

1. $\mathbf{j} \times \mathbf{i}$
2. $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$
3. $\mathbf{j} \times \mathbf{k}$
4. $\mathbf{k} \times \mathbf{j}$
5. $\mathbf{i} \times \mathbf{k}$
6. $\mathbf{k} \times \mathbf{i}$

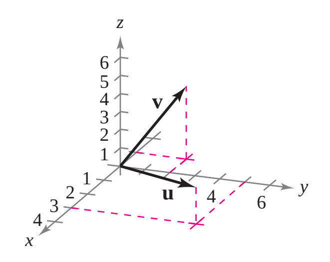
En los ejercicios 7 a 10, calcular *a*) u × v, *b*) v × u y *c*) v × v.

7. $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$
8. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
9. $\mathbf{u} = \langle 7, 3, 2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, -1, 5\rangle$
10. $\mathbf{u} = \langle 3, -2, -2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, 5, 1\rangle$

En los ejercicios 11 a 16, calcular u × v y probar que es ortogonal tanto a u como a v.

11. $\mathbf{u} = \langle 12, -3, 0\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -2, 5, 0\rangle$
12. $\mathbf{u} = \langle -1, 1, 2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 0, 1, 0\rangle$
13. $\mathbf{u} = \langle 2, -3, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, -2, 1\rangle$
14. $\mathbf{u} = \langle -10, 0, 6\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 5, -3, 0\rangle$
15. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$
16. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 6\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

Para pensar **En los ejercicios 17 a 20, usar los vectores u y v mostrados en la figura para dibujar en un sistema dextrógiro un vector en la dirección del producto vectorial indicado.**



17. $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$
18. $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$
19. $(-\mathbf{v}) \times \mathbf{u}$
20. $\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

CAS **En los ejercicios 21 a 24, usar un sistema algebraico por computadora para encontrar u × v y un vector unitario ortogonal a u y a v.**

21. $\mathbf{u} = \langle 4, -3.5, 7\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2.5, 9, 3\rangle$
22. $\mathbf{u} = \langle -8, -6, 4\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 10, -12, -2\rangle$
23. $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 0.4\mathbf{i} - 0.8\mathbf{j} + 0.2\mathbf{k}$
24. $\mathbf{u} = 0.7\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 1.5\mathbf{i} + 6.2\mathbf{k}$

25. ***Programación*** Dadas las componentes de los vectores **u** y **v**, escribir un programa para herramienta de graficación que calcule $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$.

26. ***Programación*** Usar el programa escrito en el ejercicio 25 para encontrar $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$ para $\mathbf{u} = \langle -2, 6, 10\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 3, 8, 5\rangle$.

Área **En los ejercicios 27 a 30, calcular el área del paralelogramo que tiene los vectores dados como lados adyacentes. Usar un sistema algebraico por computadora o una herramienta de graficación para verificar el resultado.**

27. $\mathbf{u} = \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$
28. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$
29. $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, 2, 3\rangle$
30. $\mathbf{u} = \langle 2, -1, 0\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -1, 2, 0\rangle$

Área **En los ejercicios 31 y 32, verificar que los puntos son los vértices de un paralelogramo, y calcular su área.**

31. $A(0, 3, 2)$, $B(1, 5, 5)$, $C(6, 9, 5)$, $D(5, 7, 2)$
32. $A(2, -3, 1)$, $B(6, 5, -1)$, $C(7, 2, 2)$, $D(3, -6, 4)$

Área **En los ejercicios 33 a 36, calcular el área del triángulo con los vértices dados. (*Sugerencia:* $\frac{1}{2}\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$ es el área del triángulo que tiene u y v como lados adyacentes.)**

33. $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 3)$, $C(-3, 2, 0)$
34. $A(2, -3, 4)$, $B(0, 1, 2)$, $C(-1, 2, 0)$
35. $A(2, -7, 3)$, $B(-1, 5, 8)$, $C(4, 6, -1)$
36. $A(1, 2, 0)$, $B(-2, 1, 0)$, $C(0, 0, 0)$

37. ***Momento*** Un niño frena en una bicicleta aplicando una fuerza dirigida hacia abajo de 20 libras sobre el pedal cuando la manivela forma un ángulo de 40° con la horizontal (ver la figura). La manivela tiene 6 pulgadas de longitud. Calcular el momento respecto a *P*.

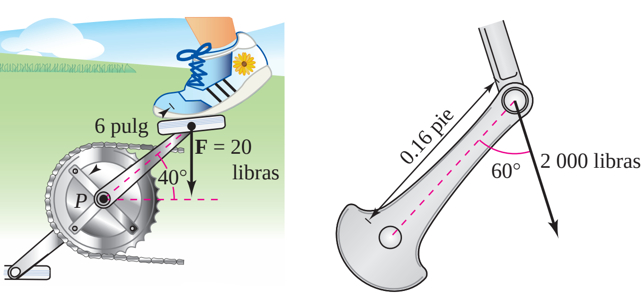
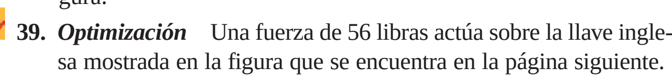


Figura para 37 **Figura para 38**

38. ***Momento*** La magnitud y la dirección de la fuerza sobre un cigüeñal cambian cuando éste gira. Calcular el momento sobre el cigüeñal usando la posición y los datos mostrados en la figura.



39. ***Optimización*** Una fuerza de 56 libras actúa sobre la llave inglesa mostrada en la figura que se encuentra en la página siguiente.
   a) Calcular la magnitud del momento respecto a *O* evaluando $\|\overrightarrow{OA} \times \mathbf{F}\|$. Usar una herramienta de graficación para representar la función de θ que se obtiene.
   b) Usar el resultado del inciso *a*) para determinar la magnitud del momento cuando $\theta = 45°$.
   c) Usar el resultado del inciso *a*) para determinar el ángulo θ cuando la magnitud del momento es máxima. ¿Es la respuesta lo que se esperaba? ¿Por qué sí o por qué no?

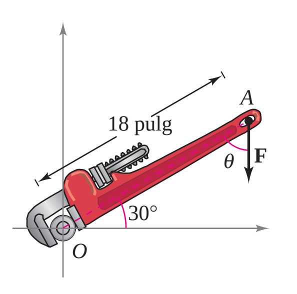


Figura para 39

Figura para 40

40. ***Optimización*** Una fuerza de 180 libras actúa sobre el soporte mostrado en la figura.

a) Determinar el vector $\overrightarrow{AB}$ y el vector **F** que representa la fuerza. (**F** estará en términos de θ.)

b) Calcular la magnitud del momento respecto a A evaluando $\|\overrightarrow{AB} \times \mathbf{F}\|$.

c) Usar el resultado del inciso *b*) para determinar la magnitud del momento cuando $\theta = 30°$.

d) Usar el resultado del inciso *b*) para determinar el ángulo θ cuando la magnitud del momento es máxima. A ese ángulo, ¿cuál es la relación entre los vectores **F** y $\overrightarrow{AB}$? ¿Es lo que se esperaba? ¿Por qué sí o por qué no?


e) Usar una herramienta de graficación para representar la función de la magnitud del momento respecto a A para $0° \leq \theta \leq 180°$. Hallar el cero de la función en el dominio dado. Interpretar el significado del cero en el contexto del problema.

En los ejercicios 41 a 44, calcular $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$.

41. $\mathbf{u} = \mathbf{i}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j}$, $\mathbf{w} = \mathbf{k}$

42. $\mathbf{u} = \langle 1, 1, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, 1, 0\rangle$, $\mathbf{w} = \langle 0, 0, 1\rangle$

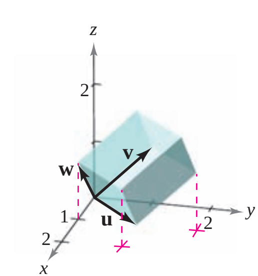
43. $\mathbf{u} = \langle 2, 0, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 0, 3, 0\rangle$, $\mathbf{w} = \langle 0, 0, 1\rangle$

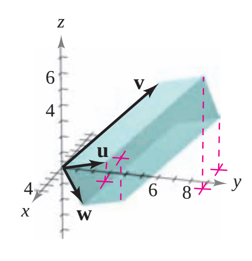
44. $\mathbf{u} = \langle 2, 0, 0\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, 1, 1\rangle$, $\mathbf{w} = \langle 0, 2, 2\rangle$

Volumen **En los ejercicios 45 y 46, usar el triple producto escalar para encontrar el volumen del paralelepípedo que tiene como aristas adyacentes u, v y w.**

45. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$

46. $\mathbf{u} = \langle 1, 3, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 0, 6, 6\rangle$, $\mathbf{w} = \langle -4, 0, -4\rangle$





Volumen **En los ejercicios 47 y 48, encontrar el volumen del paralelepípedo que tiene vértices dados (ver las figuras).**

47. $(0, 0, 0), (3, 0, 0), (0, 5, 1), (2, 0, 5)$
$(3, 5, 1), (5, 0, 5), (2, 5, 6), (5, 5, 6)$

48. $(0, 0, 0), (0, 4, 0), (-3, 0, 0), (-1, 1, 5)$
$(-3, 4, 0), (-1, 5, 5), (-4, 1, 5), (-4, 5, 5)$

49. Si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, ¿qué se puede concluir acerca de **u** y **v**?

50. Identificar los productos vectoriales que son iguales. Explicar el razonamiento. (Suponer que **u**, **v** y **w** son vectores distintos de cero.)

***a*)** $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ ***b*)** $(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u}$

***c*)** $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ ***d*)** $(\mathbf{u} \times -\mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}$

***e*)** $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v})$ ***f*)** $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{u})$

***g*)** $(-\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ ***h*)** $(\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$

Desarrollo de conceptos

51. Definir el producto vectorial de los vectores **u** y **v**.

52. Dar las propiedades geométricas del producto vectorial.

53. Si las magnitudes de dos vectores se duplican, ¿cómo se modificará la magnitud del producto vectorial de los vectores? Explicar.

Para discusión

54. Los vértices de un triángulo en el espacio son (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) y (x_3, y_3, z_3). Explicar cómo encontrar un vector perpendicular al triángulo.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 55 a 58, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.**

55. Es posible encontrar el producto vectorial de dos vectores en un sistema de coordenadas bidimensional.

56. Si **u** y **v** son vectores en el espacio que son distintos de cero y no paralelos, entonces $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$.

57. Si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{w}$, entonces $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

58. Si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ y $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{w}$, entonces $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

En los ejercicios 59 a 66, demostrar la propiedad del producto vectorial.

59. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$

60. $c(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (c\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (c\mathbf{v})$

61. $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

62. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$

63. $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal tanto a **u** como a **v**.

64. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ si y sólo si **u** y **v** son múltiplos escalares uno del otro.

65. Demostrar que $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$ si **u** y **v** son ortogonales.

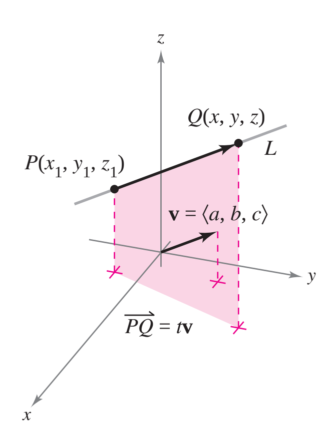
66. Demostrar que $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$.

67. Demostrar el teorema 11.9.

11.5 Rectas y planos en el espacio

- **Dar un conjunto de ecuaciones paramétricas para una recta en el espacio.**
- **Dar una ecuación lineal para representar un plano en el espacio.**
- **Dibujar el plano dado por una ecuación lineal.**
- **Hallar las distancias entre puntos, planos y rectas en el espacio.**

Rectas en el espacio



La recta L y su vector de dirección $\mathbf{v}$
Figura 11.43

En el plano se usa la *pendiente* para determinar una ecuación de una recta. En el espacio es más conveniente usar *vectores* para determinar la ecuación de una recta.

En la figura 11.43 se considera la recta L a través del punto $P(x_1, y_1, z_1)$ y paralela al vector $\mathbf{v} = \langle a, b, c\rangle$. El vector $\mathbf{v}$ es un **vector de dirección** o director de la recta L, y a, b y c son los **números de dirección** (o directores). Una manera de describir la recta L es decir que consta de todos los puntos $Q(x, y, z)$ para los que el vector $\overrightarrow{PQ}$ es paralelo a $\mathbf{v}$. Esto significa que $\overrightarrow{PQ}$ es un múltiplo escalar de $\mathbf{v}$, y se puede escribir a $\overrightarrow{PQ} = t\mathbf{v}$, donde t es un escalar (un número real).

$$\overrightarrow{PQ} = \langle x - x_1, y - y_1, z - z_1\rangle = \langle at, bt, ct\rangle = t\mathbf{v}$$

Igualando los componentes correspondientes, se obtienen las **ecuaciones paramétricas** de una recta en el espacio.

TEOREMA 11.11 ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE UNA RECTA EN EL ESPACIO

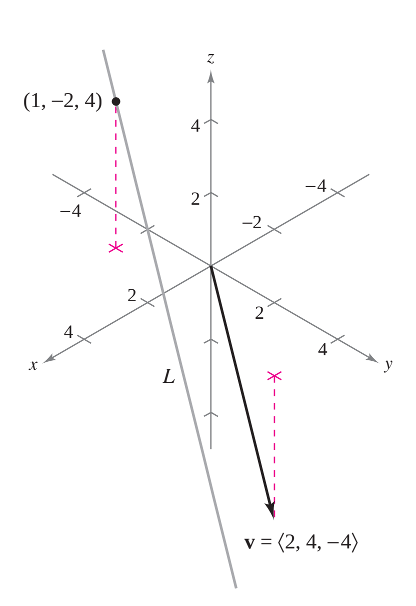
Una recta L paralela al vector $\mathbf{v} = \langle a, b, c\rangle$ y que pasa por el punto $P(x_1, y_1, z_1)$ se representa por medio de las **ecuaciones paramétricas**

$$x = x_1 + at, \quad y = y_1 + bt \quad \text{y} \quad z = z_1 + ct.$$

Si todos los números directores a, b y c son distintos de cero, se puede eliminar el parámetro t para obtener las **ecuaciones simétricas** (o cartesianas) de la recta.

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$ Ecuaciones simétricas.

EJEMPLO 1 Hallar las ecuaciones paramétricas y simétricas



El vector $\mathbf{v}$ es paralelo a la recta L
Figura 11.44

Hallar las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta L que pasa por el punto $(1, -2, 4)$ y es paralela a $\mathbf{v} = \langle 2, 4, -4\rangle$.

Solución Para hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta, se usan las coordenadas $x_1 = 1$, $y_1 = -2$,y $z_1 = 4$, y los números de dirección $a = 2$, $b = 4$ y $c = -4$ (ver figura 11.44).

$$x = 1 + 2t, \quad y = -2 + 4t, \quad z = 4 - 4t$$ Ecuaciones paramétricas.

Como a, b y c son todos diferentes de cero, un conjunto de ecuaciones simétricas es

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{4} = \frac{z - 4}{-4}.$$ Ecuaciones simétricas.

Ni las ecuaciones paramétricas ni las ecuaciones simétricas de una recta dada son únicas. Así, en el ejemplo 1, tomando $t = 1$ en las ecuaciones paramétricas se obtiene el punto (3, 2, 0). Usando este punto con los números de dirección $a = 2$, $b = 4$ y $c = -4$ se obtiene un conjunto diferente de ecuaciones paramétricas

$$x = 3 + 2t, \quad y = 2 + 4t \quad \text{y} \quad z = -4t.$$

EJEMPLO 2 Ecuaciones paramétricas de una recta que pasa por dos puntos

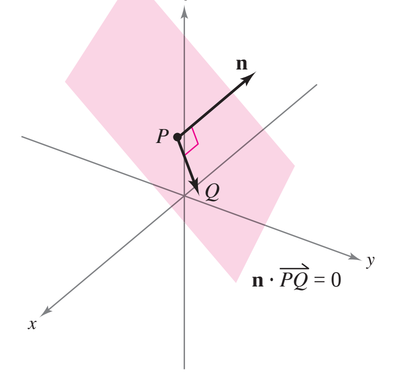
Hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $(-2, 1, 0)$ y $(1, 3, 5)$.

Solución Se empieza por usar los puntos $P(-2, 1, 0)$ y $Q(1, 3, 5)$ para hallar un vector de dirección de la recta que pasa por P y Q, dado por

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = \langle 1 - (-2), 3 - 1, 5 - 0 \rangle = \langle 3, 2, 5 \rangle = \langle a, b, c \rangle.$$

Usando los números de dirección $a = 3$, $b = 2$ y $c = 5$ junto con el punto $P(-2, 1, 0)$, se obtienen las ecuaciones paramétricas

$$x = -2 + 3t, \quad y = 1 + 2t \quad \text{y} \quad z = 5t.$$



El vector normal **n** es ortogonal a todo vector $\overrightarrow{PQ}$ en el plano
Figura 11.45

NOTA Como t varía sobre todos los números reales, las ecuaciones paramétricas del ejemplo 2 determinan los puntos (x, y, z) sobre la recta. En particular, hay que observar que $t = 0$ y $t = 1$ dan los puntos originales $(-2, 1, 0)$ y $(1, 3, 5)$. ■

Planos en el espacio

Se ha visto cómo se puede obtener una ecuación de una recta en el espacio a partir de un punto sobre la recta y un vector *paralelo* a ella. Ahora se verá que una ecuación de un plano en el espacio se puede obtener a partir de un punto en el plano y de un vector *normal* (perpendicular) al plano.

Considerar el plano que contiene el punto $P(x_1, y_1, z_1)$ y que tiene un vector normal distinto de cero $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$, como se muestra en la figura 11.45. Este plano consta de todos los puntos $Q(x, y, z)$ para los cuales el vector $\overrightarrow{PQ}$ es ortogonal a **n**. Usando el producto vectorial, se puede escribir

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$$
$$\langle a, b, c \rangle \cdot \langle x - x_1, y - y_1, z - z_1 \rangle = 0$$
$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

La tercera ecuación del plano se dice que está en **forma canónica** o **estándar**.

TEOREMA 11.12 ECUACIÓN CANÓNICA O ESTÁNDAR DE UN PLANO EN EL ESPACIO

El plano que contiene el punto (x_1, y_1, z_1) y tiene un vector normal $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$ puede representarse en **forma canónica** o **estándar**, por medio de la ecuación

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0.$$

Reagrupando términos, se obtiene la **forma general** de la ecuación de un plano en el espacio.

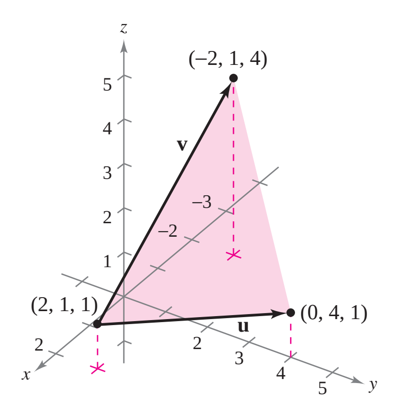
$$ax + by + cz + d = 0$$

Forma general de la ecuación de un plano en el espacio.

Dada la forma general de la ecuación de un plano, es fácil hallar un vector normal al plano. Simplemente se usan los coeficientes de x, y y z para escribir $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$.

EJEMPLO 3 Hallar una ecuación de un plano en el espacio tridimensional

Hallar la ecuación general del plano que contiene a los puntos $(2, 1, 1)$, $(0, 4, 1)$ y $(-2, 1, 4)$.



Un plano determinado por **u** y **v**
Figura 11.46

Solución Para aplicar el teorema 11.12 se necesita un punto en el plano y un vector que sea normal al plano. Hay tres opciones para el punto, pero no se da ningún vector normal. Para obtener un vector normal, se usa el producto vectorial de los vectores **u** y **v** que van del punto $(2, 1, 1)$ a los puntos $(0, 4, 1)$ y $(-2, 1, 4)$, como se muestra en la figura 11.46. Los vectores **u** y **v** dados mediante sus componentes son

$$\mathbf{u} = \langle 0 - 2, 4 - 1, 1 - 1 \rangle = \langle -2, 3, 0 \rangle$$
$$\mathbf{v} = \langle -2 - 2, 1 - 1, 4 - 1 \rangle = \langle -4, 0, 3 \rangle$$

así que

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \mathbf{u} \times \mathbf{v} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 9\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 12\mathbf{k} \\ &= \langle a, b, c \rangle \end{aligned}$$

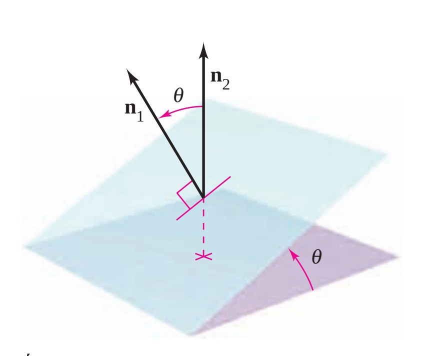
es normal al plano dado. Usando los números de dirección para **n** y el punto $(x_1, y_1, z_1) = (2, 1, 1)$, se puede determinar que una ecuación del plano es

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$
$$9(x - 2) + 6(y - 1) + 12(z - 1) = 0 \qquad \text{Forma canónica o estándar.}$$
$$9x + 6y + 12z - 36 = 0 \qquad \text{Forma general.}$$
$$3x + 2y + 4z - 12 = 0. \qquad \text{Forma general simplificada.}$$



NOTA En el ejemplo 3, verificar que cada uno de los tres puntos originales satisfacen la ecuación $3x + 2y + 4z - 12 = 0$. ■

Dos planos distintos en el espacio tridimensional o son paralelos o se cortan en una recta. Si se cortan, se puede determinar el ángulo $(0 \le \theta \le \pi/2)$ entre ellos a partir del ángulo entre sus vectores normales, como se muestra en la figura 11.47. Específicamente, si los vectores $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ son normales a dos planos que se cortan, el ángulo θ entre los vectores normales es igual al ángulo entre los dos planos y está dado por



Ángulo θ entre dos planos
Figura 11.47

$$\cos \theta = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{\|\mathbf{n}_1\| \, \|\mathbf{n}_2\|}. \qquad \text{Ángulo entre dos planos.}$$

Por consiguiente, dos planos con vectores normales $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ son

1. *perpendiculares* si $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$.
2. *paralelos* si $\mathbf{n}_1$ es un múltiplo escalar de $\mathbf{n}_2$.

EJEMPLO 4 Hallar la recta de intersección de dos planos

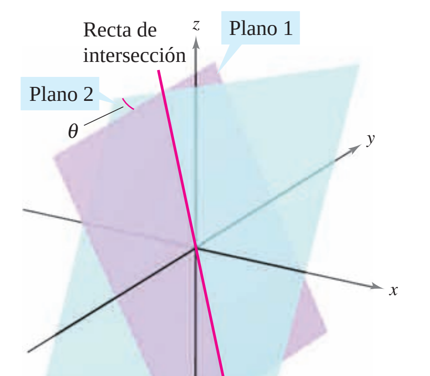


Figura 11.48

Hallar el ángulo entre los dos planos dados por

$$x - 2y + z = 0 \quad \text{Ecuación de plano 1.}$$
$$2x + 3y - 2z = 0 \quad \text{Ecuación de plano 2.}$$

y hallar las ecuaciones paramétricas de su recta de intersección (ver figura 11.48).

Solución Los vectores normales a los planos son $\mathbf{n}_1 = \langle 1, -2, 1\rangle$ y $\mathbf{n}_2 = \langle 2, 3, -2\rangle$. Por consiguiente, el ángulo entre los dos planos está determinado como sigue.

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{\|\mathbf{n}_1\|\,\|\mathbf{n}_2\|} \quad \text{Coseno del ángulo entre } \mathbf{n}_1 \text{ y } \mathbf{n}_2.\\ &= \frac{|-6|}{\sqrt{6}\,\sqrt{17}}\\ &= \frac{6}{\sqrt{102}}\\ &\approx 0.59409\end{aligned}$$

Esto implica que el ángulo entre los dos planos es $\theta \approx 53.55°$. La recta de intersección de los dos planos se puede hallar resolviendo simultáneamente las dos ecuaciones lineales que representan a los planos. Una manera de hacer esto es multiplicar la primera ecuación por -2 y sumar el resultado a la segunda ecuación.

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 0 \quad \Rightarrow \quad -2x + 4y - 2z = 0\\ 2x + 3y - 2z &= 0 \quad\quad\quad\;\; \underline{2x + 3y - 2z = 0}\\ &\quad\quad\quad\quad\quad\quad 7y - 4z = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{4z}{7}\end{aligned}$$

Sustituyendo $y = 4z/7$ en una de las ecuaciones originales, se determina que $x = z/7$. Finalmente, haciendo $t = z/7$, se obtienen las ecuaciones paramétricas

$$x = t, \quad y = 4t \quad \text{y} \quad z = 7t \quad \text{Recta de intersección.}$$

lo cual indica que 1, 4 y 7 son los números de dirección de la recta de intersección.

Hay que observar que los números de dirección del ejemplo 4 se pueden obtener a partir del producto vectorial de los dos vectores normales como sigue.

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & 3 & -2\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix} -2 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1\\ 2 & -2\end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2\\ 2 & 3\end{vmatrix}\mathbf{k}\\ &= \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}\end{aligned}$$

Esto significa que la recta de intersección de los dos planos es paralela al producto vectorial de sus vectores normales.

Trazado de planos en el espacio

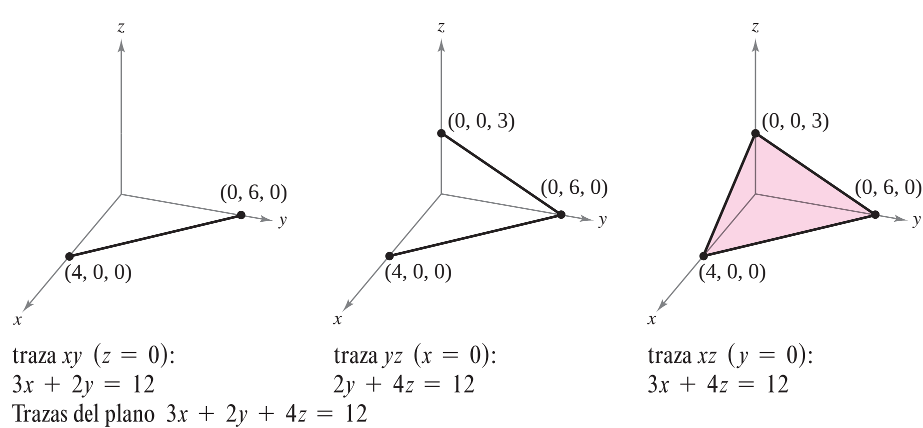
Si un plano en el espacio corta uno de los planos coordenados, a la recta de intersección se le llama la **traza** del plano dado en el plano coordenado. Para dibujar un plano en el espacio, es útil hallar sus puntos de intersección con los ejes coordenados y sus trazas en los planos coordenados. Por ejemplo, considerar el plano dado por

$$3x + 2y + 4z = 12. \qquad \text{Ecuación del plano.}$$

Se puede hallar la traza xy, haciendo $z = 0$ y dibujando la recta

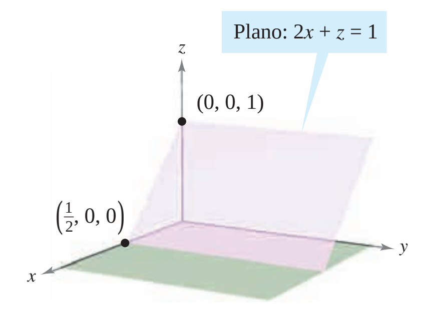
$$3x + 2y = 12 \qquad \text{Traza } xy\text{-}$$

en el plano xy. Esta recta corta el eje x en (4, 0, 0) y el eje y en (0, 6, 0). En la figura 11.49 se continúa con este proceso encontrando la traza yz y la traza xz, y sombreando la región triangular que se encuentra en el primer octante.



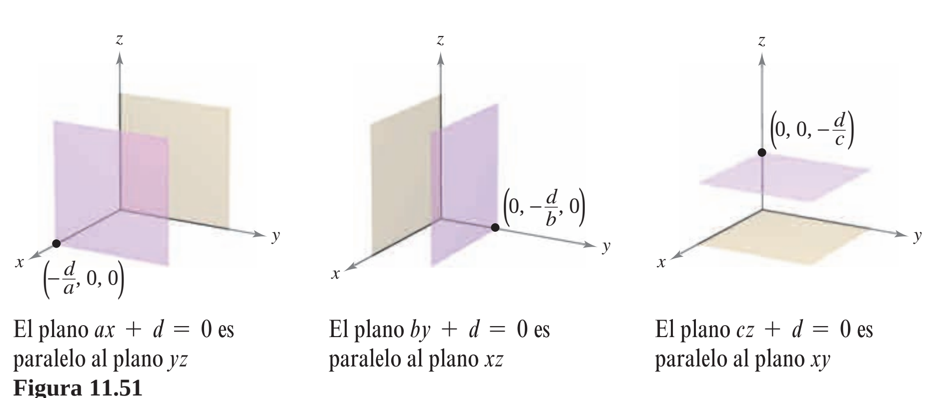
traza xy $(z = 0)$: $3x + 2y = 12$ | traza yz $(x = 0)$: $2y + 4z = 12$ | traza xz $(y = 0)$: $3x + 4z = 12$

Trazas del plano $3x + 2y + 4z = 12$
Figura 11.49



El plano $2x + z = 1$ es paralelo al eje y
Figura 11.50

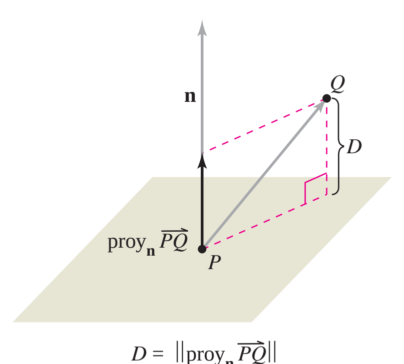
Si en una ecuación de un plano está ausente una variable, como en la ecuación $2x + z = 1$, el plano debe ser *paralelo al eje* correspondiente a la variable ausente, como se muestra en la figura 11.50. Si en la ecuación de un plano faltan dos variables, éste es *paralelo al plano coordenado* correspondiente a las variables ausentes, como se muestra en la figura 11.51.



El plano $ax + d = 0$ es paralelo al plano yz | El plano $by + d = 0$ es paralelo al plano xz | El plano $cz + d = 0$ es paralelo al plano xy

Figura 11.51

Distancias entre puntos, planos y rectas



$D = \|\text{proy}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{PQ}\|$

La distancia de un punto a un plano
Figura 11.52

Esta sección concluye con el análisis de dos tipos básicos de problemas sobre distancias en el espacio.

1. Calcular la distancia de un punto a un plano.
2. Calcular la distancia de un punto a una recta.

Las soluciones de estos problemas ilustran la versatilidad y utilidad de los vectores en la geometría analítica: el primer problema usa el *producto escalar* de dos vectores, y el segundo problema usa el *producto vectorial*.

La distancia D de un punto Q a un plano es la longitud del segmento de recta más corto que une a Q con el plano, como se muestra en la figura 11.52. Si P es un punto *cualquiera* del plano, esta distancia se puede hallar proyectando el vector $\overrightarrow{PQ}$ sobre el vector normal $\mathbf{n}$. La longitud de esta proyección es la distancia buscada.

TEOREMA 11.13 DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO

La distancia de un punto a un plano Q (no en el plano) es

$$D = \|\text{proy}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{PQ}\| = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}$$

donde P es un punto en el plano y $\mathbf{n}$ es normal al plano.

Para encontrar un punto en el plano dado por $ax + by + cz + d = 0$ $(a \neq 0)$, se hace $y = 0$ y $z = 0$. Entonces, de la ecuación $ax + d = 0$, se puede concluir que el punto $(-d/a, 0, 0)$ está en el plano.

EJEMPLO 5 Calcular la distancia de un punto a un plano

Calcular la distancia del punto $Q(1, 5, -4)$ al plano dado por

$$3x - y + 2z = 6.$$

Solución Se sabe que $\mathbf{n} = \langle 3, -1, 2\rangle$ es normal al plano dado. Para hallar un punto en el plano, se hace $y = 0$ y $z = 0$, y se obtiene el punto $P(2, 0, 0)$. El vector que va de P a Q está dado por

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \langle 1 - 2, 5 - 0, -4 - 0\rangle \\ &= \langle -1, 5, -4\rangle.\end{aligned}$$

Usando la fórmula para la distancia dada en el teorema 11.13 se tiene

$$\begin{aligned}D = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|} &= \frac{|\langle -1, 5, -4\rangle \cdot \langle 3, -1, 2\rangle|}{\sqrt{9 + 1 + 4}} \\ &= \frac{|-3 - 5 - 8|}{\sqrt{14}} \\ &= \frac{16}{\sqrt{14}}.\end{aligned}$$

Distancia de un punto a un plano.

NOTA El punto P que se eligió en el ejemplo 5 es arbitrario. Seleccionar un punto diferente en el plano para verificar que se obtiene la misma distancia. ■

Del teorema 11.13 se puede determinar que la distancia del punto $Q(x_0, y_0, z_0)$ al plano dado por $ax + by + cz + d = 0$ es

$$D = \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

o

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$ Distancia de un punto a un plano.

donde $P(x_1, y_1, z_1)$ es un punto en el plano y $d = -(ax_1 + by_1 + cz_1)$.

EJEMPLO 6 Encontrar la distancia entre dos planos paralelos

Encontrar la distancia entre los dos planos paralelos dados por

$$3x - y + 2z - 6 = 0 \quad \text{y} \quad 6x - 2y + 4z + 4 = 0.$$

Solución Los dos planos se muestran en la figura 11.53. Para hallar la distancia entre los planos, elegir un punto en el primer plano, digamos $(x_0, y_0, z_0) = (2, 0, 0)$. Después, del segundo plano, se puede determinar que $a = 6$, $b = -2$, $c = 4$ y $d = 4$, y concluir que la distancia es

$$\begin{aligned} D &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|6(2) + (-2)(0) + (4)(0) + 4|}{\sqrt{6^2 + (-2)^2 + 4^2}} \\ &= \frac{16}{\sqrt{56}} = \frac{8}{\sqrt{14}} \approx 2.14. \end{aligned}$$ Distancia de un punto a un plano.

La distancia entre los planos paralelos es aproximadamente 2.14
Figura 11.53

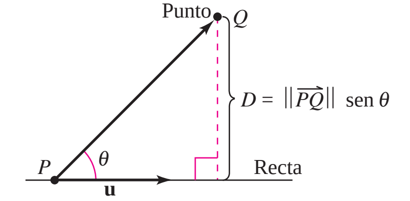
La fórmula para la distancia de un punto a una recta en el espacio se parece a la de la distancia de un punto a un plano, excepto que se reemplaza el producto vectorial por la magnitud del producto vectorial y el vector normal **n** por un vector de dirección para la recta.

TEOREMA 11.14 DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA EN EL ESPACIO

La distancia de un punto Q a una recta en el espacio está dada por

$$D = \frac{\|\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|}$$

donde $\mathbf{u}$ es un vector de dirección para la recta y P es un punto sobre la recta.



Distancia de un punto a una recta
Figura 11.54

DEMOSTRACIÓN En la figura 11.54, sea D la distancia del punto Q a la recta dada. Entonces $D = \|\overrightarrow{PQ}\| \operatorname{sen} \theta$, donde θ es el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\overrightarrow{PQ}$. Por el teorema 11.8, se tiene

$$\|\mathbf{u}\| \|\overrightarrow{PQ}\| \operatorname{sen} \theta = \|\mathbf{u} \times \overrightarrow{PQ}\| = \|\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{u}\|.$$

Por consiguiente,

$$D = \|\overrightarrow{PQ}\| \operatorname{sen} \theta = \frac{\|\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|}.$$

EJEMPLO 7 Hallar la distancia de un punto a una recta

Hallar la distancia del punto $Q(3, -1, 4)$ a la recta dada por

$$x = -2 + 3t, \quad y = -2t \quad \text{y} \quad z = 1 + 4t.$$

Solución Usando los números de dirección 3, -2 y 4, se sabe que un vector de dirección de la recta es

$$\mathbf{u} = \langle 3, -2, 4 \rangle. \qquad \text{Vector de dirección de la recta.}$$

Para determinar un punto en la recta, se hace $t = 0$ y se obtiene

$$P = (-2, 0, 1). \qquad \text{Punto sobre la recta.}$$

Así,

$$\overrightarrow{PQ} = \langle 3 - (-2), -1 - 0, 4 - 1 \rangle = \langle 5, -1, 3 \rangle$$

y se puede formar el producto vectorial

$$\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - 11\mathbf{j} - 7\mathbf{k} = \langle 2, -11, -7 \rangle.$$

Por último, usando el teorema 11.14, se encuentra que la distancia es

$$D = \frac{\|\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{\sqrt{174}}{\sqrt{29}} = \sqrt{6} \approx 2.45. \qquad \text{Ver figura 11.55.}$$

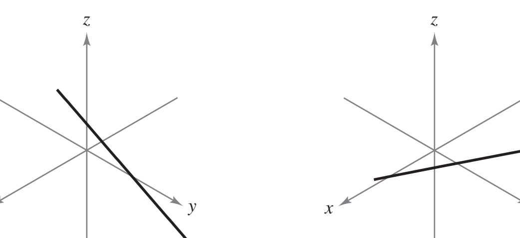
La distancia del punto Q a la recta es $\sqrt{6} \approx 2.45$
Figura 11.55

11-5 Ejercicios

En los ejercicios 1 y 2, la figura muestra la gráfica de una recta dada por las ecuaciones paramétricas. *a*) Dibujar una flecha sobre la recta para indicar su dirección. *b*) Hallar las coordenadas de dos puntos, *P* y *Q*, en la recta. Determinar el vector $\overrightarrow{PQ}$. ¿Cuál es la relación entre las componentes del vector y los coeficientes de *t* en las ecuaciones paramétricas? ¿Cuál es la razón de esta relación? *c*) Determinar las coordenadas de todos los puntos de intersección con los planos coordenados. Si la recta no corta a uno de los planos coordenados, explicar por qué.

1. $x = 1 + 3t$
$y = 2 - t$
$z = 2 + 5t$

2. $x = 2 - 3t$
$y = 2$
$z = 1 - t$



En los ejercicios 3 y 4, determinar si cada punto yace sobre la recta.

3. $x = -2 + t, y = 3t, z = 4 + t$

a) $(0, 6, 6)$ *b*) $(2, 3, 5)$

4. $\dfrac{x - 3}{2} = \dfrac{y - 7}{8} = z + 2$

a) $(7, 23, 0)$ *b*) $(1, -1, -3)$

En los ejercicios 5 a 10, hallar conjuntos de *a*) ecuaciones paramétricas y *b*) ecuaciones simétricas de la recta por el punto paralela al vector o recta dado (si es posible). (Para cada recta, escribir los números de dirección como enteros.)

	Punto	*Paralela a*
5.	$(0, 0, 0)$	$\mathbf{v} = \langle 3, 1, 5 \rangle$
6.	$(0, 0, 0)$	$\mathbf{v} = \left\langle -2, \frac{5}{2}, 1 \right\rangle$
7.	$(-2, 0, 3)$	$\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
8.	$(-3, 0, 2)$	$\mathbf{v} = 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
9.	$(1, 0, 1)$	$x = 3 + 3t, y = 5 - 2t, z = -7 + t$
10.	$(-3, 5, 4)$	$\dfrac{x - 1}{3} = \dfrac{y + 1}{-2} = z - 3$

En los ejercicios 11 a 14, hallar conjuntos de *a*) ecuaciones paramétricas y *b*) ecuaciones simétricas de la recta que pasa por los dos puntos (si es posible). (Para cada recta, escribir los números de dirección como enteros.)

11. $(5, -3, -2), \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$ **12.** $(0, 4, 3), (-1, 2, 5)$

13. $(7, -2, 6), (-3, 0, 6)$ **14.** $(0, 0, 25), (10, 10, 0)$

En los ejercicios 15 a 22, hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta.

15. La recta pasa por el punto (2, 3, 4) y es paralela al plano xz y al plano yz.

16. La recta pasa por el punto $(-4, 5, 2)$ y es paralela al plano xy y al plano yz.

17. La recta pasa por el punto (2, 3, 4) y es perpendicular al plano dado por $3x + 2y - z = 6$.

18. La recta pasa por el punto $(-4, 5, 2)$ y es perpendicular al plano dado por $-x + 2y + z = 5$.

19. La recta pasa por el punto $(5, -3, -4)$ y es paralela a $\mathbf{v} = \langle 2, -1, 3 \rangle$.

20. La recta pasa por el punto $(-1, 4, -3)$ y es paralela a $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

21. La recta pasa por el punto (2, 1, 2) y es paralela a la recta $x = -t, y = 1 + t, z = -2 + t$.

22. La recta pasa por el punto $(-6, 0, 8)$ y es paralela a la recta $x = 5 - 2t, y = -4 + 2t, z = 0$.

En los ejercicios 23 a 26, hallar las coordenadas de un punto *P* sobre la recta y un vector v paralelo a la recta.

23. $x = 3 - t, \quad y = -1 + 2t, \quad z = -2$

24. $x = 4t, \quad y = 5 - t, \quad z = 4 + 3t$

25. $\frac{x-7}{4} = \frac{y+6}{2} = z + 2$ **26.** $\frac{x+3}{5} = \frac{y}{8} = \frac{z-3}{6}$

En los ejercicios 27 a 30, determinar si algunas de las rectas son paralelas o idénticas.

27. L_1: $x = 6 - 3t, \quad y = -2 + 2t, \quad z = 5 + 4t$

L_2: $x = 6t, \quad y = 2 - 4t, \quad z = 13 - 8t$

L_3: $x = 10 - 6t, \quad y = 3 + 4t, \quad z = 7 + 8t$

L_4: $x = -4 + 6t, \quad y = 3 + 4t, \quad z = 5 - 6t$

28. L_1: $x = 3 + 2t, \quad y = -6t, \quad z = 1 - 2t$

L_2: $x = 1 + 2t, \quad y = -1 - t, \quad z = 3t$

L_3: $x = -1 + 2t, \quad y = 3 - 10t, \quad z = 1 - 4t$

L_4: $x = 5 + 2t, \quad y = 1 - t, \quad z = 8 + 3t$

29. L_1: $\frac{x-8}{4} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z+9}{3}$

L_2: $\frac{x+7}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+6}{5}$

L_3: $\frac{x+4}{-8} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+18}{-6}$

L_4: $\frac{x-2}{-2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{1.5}$

30. L_1: $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{2}$

L_2: $\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{4}$

L_3: $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{0.5} = \frac{z-3}{1}$

L_4: $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{-1}$

En los ejercicios 31 a 34, determinar si las rectas se cortan, y si es así, hallar el punto de intersección y el coseno del ángulo de intersección.

31. $x = 4t + 2, \quad y = 3, \quad z = -t + 1$

$x = 2s + 2, \quad y = 2s + 3, \quad z = s + 1$

32. $x = -3t + 1, y = 4t + 1, z = 2t + 4$

$x = 3s + 1, y = 2s + 4, z = -s + 1$

33. $\frac{x}{3} = \frac{y-2}{-1} = z + 1, \quad \frac{x-1}{4} = y + 2 = \frac{z+3}{-3}$

34. $\frac{x-2}{-3} = \frac{y-2}{6} = z - 3, \quad \frac{x-3}{2} = y + 5 = \frac{z+2}{4}$

CAS **En los ejercicios 35 y 36, usar un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente el par de rectas que se cortan y hallar el punto de intersección.**

35. $x = 2t + 3, y = 5t - 2, z = -t + 1$

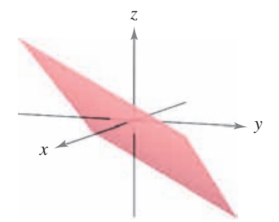
$x = -2s + 7, y = s + 8, z = 2s - 1$

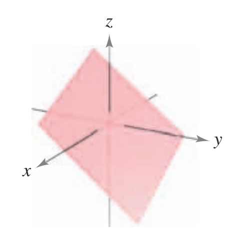
36. $x = 2t - 1, y = -4t + 10, z = t$

$x = -5s - 12, y = 3s + 11, z = -2s - 4$

Producto vectorial **En los ejercicios 37 y 38, *a*) hallar las coordenadas de tres puntos *P*, *Q* y *R* en el plano, y determinar los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$. *b*) Hallar $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$. ¿Cuál es la relación entre las componentes del producto vectorial y los coeficientes de la ecuación del plano? ¿Cuál es la razón?**

37. $4x - 3y - 6z = 6$ **38.** $2x + 3y + 4z = 4$





En los ejercicios 39 y 40, determinar si el plano pasa por cada punto.

39. $x + 2y - 4z - 1 = 0$

a) $(-7, 2, -1)$ *b*) $(5, 2, 2)$

40. $2x + y + 3z - 6 = 0$

a) $(3, 6, -2)$ *b*) $(-1, 5, -1)$

En los ejercicios 41 a 46, hallar una ecuación del plano que pasa por el punto y es perpendicular al vector o recta dado.

	Punto	*Perpendicular a*
41.	$(1, 3, -7)$	$\mathbf{n} = \mathbf{j}$
42.	$(0, -1, 4)$	$\mathbf{n} = \mathbf{k}$
43.	$(3, 2, 2)$	$\mathbf{n} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$
44.	$(0, 0, 0)$	$\mathbf{n} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$
45.	$(-1, 4, 0)$	$x = -1 + 2t,\ y = 5 - t,\ z = 3 - 2t$
46.	$(3, 2, 2)$	$\frac{x-1}{4} = y + 2 = \frac{z+3}{-3}$

En los ejercicios 47 a 58, hallar una ecuación del plano.

47. El plano que pasa por $(0, 0, 0)$, $(2, 0, 3)$ y $(-3, -1, 5)$.

48. El plano que pasa por $(3, -1, 2)$, $(2, 1, 5)$ y $(1, -2, -2)$.

49. El plano que pasa por $(1, 2, 3)$, $(3, 2, 1)$ y $(-1, -2, 2)$.

50. El plano que pasa por el punto $(1, 2, 3)$ y es paralelo al plano yz.

51. El plano que pasa por el punto $(1, 2, 3)$ y es paralelo al plano xy.

52. El plano contiene el eje y y forma un ángulo de $\pi/6$ con el eje x positivo.

53. El plano contiene las rectas dadas por

$$\frac{x-1}{-2} = y - 4 = z \quad \text{y} \quad \frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{-1}.$$

54. El plano pasa por el punto $(2, 2, 1)$ y contiene la recta dada por

$$\frac{x}{2} = \frac{y-4}{-1} = z.$$

55. El plano pasa por los puntos $(2, 2, 1)$ y $(-1, 1, -1)$ y es perpendicular al plano $2x - 3y + z = 3$.

56. El plano pasa por los puntos $(3, 2, 1)$ y $(3, 1, -5)$ y es perpendicular al plano $6x + 7y + 2z = 10$.

57. El plano pasa por los puntos $(1, -2, -1)$ y $(2, 5, 6)$ y es paralelo al eje x.

58. El plano pasa por los puntos $(4, 2, 1)$ y $(-3, 5, 7)$ y es paralelo al eje z.

En los ejercicios 59 y 60, representar gráficamente la recta y hallar los puntos de intersección (si los hay) de la recta con los planos *xy*, *xz* y *yz*.

59. $x = 1 - 2t,\quad y = -2 + 3t,\quad z = -4 + t$

60. $\frac{x-2}{3} = y + 1 = \frac{z-3}{2}$

En los ejercicios 61 a 64, hallar una ecuación del plano que contiene todos los puntos equidistantes de los puntos dados

61. $(2, 2, 0),\quad (0, 2, 2)$

62. $(1, 0, 2),\quad (2, 0, 1)$

63. $(-3, 1, 2),\quad (6, -2, 4)$

64. $(-5, 1, -3),\quad (2, -1, 6)$

En los ejercicios 65 a 70, determinar si los planos son paralelos, ortogonales, o ninguna de las dos cosas. Si no son ni paralelos ni ortogonales, hallar el ángulo de intersección.

65. $5x - 3y + z = 4$
$x + 4y + 7z = 1$

66. $3x + y - 4z = 3$
$-9x - 3y + 12z = 4$

67. $x - 3y + 6z = 4$
$5x + y - z = 4$

68. $3x + 2y - z = 7$
$x - 4y + 2z = 0$

69. $x - 5y - z = 1$
$5x - 25y - 5z = -3$

70. $2x - z = 1$
$4x + y + 8z = 10$

En los ejercicios 71 a 78, marcar toda intersección y dibujar la gráfica del plano.

71. $4x + 2y + 6z = 12$

72. $3x + 6y + 2z = 6$

73. $2x - y + 3z = 4$

74. $2x - y + z = 4$

75. $x + z = 6$

76. $2x + y = 8$

77. $x = 5$

78. $z = 8$

CAS **En los ejercicios 79 a 82, usar un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente el plano.**

79. $2x + y - z = 6$

80. $x - 3z = 3$

81. $-5x + 4y - 6z = -8$

82. $2.1x - 4.7y - z = -3$

En los ejercicios 83 a 86, determinar si algunos de los planos son paralelos o idénticos.

83. P_1: $15x - 6y + 24z = 17$
P_2: $-5x + 2y - 8z = 6$
P_3: $6x - 4y + 4z = 9$
P_4: $3x - 2y - 2z = 4$

84. P_1: $2x - y + 3z = 8$
P_2: $3x - 5y - 2z = 6$
P_3: $8x - 4y + 12z = 5$
P_4: $-4x - 2y + 6z = 11$

85. P_1: $3x - 2y + 5z = 10$
P_2: $-6x + 4y - 10z = 5$
P_3: $-3x + 2y + 5z = 8$
P_4: $75x - 50y + 125z = 250$

86. P_1: $-60x + 90y + 30z = 27$
P_2: $6x - 9y - 3z = 2$
P_3: $-20x + 30y + 10z = 9$
P_4: $12x - 18y + 6z = 5$

En los ejercicios 87 a 90, describir a la familia de planos representada por la ecuación, donde *c* es cualquier número real.

87. $x + y + z = c$

88. $x + y = c$

89. $cy + z = 0$

90. $x + cz = 0$

En los ejercicios 91 y 92, *a*) encontrar el ángulo entre los dos planos y *b*) hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta de intersección de los planos.

91. $3x + 2y - z = 7$
$x - 4y + 2z = 0$

92. $6x - 3y + z = 5$
$-x + y + 5z = 5$

En los ejercicios 93 a 96, hallar el o los puntos de intersección (si los hay) del plano y la recta. Investigar además si la recta se halla en el plano.

93. $2x - 2y + z = 12, \quad x - \frac{1}{2} = \frac{y + (3/2)}{-1} = \frac{z + 1}{2}$

94. $2x + 3y = -5, \quad \frac{x - 1}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z - 3}{6}$

95. $2x + 3y = 10, \quad \frac{x - 1}{3} = \frac{y + 1}{-2} = z - 3$

96. $5x + 3y = 17, \quad \frac{x - 4}{2} = \frac{y + 1}{-3} = \frac{z + 2}{5}$

En los ejercicios 97 a 100, hallar la distancia del punto al plano.

97. $(0, 0, 0)$
$2x + 3y + z = 12$

98. $(0, 0, 0)$
$5x + y - z = 9$

99. $(2, 8, 4)$
$2x + y + z = 5$

100. $(1, 3, -1)$
$3x - 4y + 5z = 6$

En los ejercicios 101 a 104, verificar que los dos planos son paralelos, y hallar la distancia entre ellos.

101. $x - 3y + 4z = 10$
$x - 3y + 4z = 6$

102. $4x - 4y + 9z = 7$
$4x - 4y + 9z = 18$

103. $-3x + 6y + 7z = 1$
$6x - 12y - 14z = 25$

104. $2x - 4z = 4$
$2x - 4z = 10$

En los ejercicios 105 a 108, hallar la distancia del punto a la recta dada por medio del conjunto de ecuaciones paramétricas.

105. $(1, 5, -2); \quad x = 4t - 2, \quad y = 3, \quad z = -t + 1$

106. $(1, -2, 4); \quad x = 2t, \quad y = t - 3, \quad z = 2t + 2$

107. $(-2, 1, 3); \quad x = 1 - t, \quad y = 2 + t, \quad z = -2t$

108. $(4, -1, 5); \quad x = 3, \quad y = 1 + 3t, \quad z = 1 + t$

En los ejercicios 109 y 110, verificar que las rectas son paralelas y hallar la distancia entre ellas.

109. L_1: $x = 2 - t, \quad y = 3 + 2t, \quad z = 4 + t$
L_2: $x = 3t, \quad y = 1 - 6t, \quad z = 4 - 3t$

110. L_1: $x = 3 + 6t, \quad y = -2 + 9t, \quad z = 1 - 12t$
L_2: $x = -1 + 4t, \quad y = 3 + 6t, \quad z = -8t$

Desarrollo de conceptos

111. Dar las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones simétricas de una recta en el espacio. Describir qué se requiere para hallar estas ecuaciones.

112. Dar la ecuación estándar de un plano en el espacio. Describir qué se requiere para hallar esta ecuación.

113. Describir un método de hallar la recta de intersección entre dos planos.

114. Describir toda superficie dada por las ecuaciones $x = a$, $y = b$ y $z = c$.

Desarrollo de conceptos (*continuación*)

115. Describir un método para determinar cuándo dos planos

$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ y $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

son *a*) paralelos y *b*) perpendiculares. Explicar el razonamiento.

116. Sean L_1 y L_2 rectas no paralelas que no se cortan. ¿Es posible hallar un vector **v** distinto de cero tal que **v** sea perpendicular a ambos L_1 y L_2? Explicar el razonamiento.

117. Hallar una ecuación del plano con intersección en x $(a, 0, 0)$, intersección en y $(0, b, 0)$ e intersección en z $(0, 0, c)$. (Suponer que a, b y c son distintos de cero.)

Para discusión

118. Encontrar la correspondencia entre la ecuación o conjunto de ecuaciones que cumple con la descripción indicada.

a) Conjunto de ecuaciones paramétricas de una recta

b) Conjunto de ecuaciones simétricas de una recta

c) Ecuación estándar de un plano en el espacio

d) Forma general de la ecuación de un plano en el espacio

i) $(x - 6)/2 = (y + 1)/-3 = z/1$

ii) $2x - 7y + 5z + 10 = 0$

iii) $x = 4 + 7t, y = 3 + t, z = 3 - 3t$

iv) $2(x - 1) + (y + 3) - 4(z - 5) = 0$

119. Describir y hallar una ecuación para la superficie generada por todos los puntos (x, y, z) que están a cuatro unidades del punto $(3, -2, 5)$.

120. Describir y hallar una ecuación para la superficie generada por todos los puntos (x, y, z) que están a cuatro unidades del plano $4x - 3y + z = 10$.

121. ***Modelado matemático*** Los consumos per cápita (en galones) de diferentes tipos de leche en Estados Unidos desde 1999 hasta 2005 se muestran en la tabla. El consumo de leche descremada y semidescremada, leche reducida en grasas y la leche entera se representa por las variables x, y y z, respectivamente. (*Fuente: U.S. Department of Agriculture*)

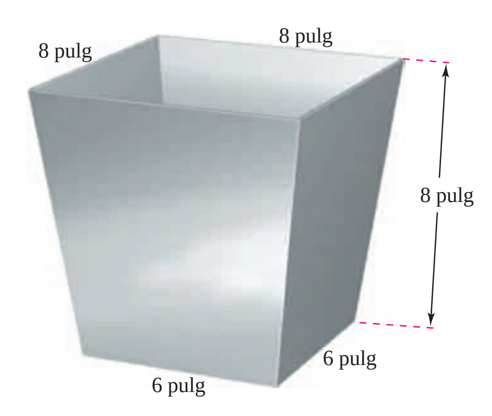
Año	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
x	1.4	1.4	1.4	1.6	1.6	1.7	1.7
y	7.3	7.1	7.0	7.0	6.9	6.9	6.9
z	6.2	6.1	5.9	5.8	5.6	5.5	5.6

Un modelo para los datos está dado por
$0.92x - 1.03y + z = 0.02$.

a) Hacer un cuarto renglón de la tabla usando el modelo para aproximar z con los valores dados de x y y. Comparar las aproximaciones con los valores reales de z.

b) Según este modelo, cualquier incremento en el consumo de dos tipos de leche tendrá ¿qué efecto en el consumo del tercer tipo?

122. ***Diseño industrial*** Un colector en la parte superior de un montacargas de grano canaliza el grano a un contenedor. Hallar el ángulo entre dos lados adyacentes.



123. ***Distancia*** Dos insectos se arrastran a lo largo de rectas diferentes en el espacio. En el instante t (en minutos), el primer insecto está en el punto (x, y, z) sobre la recta $x = 6 + t$, $y = 8 - t$, $z = 3 + t$. También, en el instante t, el segundo insecto está en el punto (x, y, z) sobre la recta $x = 1 + t$, $y = 2 + t$, $z = 2t$.

Suponer que las distancias se dan en pulgadas.

a) Hallar la distancia entre los dos insectos en el instante $t = 0$.



b) Usar una herramienta de graficación para representar la distancia entre los insectos desde $t = 0$ hasta $t = 10$.

c) Usando la gráfica del inciso *b*), ¿qué se puede concluir acerca de la distancia entre los insectos?

d) ¿Qué tanto se acercan los insectos?

124. Hallar la ecuación estándar de la esfera con el centro en $(-3, 2, 4)$ que es tangente al plano dado por $2x + 4y - 3z = 8$.

125. Hallar el punto de intersección del plano $3x - y + 4z = 7$ con la recta que pasa por $(5, 4, -3)$ y que es perpendicular a este plano.

126. Mostrar que el plano $2x - y - 3z = 4$ es paralelo a la recta $x = -2 + 2t$, $y = -1 + 4t$, $z = 4$, y hallar la distancia entre ambos.

127. Hallar el punto de intersección de la recta que pasa por $(1, -3, 1)$ y $(3, -4, 2)$, y el plano dado por $x - y + z = 2$.

128. Hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $(1, 0, 2)$ y es paralela al plano dado por $x + y + z = 5$, y perpendicular a la recta $x = t$, $y = 1 + t$, $z = 1 + t$.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 129 a 134, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que pruebe que es falsa.**

129. Si $\mathbf{v} = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k}$ es cualquier vector en el plano dado por $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, entonces $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

130. Todo par de rectas en el espacio o se cortan o son paralelas.

131. Dos planos en el espacio o se cortan o son paralelos.

132. Si dos rectas L_1 y L_2 son paralelas a un plano P, entonces L_1 y L_2 son paralelas.

133. Dos planos perpendiculares a un tercer plano en el espacio son paralelos.

134. Un plano y una recta en el espacio se intersecan o son paralelos.

PROYECTO DE TRABAJO

Distancias en el espacio

En esta sección se han visto dos fórmulas para distancia, la distancia de un punto a un plano, y la distancia de un punto a una recta. En este proyecto se estudiará un tercer problema de distancias, la distancia de dos rectas que se cruzan. Dos rectas en el espacio *son oblicuas* si no son paralelas ni se cortan (ver la figura).

a) Considerar las siguientes dos rectas en el espacio.

L_1: $x = 4 + 5t$, $y = 5 + 5t$, $z = 1 - 4t$

L_2: $x = 4 + s$, $y = -6 + 8s$, $z = 7 - 3s$

i) Mostrar que estas rectas no son paralelas.

ii) Mostrar que estas rectas no se cortan, y por consiguiente las rectas se cruzan.

iii) Mostrar que las dos rectas están en planos paralelos.

iv) Hallar la distancia entre los planos paralelos del inciso *iii*). Ésta es la distancia entre las rectas que se cruzan originales.

b) Usar el procedimiento del inciso *a*) para encontrar la distancia entre las rectas.

L_1: $x = 2t$, $y = 4t$, $z = 6t$

L_2: $x = 1 - s$, $y = 4 + s$, $z = -1 + s$

c) Usar el procedimiento del inciso *a*) para encontrar la distancia entre las rectas.

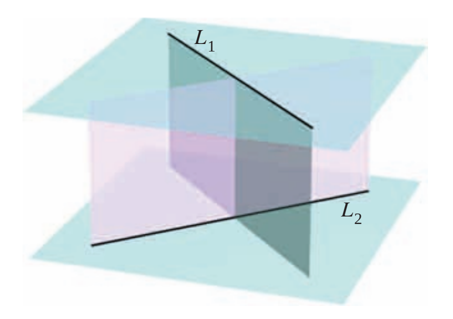
L_1: $x = 3t$, $y = 2 - t$, $z = -1 + t$

L_2: $x = 1 + 4s$, $y = -2 + s$, $z = -3 - 3s$

d) Desarrollar una fórmula para encontrar la distancia de las rectas oblicuas.

L_1: $x = x_1 + a_1t$, $y = y_1 + b_1t$, $z = z_1 + c_1t$

L_2: $x = x_2 + a_2s$, $y = y_2 + b_2s$, $z = z_2 + c_2s$



11.6 Superficies en el espacio

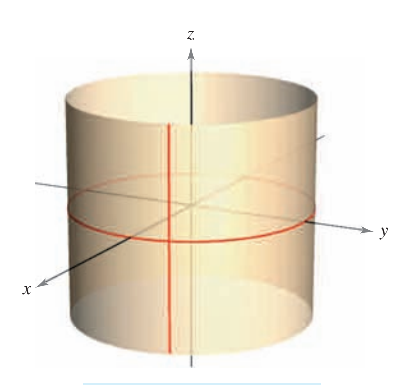
- **Reconocer y dar las ecuaciones de superficies cilíndricas.**
- **Reconocer y dar las ecuaciones de superficies cuádricas.**
- **Reconocer y dar las ecuaciones de superficies de revolución.**

Superficies cilíndricas

Las primeras cinco secciones de este capítulo contienen la parte vectorial de los conocimientos preliminares necesarios para el estudio del cálculo vectorial y del cálculo en el espacio. En ésta y en la próxima sección, se estudian superficies en el espacio y sistemas alternativos de coordenadas para el espacio. Ya se han estudiado dos tipos especiales de superficies.

1. Esferas: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$ Sección 11.2.
2. Planos: $ax + by + cz + d = 0$ Sección 11.5.

Un tercer tipo de superficie en el espacio son las llamadas **superficies cilíndricas**, o simplemente **cilindros**. Para definir un cilindro, considerar el familiar cilindro circular recto mostrado en la figura 11.56. Se puede imaginar que este cilindro es generado por una recta vertical que se mueve alrededor del círculo $x^2 + y^2 = a^2$ que se encuentra en el plano xy. A este círculo se le llama **curva directriz** (o **curva generadora**).



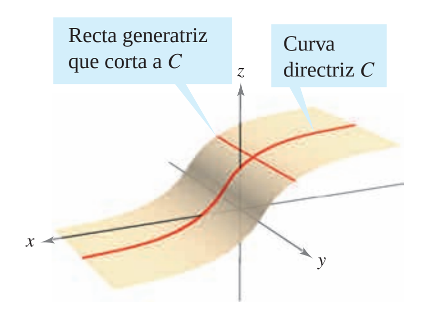
Cilindro circular recto:
$x^2 + y^2 = a^2$

Las rectas generatrices son paralelas al eje z
Figura 11.56

DEFINICIÓN DE UN CILINDRO

Sea C una curva en un plano y sea L una recta no paralela a ese plano. Al conjunto de todas las rectas paralelas a L que cortan a C se le llama un **cilindro**. A C se le llama la **curva generadora** (o la **directriz**) del cilindro y a las rectas paralelas se les llama **rectas generatrices**.

NOTA Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que C se encuentra en uno de los tres planos coordenados. En este texto se restringe la discusión a cilindros *rectos*, es decir, a cilindros cuyas (rectas) generatrices son perpendiculares al plano coordenado que contiene a C, como se muestra en la figura 11.57. ■



Cilindro: las rectas generatrices cortan a C y son paralelas a la recta dada
Figura 11.57

La ecuación de la (curva) directriz del cilindro circular recto mostrado en la figura 11.56 es

$$x^2 + y^2 = a^2.$$ Ecuación de la curva directriz en el plano xy.

Para encontrar una ecuación del cilindro, hay que observar que se puede generar cualquiera de las (rectas) generatrices fijando los valores de x y y y dejando que z tome todos los valores reales. En este caso, el valor de z es arbitrario y, por consiguiente, no está incluido en la ecuación. En otras palabras, la ecuación de este cilindro simplemente es la ecuación de su curva generadora o directriz.

$$x^2 + y^2 = a^2$$ Ecuación de un cilindro en el espacio.

ECUACIÓN DE UN CILINDRO

La ecuación de un cilindro cuyas rectas generatrices son paralelas a uno de los ejes coordenados contiene sólo las variables correspondientes a los otros dos ejes.

EJEMPLO 1 Trazado de cilindros

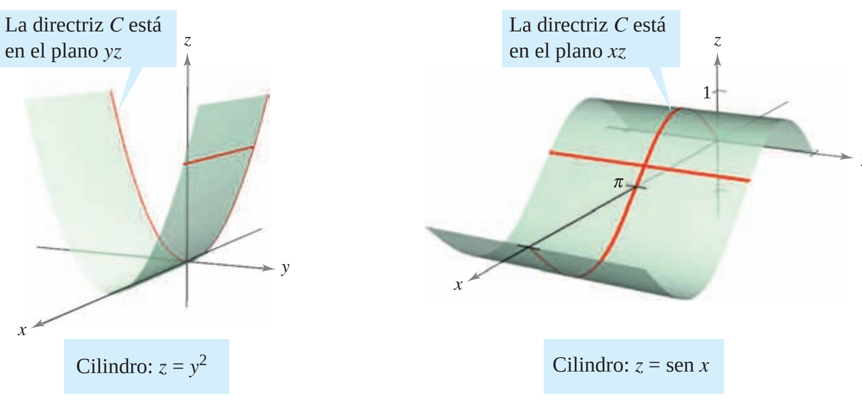
Trazar la superficie representada por cada una de las ecuaciones.

a) $z = y^2$ ***b)*** $z = \text{sen } x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

Solución

a) La gráfica es un cilindro cuya directriz, $z = y^2$, es una parábola en el plano yz. Las generatrices del cilindro son paralelas al eje x, como se muestra en la figura 11.58*a*.

b) La gráfica es un cilindro generado por la curva del seno en el plano xz. Las generatrices son paralelas al eje y, como se muestra en la figura 11.58*b*.



a) Las generatrices son paralelas al eje x ***b)*** Las generatrices son paralelas al eje y

Figura 11.58

Superficies cuádricas

AYUDA DE ESTUDIO En la tabla de las páginas 814 y 815 se muestra sólo una de las varias orientaciones posibles de cada superficie cuádrica. Si la superficie está orientada a lo largo de un eje diferente, su ecuación estándar cambiará consecuentemente, como se ilustra en los ejemplos 2 y 3. El hecho de que los dos tipos de paraboloides tengan una variable elevada a la primera potencia puede ser útil al clasificar las superficies cuádricas. Los otros cuatro tipos de superficies cuádricas básicas tienen ecuaciones que son de *segundo grado* en las tres variables.

El cuarto tipo básico de superficies en el espacio son las **superficies cuádricas**. Éstas son los análogos tridimensionales de las secciones cónicas.

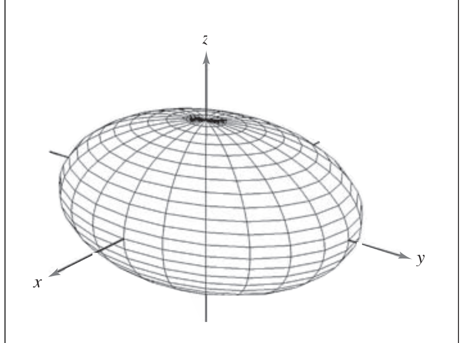
SUPERFICIES CUÁDRICAS

La ecuación de una **superficie cuádrica** en el espacio es una ecuación de segundo grado en tres variables. La **forma general** de la ecuación es

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0.$$

Hay seis tipos básicos de superficies cuádricas: **elipsoide**, **hiperboloide de una hoja**, **hiperboloide de dos hojas**, **cono elíptico**, **paraboloide elíptico** y **paraboloide hiperbólico**.

A la intersección de una superficie con un plano se le llama la **traza de la superficie** en el plano. Para visualizar una superficie en el espacio, es útil determinar sus trazas en algunos planos elegidos inteligentemente. Las trazas de las superficies cuádricas son cónicas. Estas trazas, junto con la **forma canónica o estándar** de la ecuación de cada superficie cuádrica, se muestran en la tabla de las páginas 814 y 815.

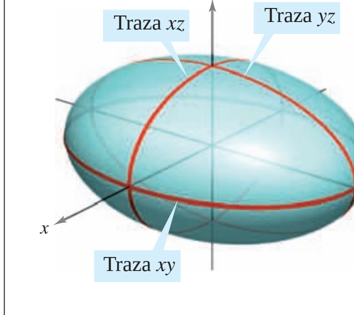


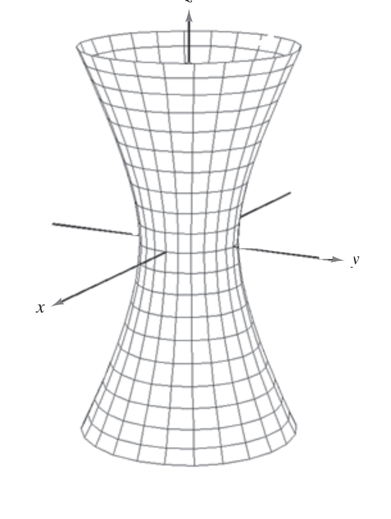
Elipsoide

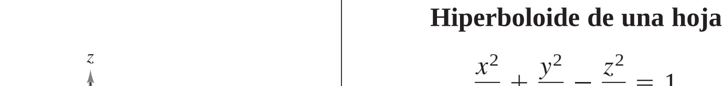
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Traza	*Plano*
Elipse	Paralelo al plano xy
Elipse	Paralelo al plano xz
Elipse	Paralelo al plano yz

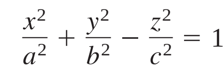
La superficie es una esfera si $a = b = c \neq 0$.







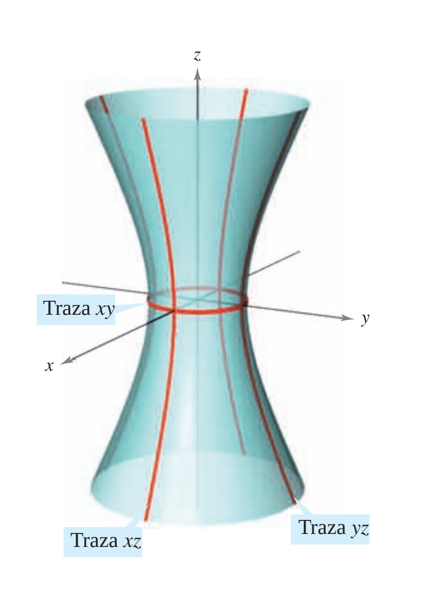
Hiperboloide de una hoja

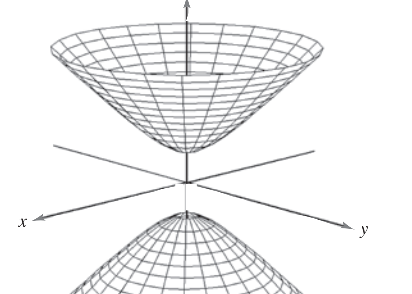


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

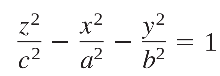
Traza	*Plano*
Elipse	Paralelo al plano xy
Hipérbola	Paralelo al plano xz
Hipérbola	Paralelo al plano yz

El eje del hiperboloide corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo.





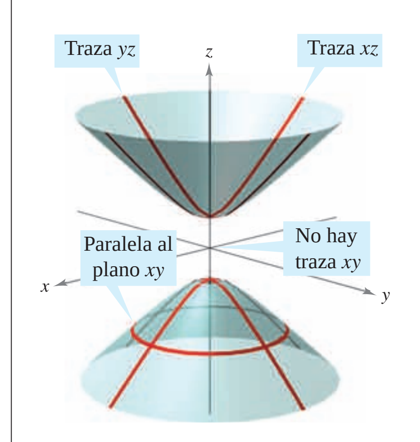
Hiperboloide de dos hojas

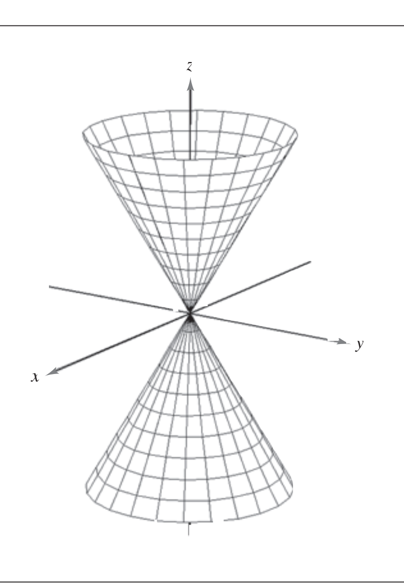


$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Traza	*Plano*
Elipse	Paralelo al plano xy
Hipérbola	Paralelo al plano xz
Hipérbola	Paralelo al plano yz

El eje del hiperboloide corresponde a la variable cuyo coeficiente es positivo. No hay traza en el plano coordenado perpendicular a este eje.



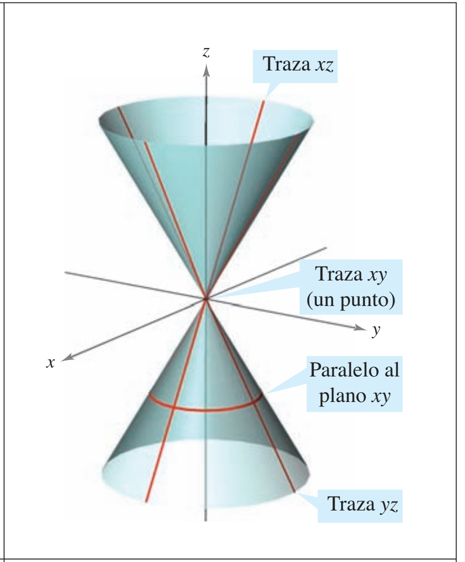


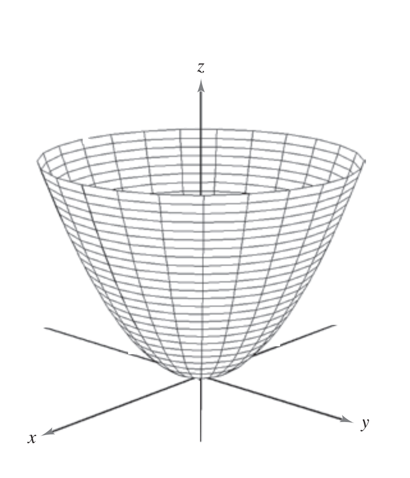
Cono elíptico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Traza	*Plano*
Elipse	Paralelo al plano xy
Hipérbola	Paralelo al plano xz
Hipérbola	Paralelo al plano yz

El eje del cono corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo. Las trazas en los planos coordenados paralelos a este eje son rectas que se cortan.



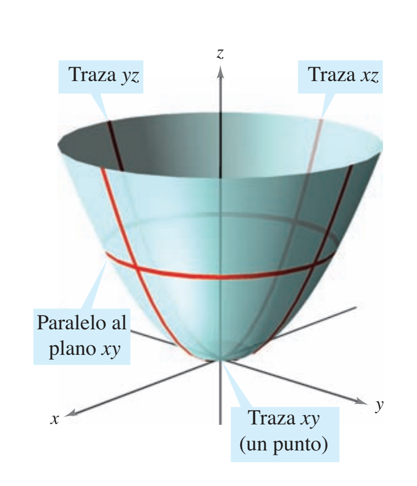


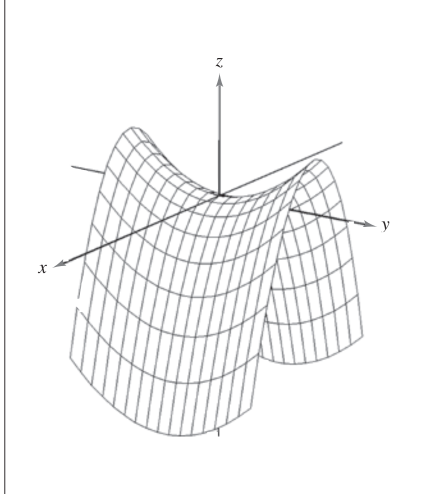
Paraboloide elíptico

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Traza	*Plano*
Elipse	Paralelo al plano xy
Parábola	Paralelo al plano xz
Parábola	Paralelo al plano yz

El eje del paraboloide corresponde a la variable elevada a la primera potencia.



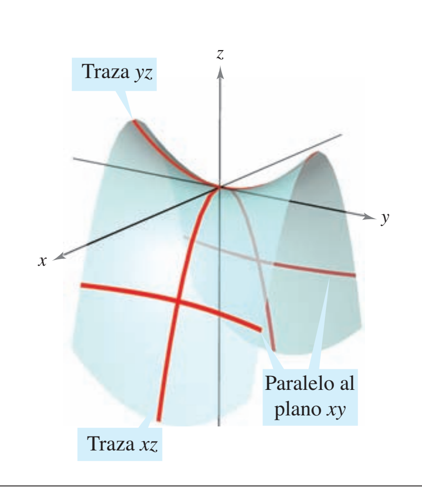


Paraboloide hiperbólica

$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$$

Traza	*Plano*
Hipérbola	Paralelo al plano xy
Parábola	Paralelo al plano xz
Parábola	Paralelo al plano yz

El eje del paraboloide corresponde a la variable elevada a la primera potencia.



Para clasificar una superficie cuádrica, se empieza por escribir la superficie en la forma canónica o estándar. Después, se determinan varias trazas en los planos coordenados *o* en planos paralelos a los planos coordenados.

EJEMPLO 2 Trazado de una superficie cuádrica

Clasificar y dibujar la superficie dada por $4x^2 - 3y^2 + 12z^2 + 12 = 0$.

Solución Se empieza por escribir la ecuación en forma canónica o estándar.

$$4x^2 - 3y^2 + 12z^2 + 12 = 0 \qquad \text{Escribir la ecuación original.}$$

$$\frac{x^2}{-3} + \frac{y^2}{4} - z^2 - 1 = 0 \qquad \text{Dividir entre } -12.$$

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{3} - \frac{z^2}{1} = 1 \qquad \text{Forma canónica o estándar.}$$

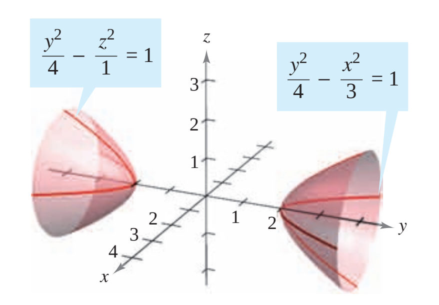


Figura 11.59

De la tabla en las páginas 814 y 815 se puede concluir que la superficie es un hiperboloide de dos hojas con el eje y como su eje. Para esbozar la gráfica de esta superficie, conviene hallar las trazas en los planos coordenados.

Traza xy $(z = 0)$: $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{3} = 1$ — Hipérbola.

Traza xz $(y = 0)$: $\frac{x^2}{3} + \frac{z^2}{1} = -1$ — No hay traza.

Traza yx $(x = 0)$: $\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{1} = 1$ — Hipérbola.

La gráfica se muestra en la figura 11.59.

EJEMPLO 3 Trazado de una superficie cuádrica

Clasificar y dibujar la superficie dada por $x - y^2 - 4z^2 = 0$.

Solución Como x está elevada sólo a la primera potencia, la superficie es un paraboloide. El eje del paraboloide es el eje x. En la forma canónica o estándar, la ecuación es

$$x = y^2 + 4z^2. \qquad \text{Forma canónica o estándar.}$$

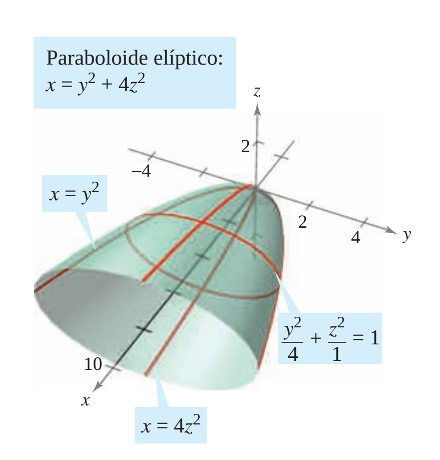


Figura 11.60

Algunas trazas útiles son las siguientes.

Traza xy $(z = 0)$: $x = y^2$ — Parábola.

Traza xz $(y = 0)$: $x = 4z^2$ — Parábola.

Paralelo al plano yz $(x = 4)$: $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1$ — Elipse.

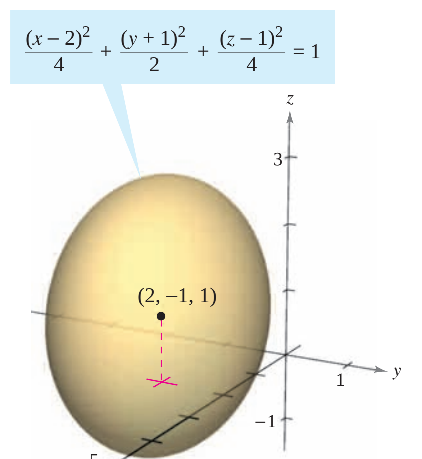
La superficie es un paraboloide *elíptico*, como se muestra en la figura 11.60.

Algunas ecuaciones de segundo grado en x, y y z no representan ninguno de los tipos básicos de superficies cuádricas. He aquí dos ejemplos.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0 \qquad \text{Un único punto.}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad \text{Cilindro recto circular.}$$

En el caso de una superficie cuádrica no centrada en el origen, se puede formar la ecuación estándar completando cuadrados, como se muestra en el ejemplo 4.



Un elipsoide centrado en $(2, -1, 1)$
Figura 11.61

EJEMPLO 4 Una superficie cuádrica no centrada en el origen

Clasificar y dibujar la superficie dada por

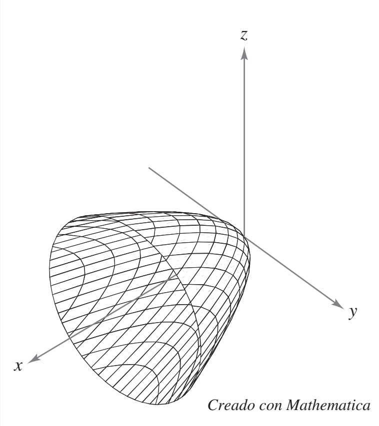
$$x^2 + 2y^2 + z^2 - 4x + 4y - 2z + 3 = 0.$$

Solución Al completar el cuadrado de cada variable se obtiene:

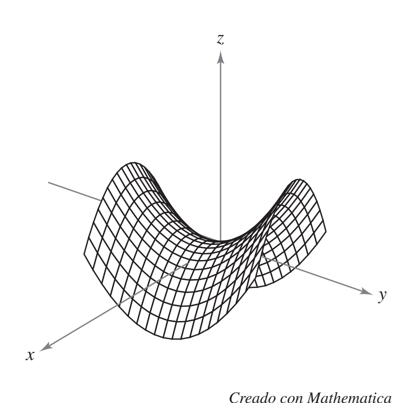
$$(x^2 - 4x + \quad) + 2(y^2 + 2y + \quad) + (z^2 - 2z + \quad) = -3$$
$$(x^2 - 4x + 4) + 2(y^2 + 2y + 1) + (z^2 - 2z + 1) = -3 + 4 + 2 + 1$$
$$(x-2)^2 + 2(y+1)^2 + (z-1)^2 = 4$$
$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{2} + \frac{(z-1)^2}{4} = 1$$

En esta ecuación se puede ver que la superficie cuádrica es un elipsoide centrado en el punto $(2, -1, 1)$. Su gráfica se muestra en la figura 11.61.

TECNOLOGÍA Un sistema algebraico por computadora puede ayudar a visualizar una superficie en el espacio.* La mayoría de estos sistemas algebraicos por computadora crean ilusiones tridimensionales dibujando varias trazas de la superficie y aplicando una rutina de "línea oculta" que borra las porciones de la superficie situadas detrás de otras. Abajo se muestran dos ejemplos de figuras que se generaron con *Mathematica*.



Paraboloide elíptico
$x = \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}$



Paraboloide hiperbólico
$z = \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{16}$

Usar una herramienta de graficación para representar una superficie en el espacio requiere práctica. En primer lugar, se debe saber lo suficiente sobre la superficie en cuestión para poder especificar que dé una vista representativa de la superficie. También, a menudo se puede mejorar la vista de una superficie girando los ejes. Por ejemplo, se observa que el paraboloide elíptico de la figura se ve desde un punto más "alto" que el utilizado para ver el paraboloide hiperbólico.

** Algunas graficadoras 3-D requieren que se den las superficies mediante ecuaciones paramétricas. Para un análisis de esta técnica, ver la sección 15.5.*

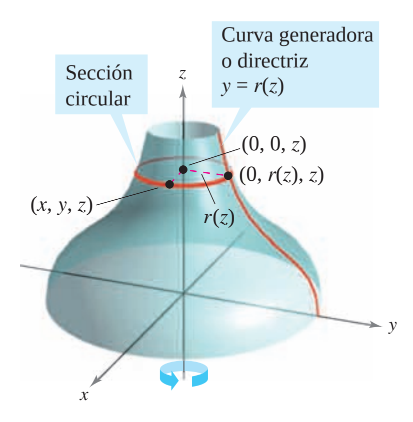


Figura 11.62

Superficies de revolución

El quinto tipo especial de superficie que se estudiará se llama **superficie de revolución**. En la sección 7.4 se estudió un método para encontrar el *área* de tales superficies. Ahora se verá un procedimiento para hallar su *ecuación*. Considerar la gráfica de la **función radio**

$$y = r(z) \qquad \text{Curva generadora o directriz.}$$

en el plano yz. Si esta gráfica se gira sobre el eje z, forma una superficie de revolución, como se muestra en la figura 11.62. La traza de la superficie en el plano $z = z_0$ es un círculo cuyo radio es $r(z_0)$ y cuya ecuación es

$$x^2 + y^2 = [r(z_0)]^2. \qquad \text{Traza circular en el plano: } z = z_0.$$

Sustituyendo z_0 por z se obtiene una ecuación que es válida para todos los valores de z. De manera similar, se pueden obtener ecuaciones de superficies de revolución para los otros dos ejes, y los resultados se resumen como sigue.

SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

Si la gráfica de una función radio r se gira sobre uno de los ejes coordenados, la ecuación de la superficie de revolución resultante tiene una de las formas siguientes.

1. Girada sobre el eje x: $y^2 + z^2 = [r(x)]^2$
2. Girada sobre el eje y: $x^2 + z^2 = [r(y)]^2$
3. Girada sobre el eje z: $x^2 + y^2 = [r(z)]^2$

EJEMPLO 5 Hallar una ecuación para una superficie de revolución

a) Una ecuación para la superficie de revolución generada al girar la gráfica de

$$y = \frac{1}{z} \qquad \text{Función radio.}$$

en torno al eje z es

$$x^2 + y^2 = [r(z)]^2 \qquad \text{Girada en torno al eje } z.$$

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{z}\right)^2. \qquad \text{Sustituir } r(z) \text{ para } 1/z.$$

b) Para encontrar una ecuación para la superficie generada al girar la gráfica de $9x^2 = y^3$ en torno al eje y, se despeja x en términos de y. Así se obtiene

$$x = \tfrac{1}{3}y^{3/2} = r(y). \qquad \text{Función radio.}$$

Por tanto, la ecuación para esta superficie es

$$x^2 + z^2 = [r(y)]^2 \qquad \text{Girada en torno al eje } y.$$

$$x^2 + z^2 = \left(\tfrac{1}{3}y^{3/2}\right)^2 \qquad \text{Sustituir } \tfrac{1}{3}y^{3/2} \text{ para } r(y).$$

$$x^2 + z^2 = \tfrac{1}{9}y^3. \qquad \text{Ecuación de la superficie.}$$

La gráfica se muestra en la figura 11.63.

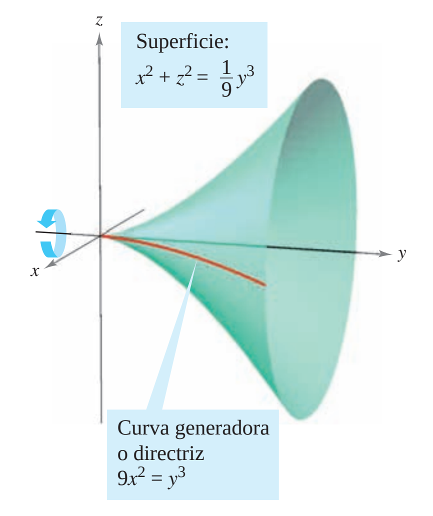


Figura 11.63

La curva generadora o directriz de una superficie de revolución no es única. Por ejemplo, la superficie

$$x^2 + z^2 = e^{-2y}$$

puede generarse al girar la gráfica de $x = e^{-y}$ en torno al eje y o la gráfica de $z = e^{-y}$ sobre el eje y, como se muestra en la figura 11.64.

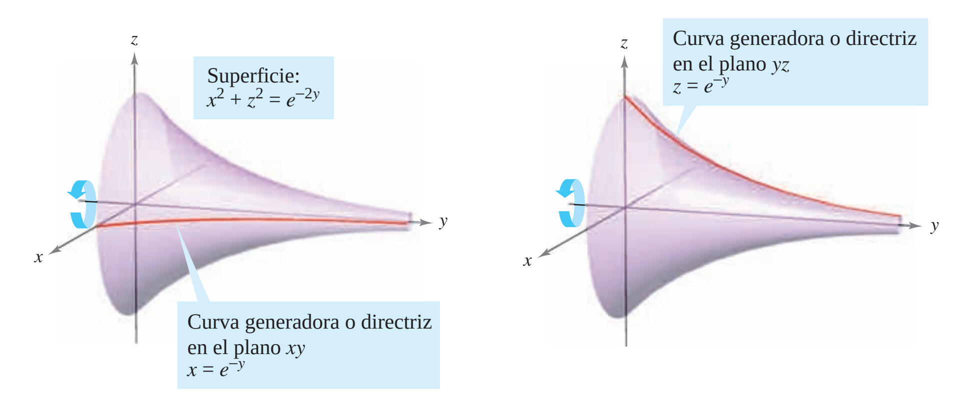


Figura 11.64

EJEMPLO 6 Hallar una directriz para una superficie de revolución

Hallar una directriz y el eje de revolución de la superficie dada por

$$x^2 + 3y^2 + z^2 = 9.$$

Solución Se sabe ahora que la ecuación tiene una de las formas siguientes.

$$x^2 + y^2 = [r(z)]^2 \quad \text{Girada en torno al eje } z.$$
$$y^2 + z^2 = [r(x)]^2 \quad \text{Girada en torno al eje } x.$$
$$x^2 + z^2 = [r(y)]^2 \quad \text{Girada en torno al eje } y.$$

Como los coeficientes de x^2 y z^2 son iguales, se debe elegir la tercera forma y escribir

$$x^2 + z^2 = 9 - 3y^2.$$

El eje y es el eje de revolución. Se puede elegir una directriz de las trazas siguientes.

$$x^2 = 9 - 3y^2 \quad \text{Traza en el plano } xy.$$
$$z^2 = 9 - 3y^2 \quad \text{Traza en el plano } yz.$$

Por ejemplo, usando la primer traza, la directriz es la semielipse dada por

$$x = \sqrt{9 - 3y^2}. \quad \text{Directriz.}$$

La gráfica de esta superficie se muestra en la figura 11.65.

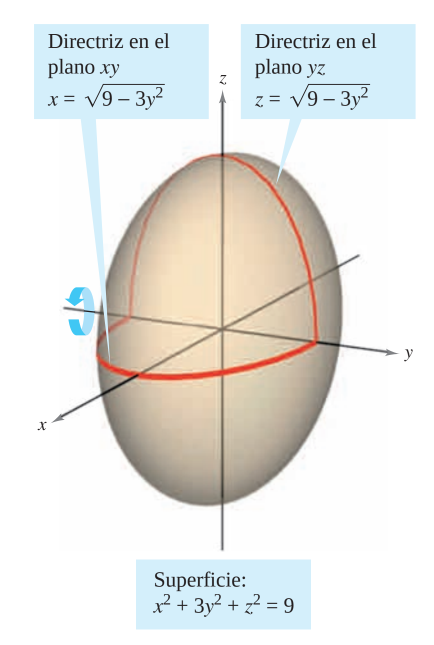
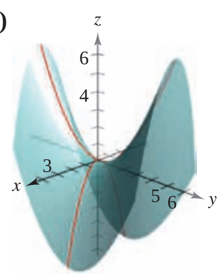


Figura 11.65

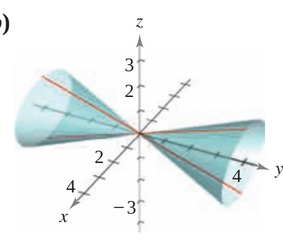
11.6 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, asociar la ecuación con su gráfica. [Las gráficas están marcadas *a*), *b*), *c*), *d*), *e*) y *f*).]

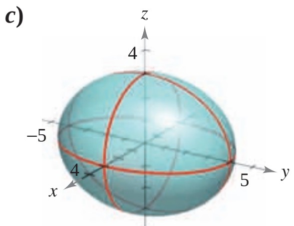
a)



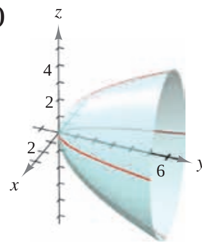
b)



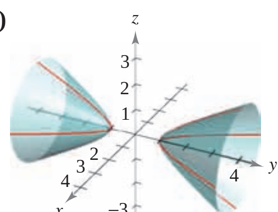
c)



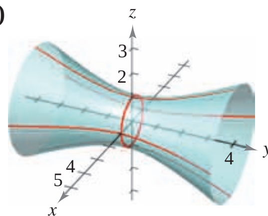
d)



e)



f)



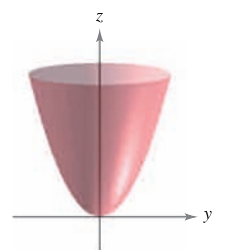
1. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$
2. $15x^2 - 4y^2 + 15z^2 = -4$
3. $4x^2 - y^2 + 4z^2 = 4$
4. $y^2 = 4x^2 + 9z^2$
5. $4x^2 - 4y + z^2 = 0$
6. $4x^2 - y^2 + 4z = 0$

En los ejercicios 7 a 16, describir y dibujar la superficie.

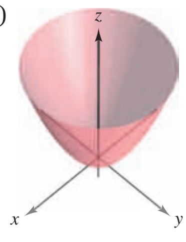
7. $y = 5$
8. $z = 2$
9. $y^2 + z^2 = 9$
10. $x^2 + z^2 = 25$
11. $x^2 - y = 0$
12. $y^2 + z = 6$
13. $4x^2 + y^2 = 4$
14. $y^2 - z^2 = 16$
15. $z - \text{sen } y = 0$
16. $z - e^y = 0$

17. ***Para pensar*** Las cuatro figuras son gráficas de la superficie cuádrica $z = x^2 + y^2$. Asociar cada una de las cuatro gráficas con el punto en el espacio desde el cual se ve el paraboloide. Los cuatro puntos son (0, 0, 20), (0, 20, 0), (20, 0, 0) y (10, 10, 20).

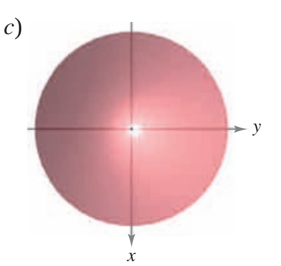
a)



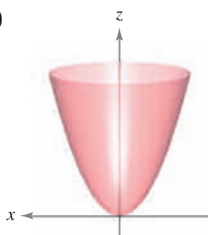
b)



c)



d)



Figuras para 17

CAS 18. Usar un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente el cilindro $y^2 + z^2 = 4$ desde cada punto.

a) (10, 0, 0)
b) (0, 10, 0)
c) (10, 10, 10)

En los ejercicios 19 a 32, identificar y dibujar la superficie cuádrica. Usar un sistema algebraico por computadora para confirmar su dibujo.

19. $x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$
20. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{25} = 1$
21. $16x^2 - y^2 + 16z^2 = 4$
22. $-8x^2 + 18y^2 + 18z^2 = 2$
23. $4x^2 - y^2 - z^2 = 1$
24. $z^2 - x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$
25. $x^2 - y + z^2 = 0$
26. $z = x^2 + 4y^2$
27. $x^2 - y^2 + z = 0$
28. $3z = -y^2 + x^2$
29. $z^2 = x^2 + \frac{y^2}{9}$
30. $x^2 = 2y^2 + 2z^2$
31. $16x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 32x - 36y + 36 = 0$
32. $9x^2 + y^2 - 9z^2 - 54x - 4y - 54z + 4 = 0$

CAS **En los ejercicios 33 a 42, usar un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente la superficie. (*Sugerencia:* Puede ser necesario despejar *z* y considerar dos ecuaciones al representar gráficamente la superficie.)**

33. $z = 2 \cos x$
34. $z = x^2 + 0.5y^2$
35. $z^2 = x^2 + 7.5y^2$
36. $3.25y = x^2 + z^2$
37. $x^2 + y^2 = \left(\frac{2}{z}\right)^2$
38. $x^2 + y^2 = e^{-z}$
39. $z = 10 - \sqrt{|xy|}$
40. $z = \frac{-x}{8 + x^2 + y^2}$
41. $6x^2 - 4y^2 + 6z^2 = -36$
42. $9x^2 + 4y^2 - 8z^2 = 72$

En los ejercicios 43 a 46, dibujar la región limitada por las gráficas de las ecuaciones.

43. $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}, \; z = 2$
44. $z = \sqrt{4 - x^2}, \; y = \sqrt{4 - x^2}, \; x = 0, \; y = 0, \; z = 0$
45. $x^2 + y^2 = 1, \; x + z = 2, \; z = 0$
46. $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \; y = 2z, \; z = 0$

En los ejercicios 47 a 52, hallar una ecuación para la superficie de revolución generada al girar la curva en el plano coordenado indicado sobre el eje dado.

	Ecuación de la curva	*Plano coordenado*	*Eje de revolución*
47.	$z^2 = 4y$	Plano yz	Eje y
48.	$z = 3y$	Plano yz	Eje y
49.	$z = 2y$	Plano yz	Eje z
50.	$2z = \sqrt{4 - x^2}$	Plano xz	Eje x
51.	$xy = 2$	Plano xy	Eje x
52.	$z = \ln y$	Plano yz	Eje z

En los ejercicios 53 y 54, hallar una ecuación de una directriz dada la ecuación de su superficie de revolución.

53. $x^2 + y^2 - 2z = 0$ **54.** $x^2 + z^2 = \cos^2 y$

Desarrollo de conceptos

55. Dar la definición de un cilindro.

56. ¿Qué es la traza de una superficie? ¿Cómo encuentra una traza?

57. Identificar las seis superficies cuádricas y dar la forma estándar de cada una.

Para discusión

58. ¿Qué representa la ecuación $z = x^2$ en el plano xz? ¿Qué representa en el espacio?

En los ejercicios 59 y 60, usar el método de las capas para encontrar el volumen del sólido que se encuentra debajo de la superficie de revolución y sobre el plano *xy*.

59. La curva $z = 4x - x^2$ en el plano xz se gira en torno al eje z.

60. La curva $z = \operatorname{sen} y$ $(0 \leq y \leq \pi)$ en el plano yz se gira en torno al eje z.

En los ejercicios 61 y 62, analizar la traza cuando la superficie

$$z = \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4}y^2$$

se corta con los planos indicados.

61. Hallar las longitudes de los ejes mayor y menor y las coordenadas del foco de la elipse generada cuando la superficie es cortada por los planos dados por

a) $z = 2$ y *b*) $z = 8$.

62. Hallar las coordenadas del foco de la parábola formada cuando la superficie se corta con los planos dados por

a) $y = 4$ y *b*) $x = 2$.

En los ejercicios 63 y 64, hallar una ecuación de la superficie que satisface las condiciones e identificar la superficie.

63. El conjunto de todos los puntos equidistantes del punto (0, 2, 0) y del plano $y = -2$.

64. El conjunto de todos los puntos equidistantes del punto (0, 0, 4) y del plano xy.

65. ***Geografía*** Debido a las fuerzas causadas por su rotación, la Tierra es un elipsoide oblongo y no una esfera. El radio ecuatorial es de 3 963 millas y el radio polar es de 3 950 millas. Hallar una ecuación del elipsoide. (Suponer que el centro de la Tierra está en el origen y que la traza formada por el plano $z = 0$ corresponde al ecuador.)

66. ***Diseño de máquinas*** La parte superior de un buje de caucho, diseñado para absorber las vibraciones en un automóvil, es la superficie de revolución generada al girar la curva $z = \frac{1}{2}y^2 + 1$ $(0 \leq y \leq 2)$ en el plano yz en torno al eje z.

a) Hallar una ecuación de la superficie de revolución.

b) Todas las medidas están en centímetros y el buje es fijo en el plano xy. Usar el método de capas para encontrar su volumen.

c) El buje tiene un orificio de 1 centímetro de diámetro que pasa por su centro y en paralelo al eje de revolución. Hallar el volumen del buje de caucho.

67. Determinar la intersección del paraboloide hiperbólico $z = y^2/b^2 - x^2/a^2$ con el plano $bx + ay - z = 0$. (Suponer $a, b > 0$.)

68. Explicar por qué la curva de intersección de las superficies $x^2 + 3y^2 - 2z^2 + 2y = 4$ y $2x^2 + 6y^2 - 4z^2 - 3x = 2$ se encuentra en un plano.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 69 a 72, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que pruebe su falsedad.**

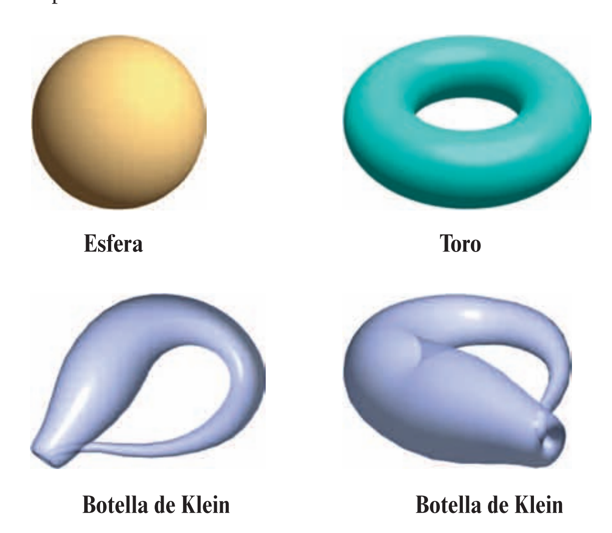
69. Una esfera es un elipsoide.

70. La directriz de una superficie de revolución es única.

71. Todas las trazas de un elipsoide son elipses.

72. Todas las trazas de un hiperboloide de una hoja son hiperboloides.

73. ***Para pensar*** Abajo se muestran tres tipos de superficies "topológicas" clásicas. La esfera y el toro tienen "interior" y "exterior". ¿Tiene la botella de Klein interior y exterior? Explicar.



11.7 Coordenadas cilíndricas y esféricas

- **Usar coordenadas cilíndricas para representar superficies en el espacio.**
- **Usar coordenadas esféricas para representar superficies en el espacio.**

Coordenadas cilíndricas

Ya se ha visto que algunas gráficas bidimensionales son más fáciles de representar en coordenadas polares que en coordenadas rectangulares. Algo semejante ocurre con las superficies en el espacio. En esta sección se estudiarán dos sistemas alternativos de coordenadas espaciales. El primero, el **sistema de coordenadas cilíndricas**, es una extensión de las coordenadas polares del plano al espacio tridimensional.

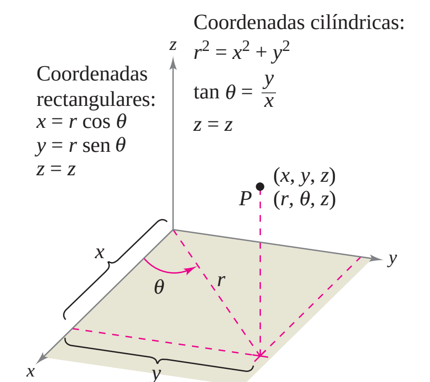


Figura 11.66

EL SISTEMA DE COORDENADAS CILÍNDRICAS
En un **sistema de coordenadas cilíndricas**, un punto P en el espacio se representa por medio de una terna ordenada (r, θ, z).
1. (r, θ) es una representación polar de la proyección de P en el plano xy.
2. z es la distancia dirigida de (r, θ) a P.

Para convertir coordenadas rectangulares en coordenadas cilíndricas (o viceversa), hay que usar las siguientes fórmulas, basadas en las coordenadas polares, como se ilustra en la figura 11.66.

Cilíndricas a rectangulares:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta, \qquad z = z$$

Rectangulares a cilíndricas:

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}, \qquad z = z$$

Al punto (0, 0, 0) se le llama el **polo**. Como la representación de un punto en el sistema de coordenadas polares no es única, la representación en el sistema de las coordenadas cilíndricas tampoco es única.

EJEMPLO 1 Conversión de coordenadas cilíndricas a coordenadas rectangulares

Convertir el punto $(r, \theta, z) = \left(4, \frac{5\pi}{6}, 3\right)$ a coordenadas rectangulares.

Solución Usando las ecuaciones de conversión de cilíndricas a rectangulares se obtiene

$$x = 4\cos\frac{5\pi}{6} = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3}$$

$$y = 4\,\text{sen}\frac{5\pi}{6} = 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

$$z = 3.$$

Por tanto, en coordenadas rectangulares, el punto es $(x, y, z) = \left(-2\sqrt{3}, 2, 3\right)$, como se muestra en la figura 11.67.

$(x, y, z) = (-2\sqrt{3}, 2, 3)$

$(r, \theta, z) = \left(4, \frac{5\pi}{6}, 3\right)$

Figura 11.67

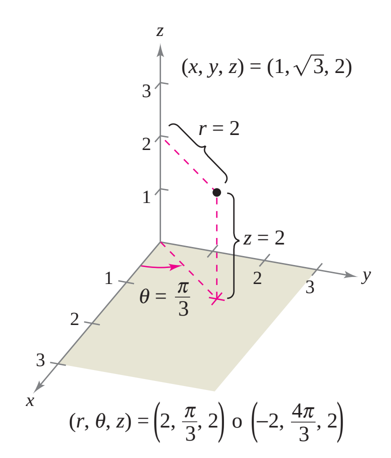


Figura 11.68

EJEMPLO 2 Conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas

Convertir el punto $(x, y, z) = \left(1, \sqrt{3}, 2\right)$ a coordenadas cilíndricas.

Solución Usar las ecuaciones de conversión de rectangulares a cilíndricas.

$$r = \pm\sqrt{1 + 3} = \pm 2$$

$$\tan\theta = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \theta = \arctan\left(\sqrt{3}\right) + n\pi = \frac{\pi}{3} + n\pi$$

$$z = 2$$

Hay dos posibilidades para r y una cantidad infinita de posibilidades para θ. Como se muestra en la figura 11.68, dos representaciones adecuadas del punto son

$$\left(2, \frac{\pi}{3}, 2\right) \qquad r > 0 \text{ y } \theta \text{ en el cuadrante I.}$$

$$\left(-2, \frac{4\pi}{3}, 2\right). \qquad r < 0 \text{ y } \theta \text{ en el cuadrante III.}$$

Las coordenadas cilíndricas son especialmente adecuadas para representar superficies cilíndricas y superficies de revolución en las que el eje z sea el eje de simetría, como se muestra en la figura 11.69.

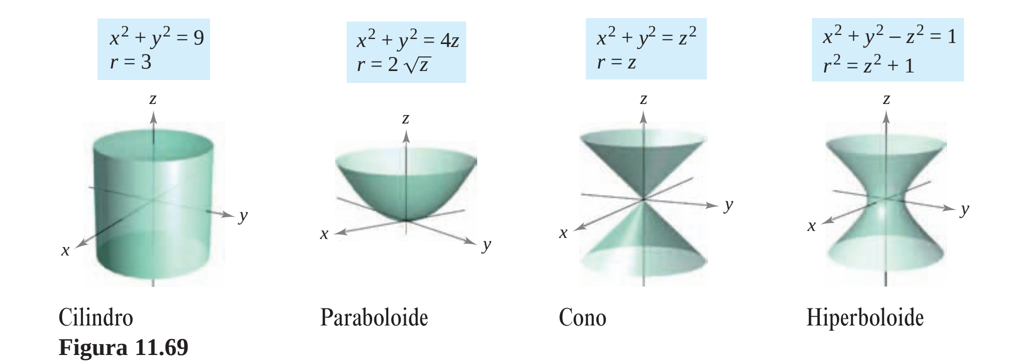


Figura 11.69

Los planos verticales que contienen el eje z y los planos horizontales también tienen ecuaciones simples de coordenadas cilíndricas, como se muestra en la figura 11.70.

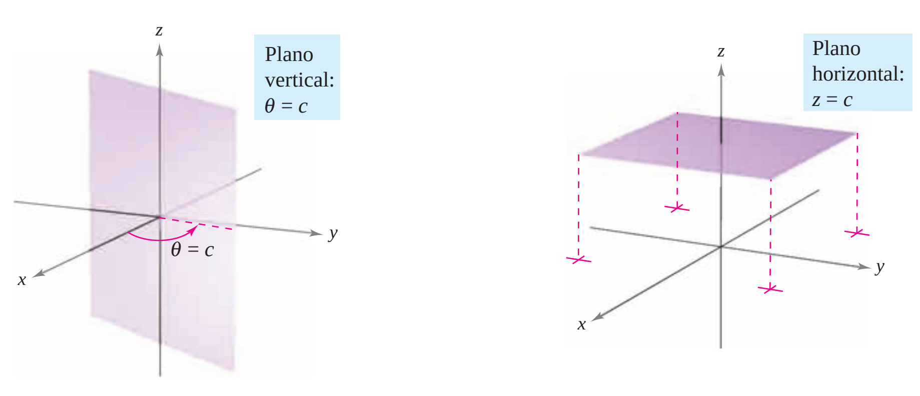


Figura 11.70

EJEMPLO 3 Conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas

Hallar una ecuación en coordenadas cilíndricas para la superficie representada por cada ecuación rectangular.

a) $x^2 + y^2 = 4z^2$

b) $y^2 = x$

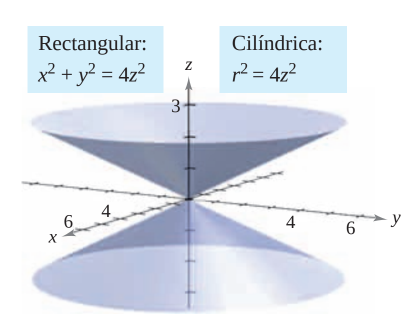


Figura 11.71

Solución

a) Según la sección anterior, se sabe que la gráfica de $x^2 + y^2 = 4z^2$ es un cono "de dos hojas" con su eje a lo largo del eje z, como se muestra en la figura 11.71. Si se sustituye $x^2 + y^2$ por r^2, la ecuación en coordenadas cilíndricas es

$$x^2 + y^2 = 4z^2 \qquad \text{Ecuación rectangular.}$$
$$r^2 = 4z^2. \qquad \text{Ecuación cilíndrica.}$$

b) La gráfica de la superficie $y^2 = x$ es un cilindro parabólico con rectas generatrices paralelas al eje z, como se muestra en la figura 11.72. Sustituyendo y^2 por $r^2 \operatorname{sen}^2 \theta$ y x por $r \cos \theta$, se obtiene la ecuación siguiente en coordenadas cilíndricas.

$$y^2 = x \qquad \text{Ecuación rectangular.}$$
$$r^2 \operatorname{sen}^2 \theta = r \cos \theta \qquad \text{Sustituir } y \text{ por } r \operatorname{sen} \theta \text{ y } x \text{ por } r \cos \theta.$$
$$r(r \operatorname{sen}^2 \theta - \cos \theta) = 0 \qquad \text{Agrupar términos y factorizar.}$$
$$r \operatorname{sen}^2 \theta - \cos \theta = 0 \qquad \text{Dividir cada lado entre } r.$$
$$r = \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} \qquad \text{Despejar } r.$$
$$r = \csc \theta \cot \theta \qquad \text{Ecuación cilíndrica.}$$

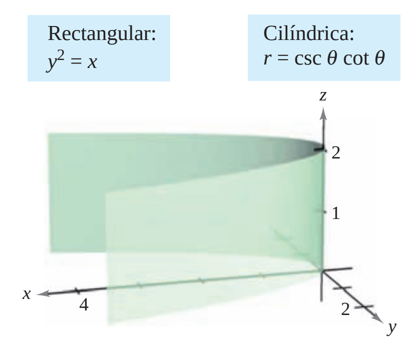


Figura 11.72

Hay que observar que esta ecuación comprende un punto en el que $r = 0$, por lo cual nada se pierde al dividir cada lado entre el factor r.

La conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas es más sencilla que la conversión de coordenadas cilíndricas a coordenadas rectangulares, como se muestra en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Conversión de coordenadas cilíndricas a coordenadas rectangulares

Hallar una ecuación en coordenadas rectangulares de la superficie representada por la ecuación cilíndrica

$$r^2 \cos 2\theta + z^2 + 1 = 0.$$

Solución

$$r^2 \cos 2\theta + z^2 + 1 = 0 \qquad \text{Ecuación cilíndrica.}$$
$$r^2(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) + z^2 + 1 = 0 \qquad \text{Identidad trigonométrica.}$$
$$r^2 \cos^2 \theta - r^2 \operatorname{sen}^2 \theta + z^2 = -1$$
$$x^2 - y^2 + z^2 = -1 \qquad \text{Sustituya } r \cos \theta \text{ por } x \text{ y } r \operatorname{sen} \theta \text{ por } y.$$
$$y^2 - x^2 - z^2 = 1 \qquad \text{Ecuación rectangular.}$$

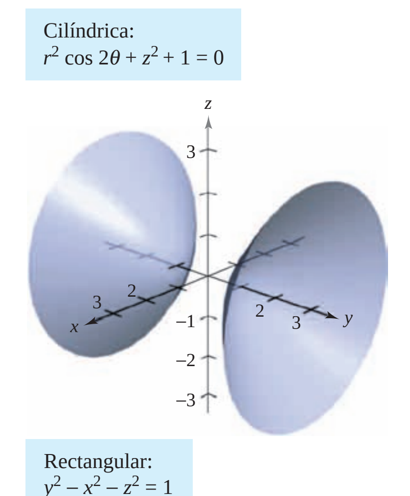


Figura 11.73

Es un hiperboloide de dos hojas cuyo eje se encuentra a lo largo del eje y, como se muestra en la figura 11.73.

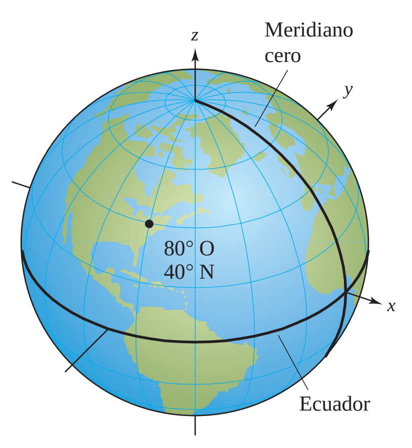


Figura 11.74

Coordenadas esféricas

En el **sistema de coordenadas esféricas**, cada punto se representa por una terna ordenada: la primera coordenada es una distancia, la segunda y la tercera coordenadas son ángulos. Este sistema es similar al sistema de latitud-longitud que se usa para identificar puntos en la superficie de la Tierra. Por ejemplo, en la figura 11.74 se muestra el punto en la superficie de la Tierra cuya latitud es 40° Norte (respecto al ecuador) y cuya longitud es 80° Oeste (respecto al meridiano cero). Si se supone que la Tierra es esférica y tiene un radio de 4 000 millas, este punto sería

$$(4\,000, -80°, 50°).$$

Radio — 80° en el sentido de las manecillas del reloj, desde el meridiano cero — 50° hacia abajo del Polo Norte

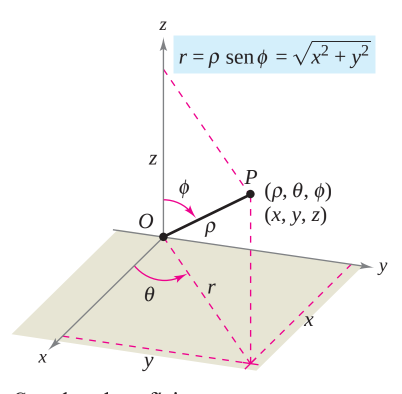
EL SISTEMA DE COORDENADAS ESFÉRICAS

En un **sistema de coordenadas esféricas**, un punto P en el espacio se representa por medio de una terna ordenada (ρ, θ, ϕ).

1. ρ es la distancia entre P y el origen, $\rho \geq 0$.
2. θ es el mismo ángulo utilizado en coordenadas cilíndricas para $r \geq 0$.
3. ϕ es el ángulo *entre* el eje z positivo y el segmento de recta $\overrightarrow{OP}$, $0 \leq \phi \leq \pi$.

Hay que observar que la primera y tercera coordenadas, ρ y ϕ, son no negativas. ρ es la letra minúscula *ro*, y ϕ es la letra griega minúscula *fi*.

La relación entre coordenadas rectangulares y esféricas se ilustra en la figura 11.75. Para convertir de un sistema al otro, usar lo siguiente.



Coordenadas esféricas
Figura 11.75

Esféricas a rectangulares:

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \qquad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \qquad z = \rho \cos \phi$$

Rectangulares a esféricas:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad \tan \theta = \frac{y}{x}, \qquad \phi = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$

Para cambiar entre los sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas, usar lo siguiente.

Esféricas a cilíndricas $(r \geq 0)$***:***

$$r^2 = \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi, \qquad \theta = \theta, \qquad z = \rho \cos \phi$$

Cilíndricas a esféricas $(r \geq 0)$***:***

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}, \qquad \theta = \theta, \qquad \phi = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}\right)$$

El sistema de coordenadas esféricas es útil principalmente para superficies en el espacio que tiene un *punto* o *centro* de simetría. Por ejemplo, la figura 11.76 muestra tres superficies con ecuaciones esféricas sencillas.

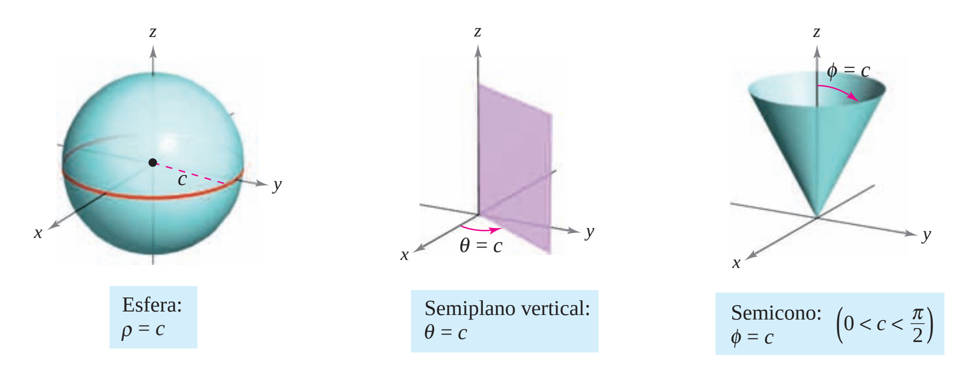


Figura 11.76

EJEMPLO 5 Conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas

Hallar una ecuación en coordenadas esféricas para la superficie representada por cada una de las ecuaciones rectangulares.

a) Cono: $x^2 + y^2 = z^2$

b) Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$

Solución

a) Haciendo las sustituciones apropiadas de x, y y z en la ecuación dada se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= z^2 \\ \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen}^2 \theta &= \rho^2 \cos^2 \phi \\ \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) &= \rho^2 \cos^2 \phi \\ \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi &= \rho^2 \cos^2 \phi \\ \frac{\operatorname{sen}^2 \phi}{\cos^2 \phi} &= 1 \qquad \rho \geq 0. \\ \tan^2 \phi &= 1 \qquad \phi = \pi/4 \text{ o } \phi = 3\pi/4. \end{aligned}$$

La ecuación $\phi = \pi/4$ representa el semicono *superior*, y la ecuación $\phi = 3\pi/4$ representa el semicono *inferior*.

b) Como $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ y $z = \rho \cos \phi$, la ecuación dada tiene la forma esférica siguiente.

$$\rho^2 - 4\rho \cos \phi = 0 \quad \Longrightarrow \quad \rho(\rho - 4 \cos \phi) = 0$$

Descartando por el momento la posibilidad de que $\rho = 0$, se obtiene la ecuación esférica

$$\rho - 4 \cos \phi = 0 \qquad \text{o} \qquad \rho = 4 \cos \phi.$$

Hay que observar que el conjunto solución de esta ecuación comprende un punto en el cual $\rho = 0$, de manera que no se pierde nada al eliminar el factor ρ. La esfera representada por la ecuación $\rho = 4 \cos \phi$ se muestra en la figura 11.77.

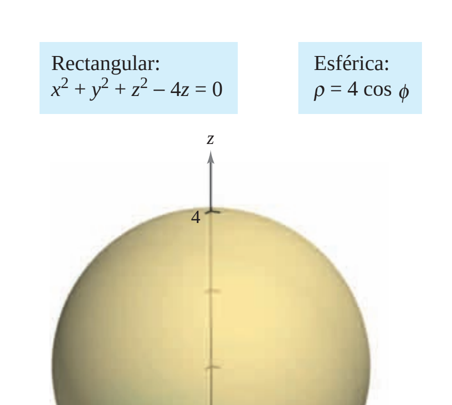


Figura 11.77

11.7 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, convertir las coordenadas cilíndricas del punto en coordenadas rectangulares.

1. $(-7, 0, 5)$
2. $(2, -\pi, -4)$
3. $(3, \pi/4, 1)$
4. $(6, -\pi/4, 2)$
5. $(4, 7\pi/6, 3)$
6. $(-0.5, 4\pi/3, 8)$

En los ejercicios 7 a 12, convertir las coordenadas rectangulares del punto en coordenadas cilíndricas.

7. $(0, 5, 1)$
8. $(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 4)$
9. $(2, -2, -4)$
10. $(3, -3, 7)$
11. $(1, \sqrt{3}, 4)$
12. $(2\sqrt{3}, -2, 6)$

En los ejercicios 13 a 20, hallar una ecuación en coordenadas cilíndricas de la ecuación dada en coordenadas rectangulares.

13. $z = 4$
14. $x = 9$
15. $x^2 + y^2 + z^2 = 17$
16. $z = x^2 + y^2 - 11$
17. $y = x^2$
18. $x^2 + y^2 = 8x$
19. $y^2 = 10 - z^2$
20. $x^2 + y^2 + z^2 - 3z = 0$

En los ejercicios 21 a 28, hallar una ecuación en coordenadas rectangulares de la ecuación dada en coordenadas cilíndricas y dibujar su gráfica.

21. $r = 3$
22. $z = 2$
23. $\theta = \pi/6$
24. $r = \frac{1}{2}z$
25. $r^2 + z^2 = 5$
26. $z = r^2 \cos^2 \theta$
27. $r = 2 \operatorname{sen} \theta$
28. $r = 2 \cos \theta$

En los ejercicios 29 a 34, convertir las coordenadas rectangulares del punto en coordenadas esféricas.

29. $(4, 0, 0)$
30. $(-4, 0, 0)$
31. $(-2, 2\sqrt{3}, 4)$
32. $(2, 2, 4\sqrt{2})$
33. $(\sqrt{3}, 1, 2\sqrt{3})$
34. $(-1, 2, 1)$

En los ejercicios 35 a 40, convertir las coordenadas esféricas del punto en coordenadas rectangulares.

35. $(4, \pi/6, \pi/4)$
36. $(12, 3\pi/4, \pi/9)$
37. $(12, -\pi/4, 0)$
38. $(9, \pi/4, \pi)$
39. $(5, \pi/4, 3\pi/4)$
40. $(6, \pi, \pi/2)$

En los ejercicios 41 a 48, hallar una ecuación en coordenadas esféricas de la ecuación dada en coordenadas rectangulares.

41. $y = 2$
42. $z = 6$
43. $x^2 + y^2 + z^2 = 49$
44. $x^2 + y^2 - 3z^2 = 0$
45. $x^2 + y^2 = 16$
46. $x = 13$
47. $x^2 + y^2 = 2z^2$
48. $x^2 + y^2 + z^2 - 9z = 0$

En los ejercicios 49 a 56, encontrar una ecuación en coordenadas rectangulares de la ecuación dada en coordenadas esféricas y dibujar su gráfica.

49. $\rho = 5$
50. $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$
51. $\phi = \dfrac{\pi}{6}$
52. $\phi = \dfrac{\pi}{2}$
53. $\rho = 4 \cos \phi$
54. $\rho = 2 \sec \phi$
55. $\rho = \csc \phi$
56. $\rho = 4 \csc \phi \sec \theta$

En los ejercicios 57 a 64, convertir las coordenadas cilíndricas del punto en coordenadas esféricas.

57. $(4, \pi/4, 0)$
58. $(3, -\pi/4, 0)$
59. $(4, \pi/2, 4)$
60. $(2, 2\pi/3, -2)$
61. $(4, -\pi/6, 6)$
62. $(-4, \pi/3, 4)$
63. $(12, \pi, 5)$
64. $(4, \pi/2, 3)$

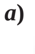
En los ejercicios 65 a 72, convertir las coordenadas esféricas del punto en coordenadas cilíndricas.

65. $(10, \pi/6, \pi/2)$
66. $(4, \pi/18, \pi/2)$
67. $(36, \pi, \pi/2)$
68. $(18, \pi/3, \pi/3)$
69. $(6, -\pi/6, \pi/3)$
70. $(5, -5\pi/6, \pi)$
71. $(8, 7\pi/6, \pi/6)$
72. $(7, \pi/4, 3\pi/4)$

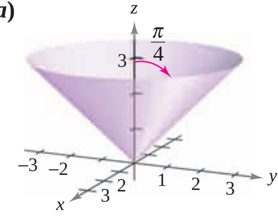
CAS **En los ejercicios 73 a 88, usar un sistema algebraico por computadora o una herramienta de graficación para convertir las coordenadas del punto de un sistema a otro, entre los sistemas de coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas.**

	Rectangulares	*Cilíndricas*	*Esféricas*
73.	$(4, 6, 3)$		
74.	$(6, -2, -3)$		
75.		$(5, \pi/9, 8)$	
76.		$(10, -0.75, 6)$	
77.			$(20, 2\pi/3, \pi/4)$
78.			$(7.5, 0.25, 1)$
79.	$(3, -2, 2)$		
80.	$(3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, -3)$		
81.	$(5/2, 4/3, -3/2)$		
82.	$(0, -5, 4)$		
83.		$(5, 3\pi/4, -5)$	
84.		$(-2, 11\pi/6, 3)$	
85.		$(-3.5, 2.5, 6)$	
86.		$(8.25, 1.3, -4)$	
87.			$(3, 3\pi/4, \pi/3)$
88.			$(8, -\pi/6, \pi)$

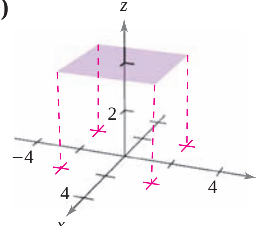
En los ejercicios 89 a 94, asociar la ecuación (dada en términos de coordenadas cilíndricas o esféricas) con su gráfica. [Los gráficos se marcan *a*), *b*), *c*), *d*), *e*) y *f*).]



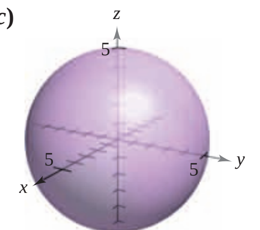
a)



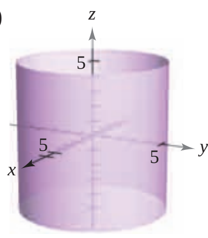
b)



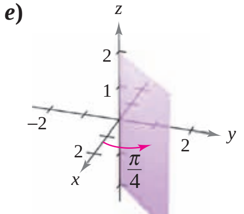
c)



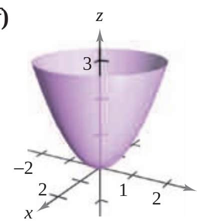
d)



e)



f)



89. $r = 5$ **90.** $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

91. $\rho = 5$ **92.** $\phi = \dfrac{\pi}{4}$

93. $r^2 = z$ **94.** $\rho = 4 \sec \phi$

Desarrollo de conceptos

95. Dar las ecuaciones para la conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas y viceversa.

96. Explicar por qué en las coordenadas esféricas la gráfica de $\theta = c$ es un semiplano y no un plano entero.

97. Dar las ecuaciones para la conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas y viceversa.

Para discusión

98. *a*) Dadas las constantes a, b y c, describir las gráficas de las ecuaciones $r = a$, $\theta = b$ y $z = c$ en coordenadas cilíndricas.

b) Dadas las constantes a, b y c, describir las gráficas de las ecuaciones $\rho = a$, $\theta = b$ y $\phi = c$ en coordenadas esféricas.

En los ejercicios 99 a 106, convertir la ecuación rectangular a una ecuación *a*) en coordenadas cilíndricas y *b*) en coordenadas esféricas.

99. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ **100.** $4(x^2 + y^2) = z^2$

101. $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$ **102.** $x^2 + y^2 = z$

103. $x^2 + y^2 = 4y$ **104.** $x^2 + y^2 = 36$

105. $x^2 - y^2 = 9$ **106.** $y = 4$

En los ejercicios 107 a 110, dibujar el sólido que tiene la descripción dada en coordenadas cilíndricas.

107. $0 \le \theta \le \pi/2,\ 0 \le r \le 2,\ 0 \le z \le 4$

108. $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2,\ 0 \le r \le 3,\ 0 \le z \le r \cos \theta$

109. $0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le a,\ r \le z \le a$

110. $0 \le \theta \le 2\pi,\ 2 \le r \le 4,\ z^2 \le -r^2 + 6r - 8$

En los ejercicios 111 a 114, dibujar el sólido que tiene la descripción dada en coordenadas esféricas.

111. $0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \phi \le \pi/6,\ 0 \le \rho \le a \sec \phi$

112. $0 \le \theta \le 2\pi,\ \pi/4 \le \phi \le \pi/2,\ 0 \le \rho \le 1$

113. $0 \le \theta \le \pi/2,\ 0 \le \phi \le \pi/2,\ 0 \le \rho \le 2$

114. $0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \phi \le \pi/2,\ 1 \le \rho \le 3$

Para pensar **En los ejercicios 115 a 120, hallar las desigualdades que describen al sólido, y especificar el sistema de coordenadas utilizado. Posicionar al sólido en el sistema de coordenadas en el que las desigualdades sean tan sencillas como sea posible.**

115. Un cubo con cada arista de 10 centímetros de largo.

116. Una capa cilíndrica de 8 metros de longitud, 0.75 metros de diámetro interior y un diámetro exterior de 1.25 metros.

117. Una capa esférica con radios interior y exterior de 4 pulgadas y 6 pulgadas, respectivamente.

118. El sólido que queda después de perforar un orificio de 1 pulgada de diámetro a través del centro de una esfera de 6 pulgadas de diámetro.

119. El sólido dentro tanto de $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ como de $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$.

120. El sólido entre las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, y dentro del cono $z^2 = x^2 + y^2$.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 121 a 124, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que pruebe que es falsa.**

121. En coordenadas cilíndricas, la ecuación $r = z$ es un cilindro.

122. Las ecuaciones $\rho = 2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ representan la misma superficie.

123. Las coordenadas cilíndricas de un punto (x, y, z) son únicas.

124. Las coordenadas esféricas de un punto (x, y, z) son únicas.

125. Identificar la curva de intersección de las superficies (en coordenadas cilíndricas) $z = \operatorname{sen} \theta$ y $r = 1$.

126. Identificar la curva de intersección de las superficies (en coordenadas esféricas) $\rho = 2 \sec \phi$ y $\rho = 4$.

11 Ejercicios de repaso

En los ejercicios 1 y 2, sean $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$ y $\mathbf{v} = \overrightarrow{PR}$, *a*) escribir u y v en la forma de componentes, *b*) escribir u como combinación lineal de vectores i y j unitarios estándar, *c*) encontrar la magnitud de v y *d*) encontrar 2u + v.

1. $P = (1, 2), Q = (4, 1), R = (5, 4)$

2. $P = (-2, -1), Q = (5, -1), R = (2, 4)$

En los ejercicios 3 y 4, encontrar las componentes del vector v dada su magnitud y el ángulo que forma con el eje *x* positivo.

3. $\|\mathbf{v}\| = 8,\ \theta = 60°$ **4.** $\|\mathbf{v}\| = \frac{1}{2},\ \theta = 225°$

5. Hallar las coordenadas del punto en el plano *xy* cuatro unidades a la derecha del plano *xz* y cinco unidades detrás del plano *yz*.

6. Hallar las coordenadas del punto localizado en el eje *y* y siete unidades a la izquierda del plano *xz*.

En los ejercicios 7 y 8, determinar la localización de un punto (*x*, *y*, *z*) que satisface la condición.

7. $yz > 0$ **8.** $xy < 0$

En los ejercicios 9 y 10, hallar la ecuación estándar de la esfera.

9. Centro: $(3, -2, 6)$; diámetro: 15

10. Puntos terminales de un diámetro: $(0, 0, 4), (4, 6, 0)$

En los ejercicios 11 y 12, completar el cuadrado para dar la ecuación de la esfera en forma canónica o estándar. Hallar el centro y el radio.

11. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 4 = 0$

12. $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 6y - 4z + 34 = 0$

En los ejercicios 13 y 14 se dan los puntos inicial y final de un vector, *a*) dibujar el segmento de recta dirigido, *b*) encontrar la forma componente del vector, *c*) escribir el vector usando notación vectorial unitaria estándar y *d*) dibujar el vector con su punto inicial en el origen.

13. Punto inicial: $(2, -1, 3)$
Punto terminal: $(4, 4, -7)$

14. Punto inicial: $(6, 2, 0)$
Punto terminal: $(3, -3, 8)$

En los ejercicios 15 y 16, utilizar vectores para determinar si los puntos son colineales.

15. $(3, 4, -1),\ (-1, 6, 9),\ (5, 3, -6)$

16. $(5, -4, 7),\ (8, -5, 5),\ (11, 6, 3)$

17. Hallar un vector unitario en la dirección de $\mathbf{u} = \langle 2, 3, 5\rangle$.

18. Hallar el vector **v** de magnitud 8 en la dirección $\langle 6, -3, 2\rangle$.

En los ejercicios 19 y 20, sean $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$ y $\mathbf{v} = \overrightarrow{PR}$. Hallar *a*) las componentes de u y de v, *b*) u · v y *c*) v · v.

19. $P = (5, 0, 0),\ Q = (4, 4, 0),\ R = (2, 0, 6)$

20. $P = (2, -1, 3),\ Q = (0, 5, 1),\ R = (5, 5, 0)$

En los ejercicios 21 y 22, determinar si u y v son ortogonales, paralelos, o ninguna de las dos cosas.

21. $\mathbf{u} = \langle 7, -2, 3\rangle$
$\mathbf{v} = \langle -1, 4, 5\rangle$

22. $\mathbf{u} = \langle -4, 3, -6\rangle$
$\mathbf{v} = \langle 16, -12, 24\rangle$

En los ejercicios 23 a 26, hallar el ángulo θ entre los vectores.

23. $\mathbf{u} = 5[\cos(3\pi/4)\mathbf{i} + \text{sen}(3\pi/4)\mathbf{j}]$
$\mathbf{v} = 2[\cos(2\pi/3)\mathbf{i} + \text{sen}(2\pi/3)\mathbf{j}]$

24. $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k},\quad \mathbf{v} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

25. $\mathbf{u} = \langle 10, -5, 15\rangle,\quad \mathbf{v} = \langle -2, 1, -3\rangle$

26. $\mathbf{u} = \langle 1, 0, -3\rangle,\quad \mathbf{v} = \langle 2, -2, 1\rangle$

27. Hallar dos vectores en direcciones opuestas que sean ortogonales al vector $\mathbf{u} = \langle 5, 6, -3\rangle$.

28. ***Trabajo*** Un objeto es arrastrado 8 pies por el suelo aplicando una fuerza de 75 libras. La dirección de la fuerza es de 30° sobre la horizontal. Encontrar el trabajo realizado.

En los ejercicios 29 a 38, sea $\mathbf{u} = \langle 3, -2, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, -4, -3\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle -1, 2, 2\rangle$.

29. Probar que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2$.

30. Hallar el ángulo entre **u** y **v**.

31. Determinar la proyección de **w** sobre **u**.

32. Calcular el trabajo realizado al mover un objeto a lo largo del vector **u** si la fuerza aplicada es **w**.

33. Determinar un vector unitario perpendicular al plano que contiene a **v** y a **w**.

34. Mostrar que $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$.

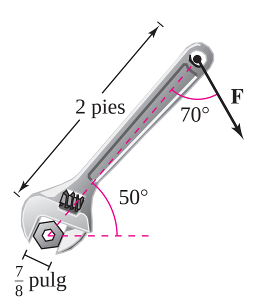
35. Calcular el volumen del sólido cuyas aristas son **u**, **v** y **w**.

36. Mostrar que $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$.

37. Calcular el área del paralelogramo con lados adyacentes **u** y **v**.

38. Calcular el área del triángulo con lados adyacentes **v** y **w**.

39. ***Momento*** Las especificaciones para un tractor establecen que el momento en un perno con tamaño de cabeza de $\frac{7}{8}$ de pulgada no puede exceder 200 pies-libras. Determinar la fuerza máxima $\|\mathbf{F}\|$ que puede aplicarse a la llave de la figura.



40. ***Volumen*** Usar el producto escalar triple para encontrar el volumen del paralelepípedo que tiene aristas adyacentes $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{w} = -\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

En los ejercicios 41 y 42, hallar el conjunto de *a*) ecuaciones paramétricas y *b*) ecuaciones simétricas de la recta a través de los dos puntos. (Para cada recta, dar los números directores como enteros.)

41. $(3, 0, 2)$, $(9, 11, 6)$

42. $(-1, 4, 3)$, $(8, 10, 5)$

En los ejercicios 43 a 46, *a*) hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta, *b*) encontrar un conjunto de ecuaciones simétricas para la recta y *c*) dibujar una gráfica de la recta.

43. La recta pasa por el punto $(1, 2, 3)$ y es perpendicular al plano xz.

44. La recta pasa por el punto $(1, 2, 3)$ y es paralela a la recta dada por $x = y = z$.

45. La intersección de los planos $3x - 3y - 7z = -4$ y $x - y + 2z = 3$

46. La recta pasa por el punto $(0, 1, 4)$ y es perpendicular a $\mathbf{u} = \langle 2, -5, 1\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -3, 1, 4\rangle$.

En los ejercicios 47 a 50, encontrar una ecuación del plano.

47. El plano pasa por

$(-3, -4, 2)$, $(-3, 4, 1)$ y $(1, 1, -2)$.

48. El plano pasa por el punto $(-2, 3, 1)$ y es perpendicular a $\mathbf{n} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

49. El plano contiene las rectas dadas por

$$\frac{x-1}{-2} = y = z + 1$$

y

$$\frac{x+1}{-2} = y - 1 = z - 2.$$

50. El plano pasa por los puntos $(5, 1, 3)$ y $(2, -2, 1)$ y es perpendicular al plano $2x + y - z = 4$.

51. Hallar la distancia del punto $(1, 0, 2)$ al plano $2x - 3y + 6z = 6$.

52. Hallar la distancia del punto $(3, -2, 4)$ al plano $2x - 5y + z = 10$.

53. Hallar la distancia de los planos $5x - 3y + z = 2$ y $5x - 3y + z = -3$.

54. Hallar la distancia del punto $(-5, 1, 3)$ a la recta dada por $x = 1 + t$, $y = 3 - 2t$ y $z = 5 - t$.

En los ejercicios 55 a 64, describir y dibujar la superficie.

55. $x + 2y + 3z = 6$

56. $y = z^2$

57. $y = \frac{1}{2}z$

58. $y = \cos z$

59. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} + z^2 = 1$

60. $16x^2 + 16y^2 - 9z^2 = 0$

61. $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} + z^2 = -1$

62. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{100} = 1$

63. $x^2 + z^2 = 4$

64. $y^2 + z^2 = 16$

65. Hallar una ecuación de una directriz de la superficie de revolución $y^2 + z^2 - 4x = 0$.

66. Encontrar una ecuación de la curva generadora de la superficie de revolución $x^2 + 2y^2 + z^2 = 3y$.

67. Determinar una ecuación para la superficie de revolución generada al rotar la curva $z^2 = 2y$ en el plano yz alrededor del eje y.

68. Encontrar una ecuación para la superficie de revolución generada al rotar la curva $2x + 3z = 1$ en el plano xz alrededor del eje x.

En los ejercicios 69 y 70, convertir las coordenadas rectangulares del punto a *a*) coordenadas cilíndricas y *b*) coordenadas esféricas.

69. $\left(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 2\right)$

70. $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

En los ejercicios 71 y 72, convertir las coordenadas cilíndricas del punto en coordenadas esféricas.

71. $\left(100, -\dfrac{\pi}{6}, 50\right)$

72. $\left(81, -\dfrac{5\pi}{6}, 27\sqrt{3}\right)$

En los ejercicios 73 y 74, convertir las coordenadas esféricas del punto en coordenadas cilíndricas.

73. $\left(25, -\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$

74. $\left(12, -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{2\pi}{3}\right)$

En los ejercicios 75 y 76, convertir la ecuación rectangular a una ecuación en *a*) coordenadas cilíndricas y *b*) coordenadas esféricas.

75. $x^2 - y^2 = 2z$

76. $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

En los ejercicios 77 y 78, expresar en coordenadas rectangulares la ecuación dada en coordenadas cilíndricas y dibujar su gráfica.

77. $r = 5 \cos \theta$

78. $z = 4$

En los ejercicios 79 y 80, expresar en coordenadas rectangulares la ecuación dada en coordenadas esféricas y dibujar su gráfica.

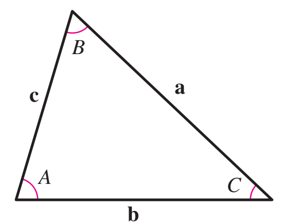
79. $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

80. $\rho = 3 \cos \phi$

SP Solución de problemas

1. Utilizando vectores, demostrar la ley de los senos: Si **a**, **b** y **c** son los tres lados del triángulo de la figura, entonces

$$\frac{\text{sen } A}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{\text{sen } B}{\|\mathbf{b}\|} = \frac{\text{sen } C}{\|\mathbf{c}\|}.$$



2. Considerar la función $f(x) = \int_0^x \sqrt{t^4 + 1}\, dt$.

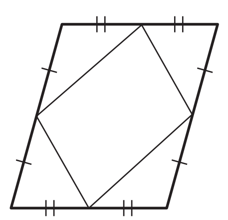
a) Usar una herramienta de graficación para representar la función en el intervalo $-2 \le x \le 2$.

b) Hallar un vector unitario paralelo a la gráfica de f en el punto (0, 0).

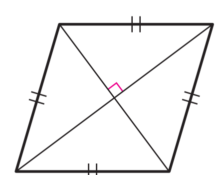
c) Hallar un vector unitario perpendicular a la gráfica de f en el punto (0, 0).

d) Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la gráfica de f en el punto (0, 0).

3. Utilizando vectores, demostrar que los segmentos de recta que unen los puntos medios de los lados de un paralelogramo forman un paralelogramo (ver la figura).



4. Utilizando vectores, demostrar que las diagonales de un rombo son perpendiculares (ver la figura).



5. *a*) Hallar la distancia más corta entre el punto $Q(2, 0, 0)$ y la recta determinada por los puntos $P_1(0, 0, 1)$ y $P_2(0, 1, 2)$.

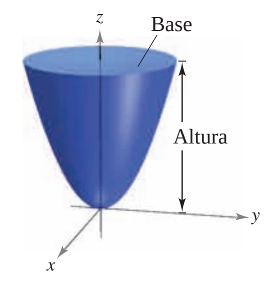
b) Hallar la distancia más corta entre el punto $Q(2, 0, 0)$ y el segmento de recta que une los puntos $P_1(0, 0, 1)$ y $P_2(0, 1, 2)$.

6. Sea P_0 un punto en el plano con vector normal **n**. Describir el conjunto de puntos P en el plano para los que $(\mathbf{n} + \overrightarrow{PP_0})$ es el ortogonal a $(\mathbf{n} - \overrightarrow{PP_0})$.

7. *a*) Hallar el volumen del sólido limitado abajo por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y arriba por el plano $z = 1$.

b) Hallar el volumen del sólido limitado abajo por el paraboloide elíptico $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ y arriba por el plano $z = k$, donde $k > 0$.

c) Mostrar que el volumen del sólido del inciso *b*) es igual a la mitad del producto del área de la base por la altura (ver la figura).



8. *a*) Usar el método de los discos para encontrar el volumen de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

b) Hallar el volumen del elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

9. Dibujar la gráfica de cada ecuación dada en coordenadas esféricas.

a) $\rho = 2 \text{ sen } \phi$

b) $\rho = 2 \cos \phi$

10. Dibujar la gráfica de cada ecuación dada en coordenadas cilíndricas.

a) $r = 2 \cos \theta$

b) $z = r^2 \cos 2\theta$

11. Demostrar la propiedad siguiente del producto vectorial.

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times (\mathbf{w} \times \mathbf{z}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{z})\mathbf{w} - (\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{z}$$



12. Considerar la recta dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = -t + 3, \quad y = \tfrac{1}{2}t + 1, \quad z = 2t - 1$$

y el punto $(4, 3, s)$ para todo número real s.

a) Dar la distancia entre el punto y la recta como una función de s.

b) Usar una herramienta de graficación para representar la función del inciso *a*). Usar la gráfica para encontrar un valor de s tal que la distancia entre el punto y la recta sea mínima.

c) Usar el *zoom* de una herramienta de graficación para amplificar varias veces la gráfica del inciso *b*). ¿Parece que la gráfica tenga asíntotas oblicuas? Explicar. Si parece tener asíntotas oblicuas, encontrarlas.

13. Una pelota que pesa 1 libra sujetada por una cuerda a un poste es lanzada en dirección opuesta al poste por una fuerza horizontal **u** que hace que la cuerda forme un ángulo de θ grados con el poste (ver la figura).

a) Determinar la tensión resultante en la cuerda y la magnitud de **u** cuando $\theta = 30°$.

b) Dar la tensión T de la cuerda y la magnitud de **u** como funciones de θ. Determinar los dominios de las funciones.

c) Usar una herramienta de graficación para completar la tabla.

θ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
T							
$\|\mathbf{u}\|$							

d) Usar una herramienta de graficación para representar las dos funciones para $0° \leq \theta \leq 60°$.

e) Comparar T y $\|\mathbf{u}\|$ a medida que θ se aumenta.

f) Hallar (si es posible) $\lim_{\theta \to \pi/2^-} T$ y $\lim_{\theta \to \pi/2^-} \|\mathbf{u}\|$. ¿Son los resultados lo que se esperaba? Explicar.

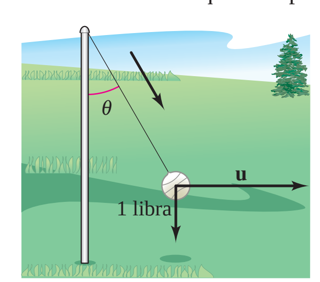


Figura para 13

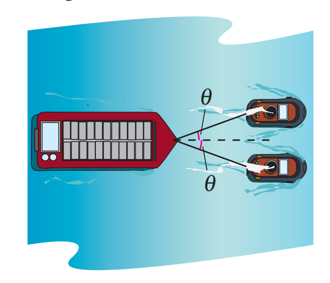


Figura para 14



14. Una barcaza cargada es remolcada por dos lanchas remolcadoras, y la magnitud de la resultante es de 6 000 libras dirigidas a lo largo del eje de la barcaza (ver la figura). Cada cuerda de remolque forma un ángulo de θ grados con el eje de la barcaza.

a) Hallar la tensión de las cuerdas del remolque si $\theta = 20°$.

b) Dar la tensión T en cada cuerda como una función de θ. Determinar el dominio de la función.

c) Usar una herramienta de graficación para completar la tabla.

θ	10°	20°	30°	40°	50°	60°
T						

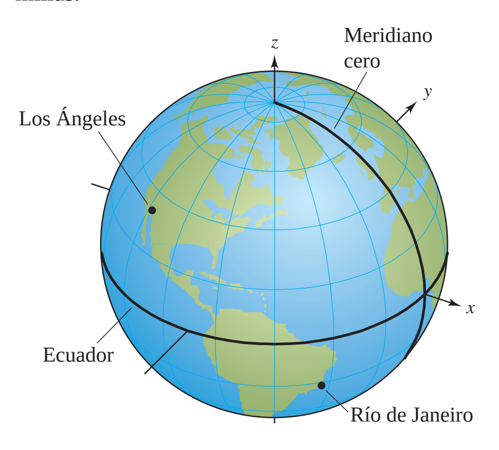
d) Usar una herramienta de graficación para representar la función tensión.

e) Explicar por qué la tensión aumenta a medida que θ aumenta.

15. Considerar los vectores $\mathbf{u} = \langle \cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha, 0 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle \cos \beta, \operatorname{sen} \beta, 0 \rangle$, donde $\alpha > \beta$. Hallar el producto vectorial de los vectores y usar el resultado para demostrar la identidad

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta.$$

16. Los Ángeles se localiza a 34.05° de latitud Norte y 118.24° de longitud Oeste, y Río de Janeiro, Brasil, se localiza a 22.90° de latitud Sur y 43.23° de longitud Oeste (ver la figura). Suponer que la Tierra es esférica y tiene un radio de 4 000 millas.



a) Hallar las coordenadas esféricas para la ubicación de cada ciudad.

b) Hallar las coordenadas rectangulares para la ubicación de cada ciudad.

c) Hallar el ángulo (en radianes) entre los vectores del centro de la Tierra a cada ciudad.

d) Hallar la distancia s del círculo máximo entre las ciudades. (*Sugerencia*: $s = r\theta$.)

e) Repetir los incisos *a*) a *d*) con las ciudades de Boston, localizada a 42.36° latitud Norte y 71.06° longitud Oeste, y Honolulu, localizada a 21.31° latitud Norte y 157.86° longitud Oeste.

17. Considerar el plano que pasa por los puntos P, R y S. Mostrar que la distancia de un punto Q a este plano es

$$\text{Distancia} = \frac{|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|}$$

donde $\mathbf{u} = \overrightarrow{PR}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{PS}$ y $\mathbf{w} = \overrightarrow{PQ}$.

18. Mostrar que la distancia entre los planos paralelos $ax + by + cz + d_1 = 0$ y $ax + by + cz + d_2 = 0$ es

$$\text{Distancia} = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

19. Mostrar que la curva de intersección del plano $z = 2y$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ es una elipse.

20. Leer el artículo "Tooth Tables: Solution of a Dental Problem by Vector Algebra" de Gary Hosler Meisters en *Mathematics Magazine*.



12 Funciones vectoriales

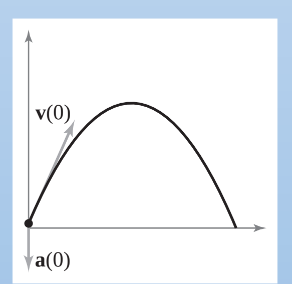
En este capítulo se introduce el concepto de funciones vectoriales. También pueden emplearse para estudiar curvas en el plano y en el espacio. Esas funciones también pueden usarse para estudiar el movimiento de un objeto a lo largo de una curva.

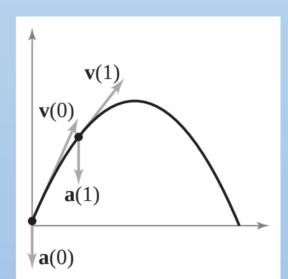
En este capítulo, se aprenderá:

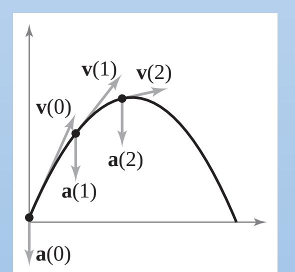
- Cómo analizar y bosquejar una curva en el espacio representada por una función vectorial. Cómo aplicar los conceptos de límites y continuidad a las funciones vectoriales. (12.1)
- Cómo derivar e integrar funciones vectoriales. (12.2)
- Cómo describir la velocidad y aceleración asociada con una función vectorial y cómo usar una función vectorial para analizar el movimiento de proyectiles. (12.3)
- Cómo encontrar vectores tangentes y vectores normales. (12.4)
- Cómo encontrar la longitud de arco y la curvatura de una curva. (12.5)

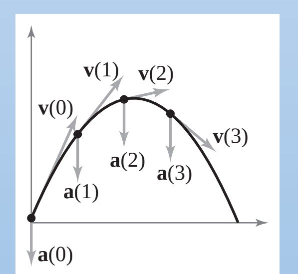


Una rueda de la fortuna está construida usando los principios básicos de una bicicleta. Se puede usar una función vectorial para analizar el movimiento de una rueda de la fortuna, incluidas su posición y velocidad. (Ver solución de problemas, ejercicio 14.)









Una *función vectorial* mapea números reales a vectores. Se puede usar una función vectorial para representar el movimiento de una partícula a lo largo de una curva. En la sección 12.3 se usarán la primera y segunda derivadas de un vector de posición para encontrar la velocidad y aceleración de una partícula.

12.1 Funciones vectoriales

- **Analizar y dibujar una curva en el espacio dada por una función vectorial.**
- **Extender los conceptos de límite y continuidad a funciones vectoriales.**

Curvas en el espacio y funciones vectoriales

En la sección 10.2 se definió una *curva plana* como un conjunto de pares ordenados $(f(t), g(t))$ junto con sus ecuaciones paramétricas

$$x = f(t) \qquad \text{y} \qquad y = g(t)$$

donde f y g son funciones continuas de t en un intervalo I. Esta definición puede extenderse de manera natural al espacio tridimensional como sigue. Una **curva en el espacio C** es un conjunto de todas las ternas ordenadas $(f(t), g(t), h(t))$ junto con sus ecuaciones paramétricas

$$x = f(t), \qquad y = g(t) \qquad \text{y} \qquad z = h(t)$$

donde f, g y h son funciones continuas de t en un intervalo I.

Antes de ver ejemplos de curvas en el espacio, se introduce un nuevo tipo de función, llamada **función vectorial**. Este tipo de función asigna vectores a números reales.

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN VECTORIAL

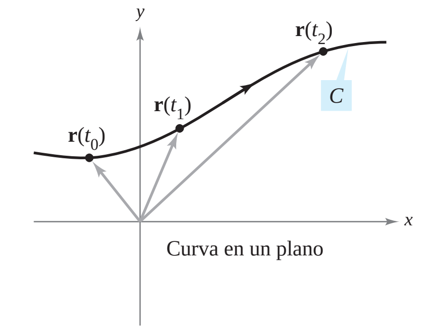
Una función de la forma

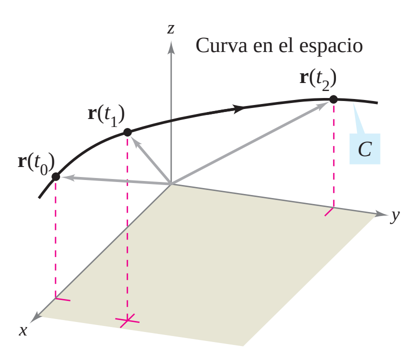
$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} \qquad \text{Plano.}$$

o

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k} \qquad \text{Espacio.}$$

es una **función vectorial**, donde las **funciones componentes** f, g y h son funciones del parámetro t. Algunas veces, las funciones vectoriales se denotan como $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t)\rangle$ o $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle$.





La curva C es trazada por el punto final del vector posición $\mathbf{r}(t)$

Figura 12.1

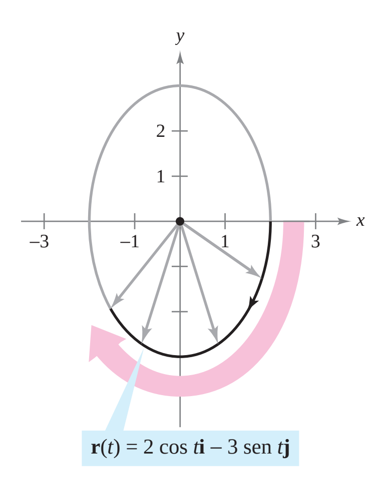
Técnicamente, una curva en el plano o en el espacio consiste en una colección de puntos y ecuaciones paramétricas que la definen. Dos curvas diferentes pueden tener la misma gráfica. Por ejemplo, cada una de las curvas dadas por

$$\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + \cos t\, \mathbf{j} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t^2\, \mathbf{i} + \cos t^2\, \mathbf{j}$$

tiene como gráfica el círculo unidad o unitario, pero estas ecuaciones no representan la misma curva porque el círculo está trazado de diferentes maneras.

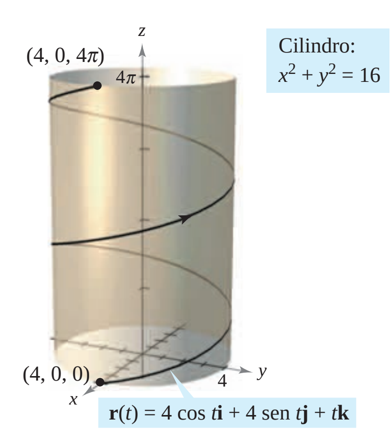
Es importante asegurarse de ver la diferencia entre la función vectorial $\mathbf{r}$ y las funciones reales f, g y h. Todas son funciones de la variable real t, pero $\mathbf{r}(t)$ es un vector, mientras que $f(t)$, $g(t)$ y $h(t)$ son números reales (para cada valor específico de t).

Las funciones vectoriales juegan un doble papel en la representación de curvas. Tomando como parámetro t, que representa el tiempo, se puede usar una función vectorial para representar el *movimiento* a lo largo de una curva. O, en el caso más general, se puede usar una función vectorial para *trazar la gráfica* de una curva. En ambos casos, el punto final del vector posición $\mathbf{r}(t)$ coincide con el punto (x, y) o (x, y, z) de la curva dada por las ecuaciones paramétricas, como se muestra en la figura 12.1. La punta de flecha en la curva indica la *orientación* de la curva apuntando en la dirección de valores crecientes de t.



La elipse es trazada en el sentido de las manecillas del reloj a medida que t aumenta de 0 a 2π

Figura 12.2



A medida que t crece de 0 a 4π, se describen dos espirales sobre la hélice

Figura 12.3

A menos que se especifique otra cosa, se considera que el **dominio** de una función vectorial **r** es la intersección de los dominios de las funciones componentes f, g y h. Por ejemplo, el dominio de $\mathbf{r}(t) = \ln t\,\mathbf{i} + \sqrt{1-t}\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ es el intervalo $(0, 1]$.

EJEMPLO 1 Trazado de una curva plana

Dibujar la curva plana representada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} - 3\,\text{sen}\,t\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$ Función vectorial.

Solución A partir del vector de posición $\mathbf{r}(t)$, se pueden dar las ecuaciones paramétricas $x = 2 \cos t$ y $y = -3 \text{ sen } t$. Despejando $\cos t$ y $\text{sen } t$ y utilizando la identidad $\cos^2 t + \text{sen}^2 t = 1$ se obtiene la ecuación rectangular

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1.$$ Ecuación rectangular.

La gráfica de esta ecuación rectangular es la elipse mostrada en la figura 12.2. La curva está orientada en el *sentido de las manecillas del reloj*. Es decir, cuando t aumenta de 0 a 2π, el vector de posición $\mathbf{r}(t)$ se mueve en el sentido de las manecillas del reloj, y sus puntos finales describen la elipse.

EJEMPLO 2 Trazado de una curva en el espacio

Dibujar la curva en el espacio representada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = 4\cos t\mathbf{i} + 4\,\text{sen}\,t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 4\pi.$$ Función vectorial.

Solución De las dos primeras ecuaciones paramétricas $x = 4\cos t$ y $y = 4 \text{ sen } t$, se obtiene

$$x^2 + y^2 = 16.$$ Ecuación rectangular.

Esto significa que la curva se encuentra en un cilindro circular recto de radio 4, centrado en el eje z. Para localizar en este cilindro la curva, se usa la tercera ecuación paramétrica $z = t$. En la figura 12.3, nótese que a medida que t crece de 0 a 4π, el punto (x, y, z) sube en espiral por el cilindro describiendo una **hélice**. Un ejemplo de una hélice de la vida real se muestra en el dibujo inferior de la izquierda.



En 1953 Francis Crick y James D. Watson descubrieron la estructura de doble hélice del ADN.

En los ejemplos 1 y 2 se dio una función vectorial y se pidió dibujar la curva correspondiente. Los dos ejemplos siguientes se refieren a la situación inversa: hallar una función vectorial para representar una gráfica dada. Claro está que si la gráfica se da en forma paramétrica, su representación por medio de una función vectorial es inmediata. Por ejemplo, para representar en el espacio la recta dada por

$$x = 2 + t, \quad y = 3t \quad \text{y} \quad z = 4 - t$$

se usa simplemente la función vectorial dada por

$$\mathbf{r}(t) = (2 + t)\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + (4 - t)\mathbf{k}.$$

Si no se da un conjunto de ecuaciones paramétricas para la gráfica, el problema de representar la gráfica mediante una función vectorial se reduce a hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas.

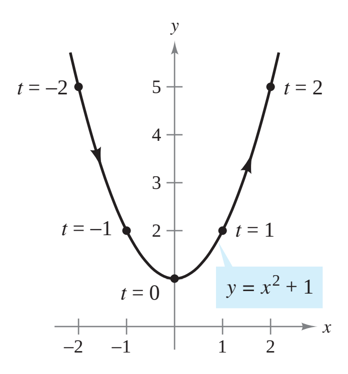
EJEMPLO 3 Representación de una gráfica mediante una función vectorial

Representar la parábola $y = x^2 + 1$ mediante una función vectorial.

Solución Aunque hay muchas maneras de elegir el parámetro t, una opción natural es tomar $x = t$. Entonces $y = t^2 + 1$ y se tiene

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (t^2 + 1)\mathbf{j}.$$ Función vectorial.

Nótese en la figura 12.4 la orientación obtenida con esta elección particular de parámetro. Si se hubiera elegido como parámetro $x = -t$, la curva hubiera estado orientada en dirección opuesta.



Hay muchas maneras de parametrizar esta gráfica. Una de ellas es tomar $x = t$
Figura 12.4

EJEMPLO 4 Representación de una gráfica mediante una función vectorial

Dibujar la gráfica C representada por la intersección del semielipsoide

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{24} + \frac{z^2}{4} = 1, \quad z \geq 0$$

y el cilindro parabólico $y = x^2$. Después, hallar una función vectorial que represente la gráfica.

Solución En la figura 12.5 se muestra la intersección de las dos superficies. Como en el ejemplo 3, una opción natural para el parámetro es $x = t$. Con esta opción, se usa la ecuación dada $y = x^2$ para obtener $y = t^2$. Entonces

$$\frac{z^2}{4} = 1 - \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{24} = 1 - \frac{t^2}{12} - \frac{t^4}{24} = \frac{24 - 2t^2 - t^4}{24} = \frac{(6 + t^2)(4 - t^2)}{24}.$$

NOTA Las curvas en el espacio pueden especificarse de varias maneras. Por ejemplo, la curva del ejemplo 4 se describe como la intersección de dos superficies en el espacio. ■

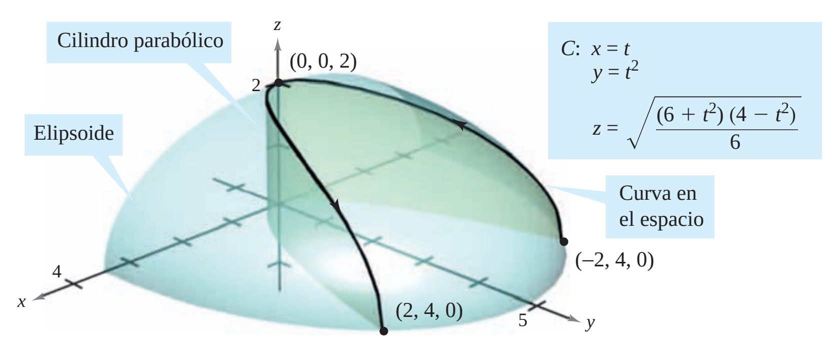
Como la curva se encuentra sobre el plano xy, hay que elegir para z la raíz cuadrada positiva. Así se obtienen las ecuaciones paramétricas siguientes.

$$x = t, \quad y = t^2 \qquad \text{y} \qquad z = \sqrt{\frac{(6 + t^2)(4 - t^2)}{6}}$$

La función vectorial resultante es

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \sqrt{\frac{(6 + t^2)(4 - t^2)}{6}}\,\mathbf{k}, \quad -2 \leq t \leq 2.$$ Función vectorial.

(Obsérvese que el componente $\mathbf{k}$ de $\mathbf{r}(t)$ implica $-2 \leq t \leq 2$.) De los puntos $(-2, 4, 0)$ y $(2, 4, 0)$ que se muestran en la figura 12.5, se ve que la curva es trazada a medida que t crece de -2 a 2.



La curva C es la intersección del semielipsoide y el cilindro parabólico
Figura 12.5

Límites y continuidad

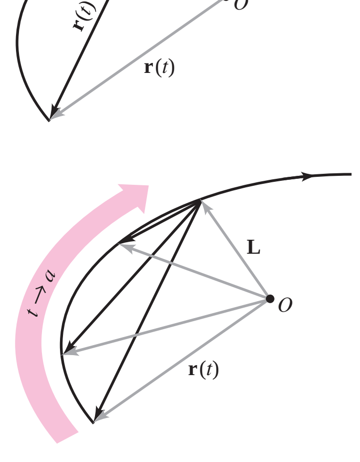
Muchas de las técnicas y definiciones utilizadas en el cálculo de funciones reales se pueden aplicar a funciones vectoriales. Por ejemplo, las funciones vectoriales se pueden sumar y restar, multiplicar por un escalar, tomar su límite, derivarlas, y así sucesivamente. La estrategia básica consiste en aprovechar la linealidad de las operaciones vectoriales y extender las definiciones en una base, componente por componente. Por ejemplo, para sumar o restar dos funciones vectoriales (en el plano), se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t) &= [f_1(t)\mathbf{i} + g_1(t)\mathbf{j}] + [f_2(t)\mathbf{i} + g_2(t)\mathbf{j}] \qquad \text{Suma.}\\ &= [f_1(t) + f_2(t)]\mathbf{i} + [g_1(t) + g_2(t)]\mathbf{j}\\ \mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t) &= [f_1(t)\mathbf{i} + g_1(t)\mathbf{j}] - [f_2(t)\mathbf{i} + g_2(t)\mathbf{j}] \qquad \text{Resta.}\\ &= [f_1(t) - f_2(t)]\mathbf{i} + [g_1(t) - g_2(t)]\mathbf{j}.\end{aligned}$$

De manera similar, para multiplicar y dividir una función vectorial por un escalar se tiene

$$\begin{aligned}c\mathbf{r}(t) &= c[f_1(t)\mathbf{i} + g_1(t)\mathbf{j}] \qquad \text{Multiplicación escalar.}\\ &= cf_1(t)\mathbf{i} + cg_1(t)\mathbf{j}\\ \frac{\mathbf{r}(t)}{c} &= \frac{[f_1(t)\mathbf{i} + g_1(t)\mathbf{j}]}{c}, \quad c \neq 0 \qquad \text{División escalar.}\\ &= \frac{f_1(t)}{c}\mathbf{i} + \frac{g_1(t)}{c}\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Esta extensión, componente por componente, de las operaciones con funciones reales a funciones vectoriales se ilustra más ampliamente en la definición siguiente del límite de una función vectorial.



A medida que t tiende a a, $\mathbf{r}(t)$ tiende al límite $\mathbf{L}$. Para que el límite $\mathbf{L}$ exista, no es necesario que $\mathbf{r}(a)$ esté definida o que $\mathbf{r}(a)$ sea igual a $\mathbf{L}$
Figura 12.6

DEFINICIÓN DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

1. Si $\mathbf{r}$ es una función vectorial tal que $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, entonces

$$\lim_{t\to a} \mathbf{r}(t) = \left[\lim_{t\to a} f(t)\right]\mathbf{i} + \left[\lim_{t\to a} g(t)\right]\mathbf{j} \qquad \text{Plano.}$$

siempre que existan los límites de f y g cuando $t \to a$.

2. Si $\mathbf{r}$ es una función vectorial tal que $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, entonces

$$\lim_{t\to a} \mathbf{r}(t) = \left[\lim_{t\to a} f(t)\right]\mathbf{i} + \left[\lim_{t\to a} g(t)\right]\mathbf{j} + \left[\lim_{t\to a} h(t)\right]\mathbf{k} \qquad \text{Espacio.}$$

siempre que existan los límites de f, g y h cuando $t \to a$.

Si $\mathbf{r}(t)$ tiende al vector $\mathbf{L}$ cuando $t \to a$, la longitud del vector $\mathbf{r}(t) - \mathbf{L}$ tiende a 0. Es decir,

$$\|\mathbf{r}(t) - \mathbf{L}\| \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad t \to a.$$

Esto se ilustra de manera gráfica en la figura 12.6. Con esta definición del límite de una función vectorial, se pueden desarrollar versiones vectoriales de la mayor parte de los teoremas del límite dados en el capítulo 1. Por ejemplo, el límite de la suma de dos funciones vectoriales es la suma de sus límites individuales. También, se puede usar la orientación de la curva $\mathbf{r}(t)$ para definir límites unilaterales de funciones vectoriales. La definición siguiente extiende la noción de continuidad a funciones vectoriales.

DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

Una función vectorial $\mathbf{r}$ es **continua en un punto** dado por $t = a$ si el límite de $\mathbf{r}(t)$ cuando $t \to a$ existe y

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a).$$

Una función vectorial $\mathbf{r}$ es **continua en un intervalo** I si es continua en todos los puntos del intervalo.

De acuerdo con esta definición, una función vectorial es continua en $t = a$ si y sólo si cada una de sus funciones componentes es continua en $t = a$.

EJEMPLO 5 Continuidad de funciones vectoriales

Analizar la continuidad de la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + a\mathbf{j} + (a^2 - t^2)\mathbf{k}$$ *a es una constante.*

cuando $t = 0$.

Solución Cuando t tiende a 0, el límite es

$$\begin{aligned}\lim_{t \to 0} \mathbf{r}(t) &= \left[\lim_{t \to 0} t\right]\mathbf{i} + \left[\lim_{t \to 0} a\right]\mathbf{j} + \left[\lim_{t \to 0} (a^2 - t^2)\right]\mathbf{k} \\ &= 0\mathbf{i} + a\mathbf{j} + a^2\mathbf{k} \\ &= a\mathbf{j} + a^2\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(0) &= (0)\mathbf{i} + (a)\mathbf{j} + (a^2)\mathbf{k} \\ &= a\mathbf{j} + a^2\mathbf{k}\end{aligned}$$

se concluye que $\mathbf{r}$ es continua en $t = 0$. Mediante un razonamiento similar, se concluye que la función vectorial $\mathbf{r}$ es continua en todo valor real de t.

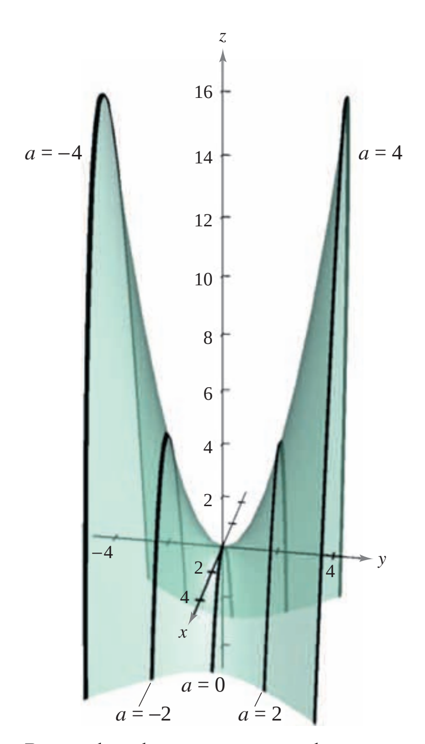
Para cada a, la curva representada por la función vectorial del ejemplo 5,

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + a\mathbf{j} + (a^2 - t^2)\mathbf{k}$$ *a es una constante.*

es una parábola. Uno se puede imaginar cada una de estas parábolas como la intersección del plano vertical $y = a$ con el paraboloide hiperbólico

$$y^2 - x^2 = z$$

como se muestra en la figura 12.7.



Para todo a, la curva representada por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + a\mathbf{j} + (a^2 - t^2)\mathbf{k}$ es una parábola
Figura 12.7

TECNOLOGÍA Casi cualquier tipo de dibujo tridimensional es difícil hacerlo a mano, pero trazar curvas en el espacio es especialmente difícil. El problema consiste en crear la impresión de tres dimensiones. Las herramientas de graficación usan diversas técnicas para dar la "impresión de tres dimensiones" en gráficas de curvas en el espacio: una manera es mostrar la curva en una superficie, como en la figura 12.7.

12.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 8, hallar el dominio de la función vectorial.

1. $\mathbf{r}(t) = \dfrac{1}{t+1}\mathbf{i} + \dfrac{t}{2}\mathbf{j} - 3t\mathbf{k}$

2. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{4-t^2}\,\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} - 6t\mathbf{k}$

3. $\mathbf{r}(t) = \ln t\,\mathbf{i} - e^t\,\mathbf{j} - t\mathbf{k}$

4. $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + 4\cos t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

5. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{F}(t) + \mathbf{G}(t)$ donde

$\mathbf{F}(t) = \cos t\,\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \sqrt{t}\,\mathbf{k}, \quad \mathbf{G}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$

6. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{F}(t) - \mathbf{G}(t)$ donde

$\mathbf{F}(t) = \ln t\,\mathbf{i} + 5t\mathbf{j} - 3t^2\mathbf{k}, \quad \mathbf{G}(t) = \mathbf{i} + 4t\mathbf{j} - 3t^2\mathbf{k}$

7. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{F}(t) \times \mathbf{G}(t)$ donde

$\mathbf{F}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}, \quad \mathbf{G}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \cos t\,\mathbf{k}$

8. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{F}(t) \times \mathbf{G}(t)$ donde

$\mathbf{F}(t) = t^3\mathbf{i} - t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad \mathbf{G}(t) = \sqrt[3]{t}\,\mathbf{i} + \dfrac{1}{t+1}\mathbf{j} + (t+2)\mathbf{k}$

En los ejercicios 9 a 12, evaluar (si es posible) la función vectorial en cada valor dado de *t*.

9. $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}t^2\mathbf{i} - (t-1)\mathbf{j}$

a) $\mathbf{r}(1)$ *b)* $\mathbf{r}(0)$ *c)* $\mathbf{r}(s+1)$

d) $\mathbf{r}(2+\Delta t) - \mathbf{r}(2)$

10. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$

a) $\mathbf{r}(0)$ *b)* $\mathbf{r}(\pi/4)$ *c)* $\mathbf{r}(\theta - \pi)$

d) $\mathbf{r}(\pi/6 + \Delta t) - \mathbf{r}(\pi/6)$

11. $\mathbf{r}(t) = \ln t\,\mathbf{i} + \dfrac{1}{t}\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$

a) $\mathbf{r}(2)$ *b)* $\mathbf{r}(-3)$ *c)* $\mathbf{r}(t-4)$

d) $\mathbf{r}(1+\Delta t) - \mathbf{r}(1)$

12. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\,\mathbf{i} + t^{3/2}\,\mathbf{j} + e^{-t/4}\mathbf{k}$

a) $\mathbf{r}(0)$ *b)* $\mathbf{r}(4)$ *c)* $\mathbf{r}(c+2)$

d) $\mathbf{r}(9+\Delta t) - \mathbf{r}(9)$

En los ejercicios 13 y 14, hallar $\|\mathbf{r}(t)\|$.

14. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\,\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} - 4t\mathbf{k}$

13. $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} 3t\,\mathbf{i} + \cos 3t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

En los ejercicios 15 a 18, representar el segmento de recta desde *P* hasta *Q* mediante una función vectorial y mediante un conjunto de ecuaciones paramétricas.

15. $P\,(0, 0, 0),\ Q\,(3, 1, 2)$

16. $P\,(0, 2, -1),\ Q\,(4, 7, 2)$

17. $P\,(-2, 5, -3),\ Q\,(-1, 4, 9)$

18. $P\,(1, -6, 8),\ Q\,(-3, -2, 5)$

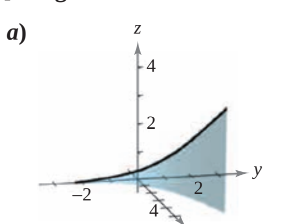
Para pensar **En los ejercicios 19 y 20, hallar $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)$. ¿Es el resultado una función vectorial? Explicar.**

19. $\mathbf{r}(t) = (3t-1)\mathbf{i} + \frac{1}{4}t^3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}, \quad \mathbf{u}(t) = t^2\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$

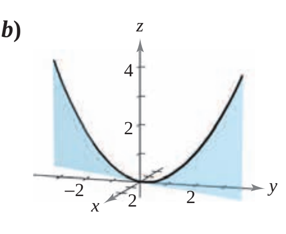
20. $\mathbf{r}(t) = \langle 3\cos t, 2\operatorname{sen} t, t-2\rangle, \quad \mathbf{u}(t) = \langle 4\operatorname{sen} t, -6\cos t, t^2\rangle$

En los ejercicios 21 a 24, asociar cada ecuación con su gráfica. [Las gráficas están marcadas *a*), *b*), *c*) y *d*).]

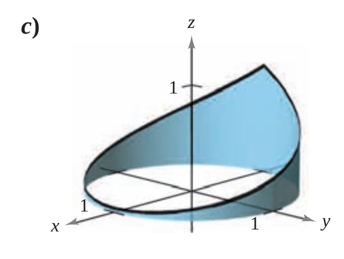
a)



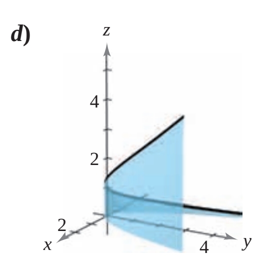
b)



c)



d)



21. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad -2 \le t \le 2$

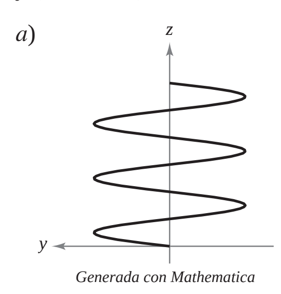
22. $\mathbf{r}(t) = \cos(\pi t)\mathbf{i} + \operatorname{sen}(\pi t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad -1 \le t \le 1$

23. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + e^{0.75t}\,\mathbf{k}, \quad -2 \le t \le 2$

24. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \ln t\,\mathbf{j} + \dfrac{2t}{3}\mathbf{k}, \quad 0.1 \le t \le 5$

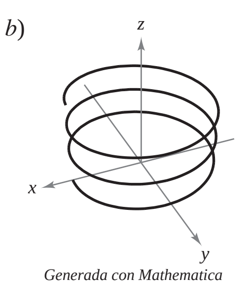
25. ***Para pensar*** Las cuatro figuras siguientes son gráficas de la función vectorial $\mathbf{r}(t) = 4\cos t\,\mathbf{i} + 4\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \dfrac{t}{4}\mathbf{k}$. Asociar cada una de las gráficas con el punto en el espacio desde el cual se ve la hélice. Los cuatro puntos son (0, 0, 20), (20, 0, 0), (−20, 0, 0) y (10, 20, 10).

a)



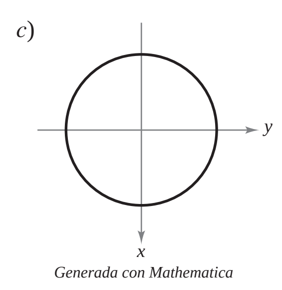
Generada con Mathematica

b)



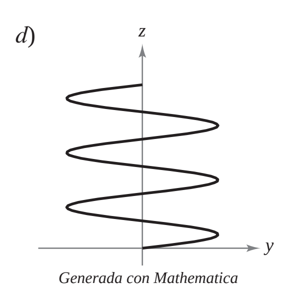
Generada con Mathematica

c)



Generada con Mathematica

d)



Generada con Mathematica

26. Dibujar tres gráficas de la función vectorial $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ vistas desde los puntos.

a) (0, 0, 20) *b)* (10, 0, 0) *c)* (5, 5, 5)

En los ejercicios 27 a 42, dibujar la curva representada por la función vectorial y dar la orientación de la curva.

27. $\mathbf{r}(t) = \frac{t}{4}\mathbf{i} + (t - 1)\mathbf{j}$

28. $\mathbf{r}(t) = (5 - t)\mathbf{i} + \sqrt{t}\,\mathbf{j}$

29. $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$

30. $\mathbf{r}(t) = (t^2 + t)\mathbf{i} + (t^2 - t)\mathbf{j}$

31. $\mathbf{r}(\theta) = \cos\theta\,\mathbf{i} + 3\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j}$

32. $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j}$

33. $\mathbf{r}(\theta) = 3\sec\theta\,\mathbf{i} + 2\tan\theta\,\mathbf{j}$

34. $\mathbf{r}(t) = 2\cos^3 t\,\mathbf{i} + 2\,\text{sen}^3\,t\,\mathbf{j}$

35. $\mathbf{r}(t) = (-t + 1)\mathbf{i} + (4t + 2)\mathbf{j} + (2t + 3)\mathbf{k}$

36. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (2t - 5)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$

37. $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

38. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 3\cos t\,\mathbf{j} + 3\,\text{sen}\,t\,\mathbf{k}$

39. $\mathbf{r}(t) = 2\,\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$

40. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + \frac{3}{2}t\mathbf{k}$

41. $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, \frac{2}{3}t^3\rangle$

42. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t + t\,\text{sen}\,t, \text{sen}\,t - t\cos t, t\rangle$

CAS **En los ejercicios 43 a 46, usar un sistema algebraico por computadora a fin de representar gráficamente la función vectorial e identificar la curva común.**

43. $\mathbf{r}(t) = -\frac{1}{2}t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} - \frac{\sqrt{3}}{2}t^2\mathbf{k}$

44. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}t^2\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}$

45. $\mathbf{r}(t) = \text{sen}\,t\,\mathbf{i} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t - \frac{1}{2}t\right)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{2}\cos t + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathbf{k}$

46. $\mathbf{r}(t) = -\sqrt{2}\,\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j} + \sqrt{2}\,\text{sen}\,t\,\mathbf{k}$

CAS ***Para pensar*** **En los ejercicios 47 y 48, usar un sistema algebraico por computadora a fin de representar gráficamente la función vectorial r(*t*). Para cada u(*t*), conjeturar sobre la transformación (si la hay) de la gráfica de r(*t*). Usar un sistema algebraico por computadora para verificar la conjetura.**

47. $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + \frac{1}{2}t\mathbf{k}$

a) $\mathbf{u}(t) = 2(\cos t - 1)\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + \frac{1}{2}t\mathbf{k}$

b) $\mathbf{u}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$

c) $\mathbf{u}(t) = 2\cos(-t)\mathbf{i} + 2\,\text{sen}(-t)\mathbf{j} + \frac{1}{2}(-t)\mathbf{k}$

d) $\mathbf{u}(t) = \frac{1}{2}t\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + 2\cos t\,\mathbf{k}$

e) $\mathbf{u}(t) = 6\cos t\,\mathbf{i} + 6\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + \frac{1}{2}t\mathbf{k}$

48. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^3\mathbf{k}$

a) $\mathbf{u}(t) = t\mathbf{i} + (t^2 - 2)\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^3\mathbf{k}$

b) $\mathbf{u}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^3\mathbf{k}$

c) $\mathbf{u}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \left(\frac{1}{2}t^3 + 4\right)\mathbf{k}$

d) $\mathbf{u}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{1}{8}t^3\mathbf{k}$

e) $\mathbf{u}(t) = (-t)\mathbf{i} + (-t)^2\mathbf{j} + \frac{1}{2}(-t)^3\mathbf{k}$

En los ejercicios 49 a 56, representar la curva plana por medio de una función vectorial. (Hay muchas respuestas correctas.)

49. $y = x + 5$

50. $2x - 3y + 5 = 0$

51. $y = (x - 2)^2$

52. $y = 4 - x^2$

53. $x^2 + y^2 = 25$

54. $(x - 2)^2 + y^2 = 4$

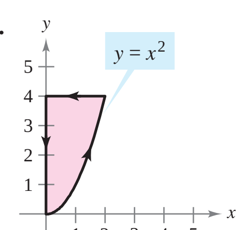
55. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$

56. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

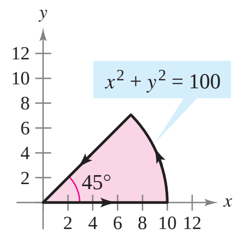
En los ejercicios 57 y 58, hallar funciones vectoriales que describan los límites de la región en la figura. Dar el intervalo correspondiente al parámetro de cada función.



57.



58.



En los ejercicios 59 a 66, dibujar la curva en el espacio representada por la intersección de las superficies. Después representar la curva por medio de una función vectorial usando el parámetro dado.

	Superficies	*Parámetro*
59.	$z = x^2 + y^2, \quad x + y = 0$	$x = t$
60.	$z = x^2 + y^2, \quad z = 4$	$x = 2\cos t$
61.	$x^2 + y^2 = 4, \quad z = x^2$	$x = 2\,\text{sen}\,t$
62.	$4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16, \quad x = z^2$	$z = t$
63.	$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x + z = 2$	$x = 1 + \text{sen}\,t$
64.	$x^2 + y^2 + z^2 = 10, \quad x + y = 4$	$x = 2 + \text{sen}\,t$
65.	$x^2 + z^2 = 4, \quad y^2 + z^2 = 4$	$x = t$ (primer octante)
66.	$x^2 + y^2 + z^2 = 16, \quad xy = 4$	$x = t$ (primer octante)

67. Mostrar que la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\cos t\,\mathbf{j} + 2t\,\text{sen}\,t\,\mathbf{k}$$

se encuentra en el cono $4x^2 = y^2 + z^2$. Dibujar la curva.

68. Mostrar que la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = e^{-t}\cos t\,\mathbf{i} + e^{-t}\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$$

se encuentra en el cono $z^2 = x^2 + y^2$. Dibujar la curva.

En los ejercicios 69 a 74, evaluar el límite.

69. $\lim_{t\to\pi} (t\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \text{sen}\,t\,\mathbf{k})$

70. $\lim_{t\to 2} \left(3t\mathbf{i} + \frac{2}{t^2 - 1}\mathbf{j} + \frac{1}{t}\mathbf{k}\right)$

71. $\lim_{t\to 0} \left(t^2\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + \frac{1 - \cos t}{t}\mathbf{k}\right)$

72. $\lim_{t\to 1} \left(\sqrt{t}\,\mathbf{i} + \frac{\ln t}{t^2 - 1}\mathbf{j} + \frac{1}{t - 1}\mathbf{k}\right)$

73. $\lim_{t\to 0} \left(e^t\mathbf{i} + \frac{\text{sen}\,t}{t}\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}\right)$

74. $\lim_{t\to\infty} \left(e^{-t}\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j} + \frac{t}{t^2 + 1}\mathbf{k}\right)$

En los ejercicios 75 a 80, determinar el (los) intervalo(s) en que la función vectorial es continua.

75. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \dfrac{1}{t}\mathbf{j}$

76. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\,\mathbf{i} + \sqrt{t-1}\,\mathbf{j}$

77. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \operatorname{arcsen} t\mathbf{j} + (t-1)\mathbf{k}$

78. $\mathbf{r}(t) = 2e^{-t}\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + \ln(t-1)\mathbf{k}$

79. $\mathbf{r}(t) = \langle e^{-t}, t^2, \tan t\rangle$

80. $\mathbf{r}(t) = \langle 8, \sqrt{t}, \sqrt[3]{t}\rangle$

Desarrollo de conceptos

81. Considerar la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (t-3)\mathbf{j} + t\mathbf{k}.$$

Dar una función vectorial $\mathbf{s}(t)$ que sea la transformación especificada de $\mathbf{r}$.

a) Una traslación vertical tres unidades hacia arriba

b) Una traslación horizontal dos unidades en dirección del eje x negativo

c) Una traslación horizontal cinco unidades en dirección del eje y positivo

82. Dar la definición de continuidad para una función vectorial. Dar un ejemplo de una función vectorial que esté definida pero no sea continua en $t = 2$.

CAS **83.** El borde exterior de una resbaladilla tiene forma de una hélice de 1.5 metros de radio. La resbaladilla tiene una altura de 2 metros y hace una revolución completa desde arriba hacia abajo. Encontrar una función vectorial para la hélice. Usar un sistema algebraico por computadora para graficar la función. (Existen muchas respuestas correctas.)

Para discusión

84. ¿Cuál de las siguientes funciones vectoriales representa la misma gráfica?

a) $\mathbf{r}(t) = (-3\cos t + 1)\mathbf{i} + (5\operatorname{sen} t + 2)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

b) $\mathbf{r}(t) = 4\mathbf{i} + (-3\cos t + 1)\mathbf{j} + (5\operatorname{sen} t + 2)\mathbf{k}$

c) $\mathbf{r}(t) = (3\cos t - 1)\mathbf{i} + (-5\operatorname{sen} t - 2)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

d) $\mathbf{r}(t) = (-3\cos 2t + 1)\mathbf{i} + (5\operatorname{sen} 2t + 2)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

85. Sean $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$ funciones vectoriales cuyos límites existen cuando $t \to c$. Demostrar que

$$\lim_{t\to c}[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}(t)] = \lim_{t\to c}\mathbf{r}(t) \times \lim_{t\to c}\mathbf{u}(t).$$

86. Sean $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$ funciones vectoriales cuyos límites existen cuando $t \to c$. Demostrar que

$$\lim_{t\to c}[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)] = \lim_{t\to c}\mathbf{r}(t) \cdot \lim_{t\to c}\mathbf{u}(t).$$

87. Demostrar que si $\mathbf{r}$ es una función vectorial continua en c, entonces $\|\mathbf{r}\|$ es continua en c.

88. Verificar que el recíproco de lo que se afirma en el ejercicio 87 no es verdad encontrando una función vectorial $\mathbf{r}$ tal que $\|\mathbf{r}\|$ sea continua en c pero $\mathbf{r}$ no sea continua en c.

En los ejercicios 89 y 90, dos partículas viajan a lo largo de las curvas de espacio r(*t*) y u(*t*). Una colisión ocurrirá en el punto de intersección *P* si ambas partículas están en *P* al mismo tiempo. ¿Colisionan las partículas? ¿Se intersecan sus trayectorias?

89. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (9t - 20)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$

$\mathbf{u}(t) = (3t + 4)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + (5t - 4)\mathbf{k}$

90. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$

$\mathbf{u}(t) = (-2t + 3)\mathbf{i} + 8t\mathbf{j} + (12t + 2)\mathbf{k}$

Para pensar **En los ejercicios 91 y 92, dos partículas viajan a lo largo de las curvas de espacio r(*t*) y u(*t*).**

91. Si $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$ se intersecan, ¿colisionarán las partículas?

92. Si las partículas colisionan, ¿se intersecan sus trayectorias $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$?

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 93 a 96, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que pruebe que es falsa.**

93. Si f, g y h son funciones polinomiales de primer grado, entonces la curva dada por $x = f(t)$, $y = g(t)$ y $z = h(t)$ es una recta.

94. Si la curva dada por $x = f(t)$, $y = g(t)$ y $z = h(t)$ es una recta, entonces f, g y h son funciones polinomiales de primer grado de t.

95. Dos partículas viajan a través de las curvas de espacio $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$. La intersección de sus trayectorias depende sólo de las curvas trazadas por $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$ en tanto la colisión depende de la parametrización.

96. La función vectorial $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\cos t\,\mathbf{k}$ se encuentra en el paraboloide $x = y^2 + z^2$.

PROYECTO DE TRABAJO

Bruja de Agnesi

En la sección 3.5 se estudió una curva famosa llamada **bruja de Agnesi**. En este proyecto se profundiza sobre esta función.

Considérese un círculo de radio a centrado en el punto $(0, a)$ del eje y. Sea A un punto en la recta horizontal $y = 2a$, O el origen y B el punto donde el segmento OA corta el círculo. Un punto P está en la bruja de Agnesi si P se encuentra en la recta horizontal a través de B y en la recta vertical a través de A.

a) Mostrar que el punto A está descrito por la función vectorial

$$\mathbf{r}_A(\theta) = 2a\cot\theta\mathbf{i} + 2a\mathbf{j}, \quad 0 < \theta < \pi$$

donde θ es el ángulo formado por OA con el eje x positivo.

b) Mostrar que el punto B está descrito por la función vectorial

$$\mathbf{r}_B(\theta) = a\operatorname{sen} 2\theta\mathbf{i} + a(1 - \cos 2\theta)\mathbf{j}, \quad 0 < \theta < \pi.$$

c) Combinar los resultados de los incisos *a*) y *b*) para hallar la función vectorial $\mathbf{r}(\theta)$ para la bruja de Agnesi. Usar una herramienta de graficación para representar esta curva para $a = 1$.

d) Describir los límites $\lim_{\theta\to 0^+}\mathbf{r}(\theta)$ y $\lim_{\theta\to \pi^-}\mathbf{r}(\theta)$.

e) Eliminar el parámetro θ y determinar la ecuación rectangular de la bruja de Agnesi. Usar una herramienta de graficación para representar esta función para $a = 1$ y comparar la gráfica con la obtenida en el inciso *c*).

12.2 Derivación e integración de funciones vectoriales

- **Derivar una función vectorial.**
- **Integrar una función vectorial.**

Derivación de funciones vectoriales

En las secciones 12.3 a 12.5 se estudian varias aplicaciones importantes que emplean cálculo de funciones vectoriales. Como preparación para ese estudio, esta sección está dedicada a las mecánicas de derivación e integración de funciones vectoriales.

La definición de la derivada de una función vectorial es paralela a la dada para funciones reales.

DEFINICIÓN DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

La **derivada de una función vectorial r** se define como

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

para todo t para el cual existe el límite. Si $\mathbf{r}'(t)$ existe, entonces $\mathbf{r}$ es **derivable en *t***. Si $\mathbf{r}'(t)$ existe para toda t en un intervalo abierto I, entonces $\mathbf{r}$ es **derivable en el intervalo *I***. La derivabilidad de funciones vectoriales puede extenderse a intervalos cerrados considerando límites unilaterales.

NOTA Además de la notación $\mathbf{r}'(t)$, otras notaciones para la derivada de una función vectorial son

$$D_t[\mathbf{r}(t)], \quad \frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)] \quad \text{y} \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

■

La diferenciación de funciones vectoriales puede hacerse *componente por componente*. Para ver esto, considérese la función dada por

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}.$$

Aplicando la definición de derivada se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t)\mathbf{i} + g(t + \Delta t)\mathbf{j} - f(t)\mathbf{i} - g(t)\mathbf{j}}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \left\{ \left[\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \right] \mathbf{i} + \left[\frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t} \right] \mathbf{j} \right\} \\
&= \left\{ \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \right] \right\} \mathbf{i} + \left\{ \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t} \right] \right\} \mathbf{j} \\
&= f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j}
\end{aligned}$$

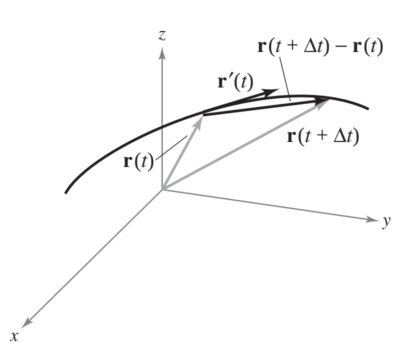


Figura 12.8

Este importante resultado se enuncia en el teorema de la página siguiente. Nótese que la derivada de la función vectorial $\mathbf{r}$ es también una función vectorial. En la figura 12.8 se ve que $\mathbf{r}'(t)$ es un vector tangente a la curva dada por $\mathbf{r}(t)$ y que apunta en la dirección de los valores crecientes de t.

TEOREMA 12.1 DERIVACIÓN DE FUNCIONES VECTORIALES

1. Si $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, donde f y g son funciones derivables de t, entonces

$$\mathbf{r}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j}.$$ Plano.

2. Si $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, donde f, g y h son funciones derivables de t, entonces

$$\mathbf{r}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}.$$ Espacio.

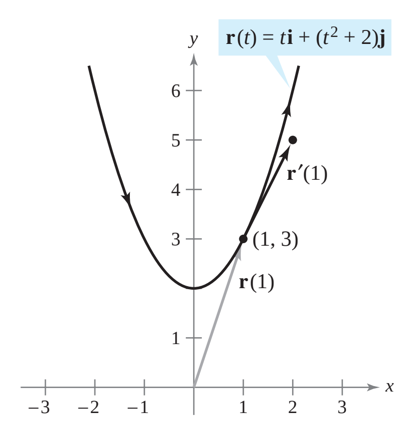


Figura 12.9

EJEMPLO 1 Derivación de funciones vectoriales

Para la función vectorial dada por $\mathbf{r}(t) + t\mathbf{i} + (t^2 + 2)\mathbf{j}$, encontrar $\mathbf{r}'(t)$. Entonces bosquejar la curva plana representada por $\mathbf{r}(t)$ y las gráficas de $\mathbf{r}(1)$ y $\mathbf{r}'(1)$.

Solución Derivar cada una de las componentes base para obtener

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$$ Derivada.

Del vector de posición $\mathbf{r}(t)$, se pueden escribir las ecuaciones paramétricas $x = t$ y $y = t^2 + 2$. La ecuación rectangular correspondiente es $y = x^2 + 2$. Cuando $t = 1$, $\mathbf{r}(1) = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{r}'(1) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$. En la figura 12.9, $\mathbf{r}(1)$ se dibuja iniciando en el origen, y $\mathbf{r}'(1)$ se dibuja en el punto final de $\mathbf{r}(1)$.

Derivadas de orden superior de funciones vectoriales se obtienen por derivación sucesiva de cada una de las funciones componentes.

EJEMPLO 2 Derivadas de orden superior

Para la función vectorial dada por $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$, hallar

a) $\mathbf{r}'(t)$ *b)* $\mathbf{r}''(t)$

c) $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)$ *d)* $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)$

Solución

a) $\mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ Primera derivada.

b) $\mathbf{r}''(t) = -\cos t\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$

$= -\cos t\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\mathbf{j}$ Segunda derivada.

c) $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t) = \operatorname{sen} t \cos t - \operatorname{sen} t \cos t = 0$ Producto escalar.

d) $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\operatorname{sen} t & \cos t & 2 \\ -\cos t & -\operatorname{sen} t & 0 \end{vmatrix}$ Producto vectorial.

$$= \begin{vmatrix} \cos t & 2 \\ -\operatorname{sen} t & 0 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} -\operatorname{sen} t & 2 \\ -\cos t & 0 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} -\operatorname{sen} t & \cos t \\ -\cos t & -\operatorname{sen} t \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= 2\operatorname{sen} t\mathbf{i} - 2\cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

En el inciso *c*) nótese que el producto escalar es una *función real*, no una función vectorial.

La parametrización de la curva representada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

es **suave en un intervalo abierto** I si f', g' y h' son continuas en I y $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo valor de t en el intervalo I.

EJEMPLO 3 Intervalos en los que una curva es suave

Hallar los intervalos en los que la epicicloide C dada por

$$\mathbf{r}(t) = (5\cos t - \cos 5t)\mathbf{i} + (5\,\text{sen}\,t - \text{sen}\,5t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

es suave.

$\mathbf{r}(t) = (5 \cos t - \cos 5t)\mathbf{i} + (5 \,\text{sen}\, t - \text{sen}\, 5t)\mathbf{j}$

La epicicloide no es suave en los puntos en los que corta los ejes
Figura 12.10

Solución La derivada de $\mathbf{r}$ es

$$\mathbf{r}'(t) = (-5\,\text{sen}\,t + 5\,\text{sen}\,5t)\mathbf{i} + (5\cos t - 5\cos 5t)\mathbf{j}.$$

En el intervalo $[0, 2\pi]$, los únicos valores de t para los cuales

$$\mathbf{r}'(t) = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$$

son $t = 0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2$ y 2π. Por consiguiente, se concluye que C es suave en los intervalos

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$$

como se muestra en la figura 12.10.

NOTA En la figura 12.10, nótese que la curva no es suave en los puntos en los que tiene cambios abruptos de dirección. Tales puntos se llaman **cúspides** o **nodos**.

La mayoría de las reglas de derivación del capítulo 2 tienen sus análogas para funciones vectoriales, y varias de ellas se dan en el teorema siguiente. Nótese que el teorema contiene tres versiones de "reglas del producto". La propiedad 3 da la derivada del producto de una función real w y por una función vectorial $\mathbf{r}$, la propiedad 4 da la derivada del producto escalar de dos funciones vectoriales y la propiedad 5 da la derivada del producto vectorial de dos funciones vectoriales (en el espacio). Nótese que la propiedad 5 sólo se aplica a funciones vectoriales tridimensionales, porque el producto vectorial no está definido para vectores bidimensionales.

TEOREMA 12.2 PROPIEDADES DE LA DERIVADA

Sean $\mathbf{r}$ y $\mathbf{u}$ funciones vectoriales derivables de t, w una función real derivable de t y c un escalar.

1. $D_t[c\mathbf{r}(t)] = c\mathbf{r}'(t)$
2. $D_t[\mathbf{r}(t) \pm \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}'(t) \pm \mathbf{u}'(t)$
3. $D_t[w(t)\mathbf{r}(t)] = w(t)\mathbf{r}'(t) + w'(t)\mathbf{r}(t)$
4. $D_t[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}'(t) + \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{u}(t)$
5. $D_t[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}'(t) + \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{u}(t)$
6. $D_t[\mathbf{r}(w(t))] = \mathbf{r}'(w(t))w'(t)$
7. Si $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = c$, entonces $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$.

DEMOSTRACIÓN Para demostrar la propiedad 4, sea

$$\mathbf{r}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + g_1(t)\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}(t) = f_2(t)\mathbf{i} + g_2(t)\mathbf{j}$$

donde f_1, f_2, g_1 y g_2 son funciones derivables de t. Entonces,

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t) = f_1(t)f_2(t) + g_1(t)g_2(t)$$

y se sigue que

$$\begin{aligned} D_t[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)] &= f_1(t)f_2'(t) + f_1'(t)f_2(t) + g_1(t)g_2'(t) + g_1'(t)g_2(t) \\ &= [f_1(t)f_2'(t) + g_1(t)g_2'(t)] + [f_1'(t)f_2(t) + g_1'(t)g_2(t)] \\ &= \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}'(t) + \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{u}(t). \end{aligned}$$

Las demostraciones de las otras propiedades se dejan como ejercicios (ver ejercicios 77 a 81 y ejercicio 84).

EXPLORACIÓN

Sea $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j}$. Dibujar la gráfica de $\mathbf{r}(t)$. Explicar por qué la gráfica es un círculo de radio 1 centrado en el origen. Calcular $\mathbf{r}(\pi/4)$ y $\mathbf{r}'(\pi/4)$. Colocar el vector $\mathbf{r}'(\pi/4)$ de manera que su punto inicial esté en el punto final de $\mathbf{r}(\pi/4)$. ¿Qué se observa? Mostrar que $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)$ es constante y que $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$ para todo t. ¿Qué relación tiene este ejemplo con la propiedad 7 del teorema 12.2?

EJEMPLO 4 Aplicación de las propiedades de la derivada

Para las funciones vectoriales

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{t}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \ln t\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}(t) = t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

hallar

a) $D_t[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)]$ y ***b)*** $D_t[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{u}'(t)]$.

Solución

a) Como $\mathbf{r}'(t) = -\frac{1}{t^2}\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{k}$ y $\mathbf{u}'(t) = 2t\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, se tiene

$$\begin{aligned} D_t[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)] &= \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}'(t) + \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{u}(t) \\ &= \left(\frac{1}{t}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \ln t\mathbf{k}\right) \cdot (2t\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) \\ &\quad + \left(-\frac{1}{t^2}\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{k}\right) \cdot (t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + \mathbf{k}) \\ &= 2 + 2 + (-1) + \frac{1}{t} \\ &= 3 + \frac{1}{t}. \end{aligned}$$

b) Como $\mathbf{u}'(t) = 2t\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{u}''(t) = 2\mathbf{i}$, se tiene

$$\begin{aligned} D_t[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{u}'(t)] &= [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{u}''(t)] + [\mathbf{u}'(t) \times \mathbf{u}'(t)] \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ t^2 & -2t & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \mathbf{0} \\ &= \begin{vmatrix} -2t & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} t^2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} t^2 & -2t \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\mathbf{k} \\ &= 0\mathbf{i} - (-2)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k} \\ &= 2\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}. \end{aligned}$$

NOTA Hacer de nuevo los incisos *a*) y *b*) del ejemplo 4 pero formando primero los productos escalar y vectorial y derivando después para comprobar que se obtienen los mismos resultados. ■

Integración de funciones vectoriales

La siguiente definición es una consecuencia lógica de la definición de la derivada de una función vectorial.

DEFINICIÓN DE LA INTEGRAL DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

1. Si $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, donde f y g son continuas en $[a, b]$, entonces la **integral indefinida** (o **antiderivada**) de **r** es

$$\int \mathbf{r}(t)\,dt = \left[\int f(t)\,dt\right]\mathbf{i} + \left[\int g(t)\,dt\right]\mathbf{j}$$ Plano.

y su **integral definida** en el intervalo $a \le t \le b$ es

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left[\int_a^b f(t)\,dt\right]\mathbf{i} + \left[\int_a^b g(t)\,dt\right]\mathbf{j}.$$

2. Si $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, donde f, g y h son continuas en $[a, b]$, entonces la **integral indefinida** (o **antiderivada**) de **r** es

$$\int \mathbf{r}(t)\,dt = \left[\int f(t)\,dt\right]\mathbf{i} + \left[\int g(t)\,dt\right]\mathbf{j} + \left[\int h(t)\,dt\right]\mathbf{k}$$ Espacio.

y su **integral definida** en el intervalo $a \le t \le b$ es

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left[\int_a^b f(t)\,dt\right]\mathbf{i} + \left[\int_a^b g(t)\,dt\right]\mathbf{j} + \left[\int_a^b h(t)\,dt\right]\mathbf{k}.$$

La antiderivada de una función vectorial es una familia de funciones vectoriales que difieren entre sí en un vector constante **C**. Por ejemplo, si $\mathbf{r}(t)$ es una función vectorial tridimensional, entonces al hallar la integral indefinida $\int \mathbf{r}(t)\,dt$, se obtienen tres constantes de integración

$$\int f(t)\,dt = F(t) + C_1, \qquad \int g(t)\,dt = G(t) + C_2, \qquad \int h(t)\,dt = H(t) + C_3$$

donde $F'(t) = f(t)$, $G'(t) = g(t)$ y $H'(t) = h(t)$. Estas tres constantes *escalares* forman un *vector* como constante de integración,

$$\begin{aligned}\int \mathbf{r}(t)\,dt &= [F(t) + C_1]\mathbf{i} + [G(t) + C_2]\mathbf{j} + [H(t) + C_3]\mathbf{k}\\ &= [F(t)\mathbf{i} + G(t)\mathbf{j} + H(t)\mathbf{k}] + [C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k}]\\ &= \mathbf{R}(t) + \mathbf{C}\end{aligned}$$

donde $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$.

EJEMPLO 5 Integración de una función vectorial

Hallar la integral indefinida

$$\int (t\,\mathbf{i} + 3\mathbf{j})\,dt.$$

Solución Integrando componente por componente se obtiene

$$\int (t\,\mathbf{i} + 3\mathbf{j})\,dt = \frac{t^2}{2}\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + \mathbf{C}.$$

El ejemplo 6 muestra cómo evaluar la integral definida de una función vectorial.

EJEMPLO 6 Integral definida de una función vectorial

Evaluar la integral

$$\int_0^1 \mathbf{r}(t)\,dt = \int_0^1 \left(\sqrt[3]{t}\,\mathbf{i} + \frac{1}{t+1}\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}\right) dt.$$

Solución

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \mathbf{r}(t)\,dt &= \left(\int_0^1 t^{1/3}\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_0^1 \frac{1}{t+1}\,dt\right)\mathbf{j} + \left(\int_0^1 e^{-t}\,dt\right)\mathbf{k}\\
&= \left[\left(\frac{3}{4}\right)t^{4/3}\right]_0^1 \mathbf{i} + \Big[\ln|t+1|\Big]_0^1 \mathbf{j} + \Big[-e^{-t}\Big]_0^1 \mathbf{k}\\
&= \frac{3}{4}\mathbf{i} + (\ln 2)\mathbf{j} + \left(1 - \frac{1}{e}\right)\mathbf{k}
\end{aligned}$$

Como ocurre con las funciones reales, se puede reducir la familia de primitivas de una función vectorial $\mathbf{r}'$ a una sola primitiva imponiendo una condición inicial a la función vectorial $\mathbf{r}$, como muestra el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 7 La primitiva de una función vectorial

Hallar la primitiva de

$$\mathbf{r}'(t) = \cos 2t\mathbf{i} - 2\,\mathrm{sen}\,t\mathbf{j} + \frac{1}{1+t^2}\mathbf{k}$$

que satisface la condición inicial $\mathbf{r}(0) = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Solución

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t) &= \int \mathbf{r}'(t)\,dt\\
&= \left(\int \cos 2t\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int -2\,\mathrm{sen}\,t\,dt\right)\mathbf{j} + \left(\int \frac{1}{1+t^2}\,dt\right)\mathbf{k}\\
&= \left(\frac{1}{2}\mathrm{sen}\,2t + C_1\right)\mathbf{i} + (2\cos t + C_2)\mathbf{j} + (\arctan t + C_3)\mathbf{k}
\end{aligned}$$

Haciendo $t = 0$ usando el hecho que $\mathbf{r}(0) = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(0) &= (0 + C_1)\mathbf{i} + (2 + C_2)\mathbf{j} + (0 + C_3)\mathbf{k}\\
&= 3\mathbf{i} + (-2)\mathbf{j} + \mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Igualando los componentes correspondientes se obtiene

$$C_1 = 3, \qquad 2 + C_2 = -2, \qquad \text{y} \qquad C_3 = 1.$$

Por tanto, la primitiva que satisface la condición inicial dada es

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1}{2}\mathrm{sen}\,2t + 3\right)\mathbf{i} + (2\cos t - 4)\mathbf{j} + (\arctan t + 1)\mathbf{k}.$$

12.2 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 8, dibujar la curva plana representada por la función vectorial y dibujar los vectores $\mathbf{r}(t_0)$ y $\mathbf{r}'(t_0)$ para el valor dado de t_0. Colocar los vectores de manera que el punto inicial de $\mathbf{r}(t_0)$ esté en el origen y el punto inicial de $\mathbf{r}'(t_0)$ esté en el punto final de $\mathbf{r}(t_0)$. ¿Qué relación hay entre $\mathbf{r}'(t_0)$ y la curva?

1. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \quad t_0 = 2$

2. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j}, \quad t_0 = 1$

3. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \dfrac{1}{t}\mathbf{j}, \quad t_0 = 2$

4. $\mathbf{r}(t) = (1 + t)\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}, \quad t_0 = 1$

5. $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j}, \quad t_0 = \dfrac{\pi}{2}$

6. $\mathbf{r}(t) = 3 \operatorname{sen} t\mathbf{i} + 4 \cos t\mathbf{j}, \quad t_0 = \dfrac{\pi}{2}$

7. $\mathbf{r}(t) = \langle e^t, e^{2t}\rangle, \quad t_0 = 0$

8. $\mathbf{r}(t) = \langle e^{-t}, e^t\rangle, \quad t_0 = 0$

En los ejercicios 9 y 10, *a*) dibujar la curva en el espacio representada por la función vectorial, y *b*) dibujar los vectores $\mathbf{r}(t_0)$ y $\mathbf{r}'(t_0)$ para el valor dado de t_0.

9. $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad t_0 = \dfrac{3\pi}{2}$

10. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{3}{2}\mathbf{k}, \quad t_0 = 2$

En los ejercicios 11 a 22, hallar $\mathbf{r}'(t)$.

11. $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} - 3t\mathbf{j}$

12. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\,\mathbf{i} + (1 - t^3)\mathbf{j}$

13. $\mathbf{r}(t) = \langle 2 \cos t, 5 \operatorname{sen} t\rangle$

14. $\mathbf{r}(t) = \langle t \cos t, -2 \operatorname{sen} t\rangle$

15. $\mathbf{r}(t) = 6t\mathbf{i} - 7t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$

16. $\mathbf{r}(t) = \dfrac{1}{t}\mathbf{i} + 16t\mathbf{j} + \dfrac{t^2}{2}\mathbf{k}$

17. $\mathbf{r}(t) = a \cos^3 t\mathbf{i} + a \operatorname{sen}^3 t\mathbf{j} + \mathbf{k}$

18. $\mathbf{r}(t) = 4\sqrt{t}\,\mathbf{i} + t^2\sqrt{t}\,\mathbf{j} + \ln t^2\mathbf{k}$

19. $\mathbf{r}(t) = e^{-t}\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5te^t\mathbf{k}$

20. $\mathbf{r}(t) = \langle t^3, \cos 3t, \operatorname{sen} 3t\rangle$

21. $\mathbf{r}(t) = \langle t \operatorname{sen} t, t \cos t, t\rangle$

22. $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{arcsen} t, \arccos t, 0\rangle$

En los ejercicios 23 a 30, hallar *a*) $\mathbf{r}'(t)$, *b*) $\mathbf{r}''(t)$ y *c*) $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)$.

23. $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j}$

24. $\mathbf{r}(t) = (t^2 + t)\mathbf{i} + (t^2 - t)\mathbf{j}$

25. $\mathbf{r}(t) = 4 \cos t\mathbf{i} + 4 \operatorname{sen} t\mathbf{j}$

26. $\mathbf{r}(t) = 8 \cos t\mathbf{i} + 3 \operatorname{sen} t\mathbf{j}$

27. $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}t^2\mathbf{i} - t\mathbf{j} + \frac{1}{6}t^3\mathbf{k}$

28. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (2t + 3)\mathbf{j} + (3t - 5)\mathbf{k}$

29. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t + t \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t - t \cos t, t\rangle$

30. $\mathbf{r}(t) = \langle e^{-t}, t^2, \tan t\rangle$

En los ejercicios 31 y 32 se dan una función vectorial y su gráfica. La gráfica también muestra los vectores unitarios $\mathbf{r}'(t_0)/\|\mathbf{r}'(t_0)\|$ y $\mathbf{r}''(t_0)/\|\mathbf{r}''(t_0)\|$. Hallar estos dos vectores unitarios e identificarlos en la gráfica.

31. $\mathbf{r}(t) = \cos(\pi t)\mathbf{i} + \operatorname{sen}(\pi t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad t_0 = -\frac{1}{4}$

32. $\mathbf{r}(t) = \frac{3}{2}t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}, \quad t_0 = \frac{1}{4}$

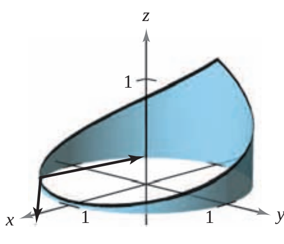


Figura para 31

Figura para 32

En los ejercicios 33 a 42, hallar el (los) intervalo(s) abierto(s) en que la curva dada por la función vectorial es suave.

33. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$

34. $\mathbf{r}(t) = \dfrac{1}{t - 1}\mathbf{i} + 3t\mathbf{j}$

35. $\mathbf{r}(\theta) = 2 \cos^3 \theta\mathbf{i} + 3 \operatorname{sen}^3 \theta\mathbf{j}$

36. $\mathbf{r}(\theta) = (\theta + \operatorname{sen} \theta)\mathbf{i} + (1 - \cos \theta)\mathbf{j}$

37. $\mathbf{r}(\theta) = (\theta - 2 \operatorname{sen} \theta)\mathbf{i} + (1 - 2 \cos \theta)\mathbf{j}$

38. $\mathbf{r}(t) = \dfrac{2t}{8 + t^3}\mathbf{i} + \dfrac{2t^2}{8 + t^3}\mathbf{j}$

39. $\mathbf{r}(t) = (t - 1)\mathbf{i} + \dfrac{1}{t}\mathbf{j} - t^2\mathbf{k}$

40. $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} - e^{-t}\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$

41. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} - 3t\mathbf{j} + \tan t\mathbf{k}$

42. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\,\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j} + \frac{1}{4}t\mathbf{k}$

En los ejercicios 43 y 44, usar las propiedades de la derivada para encontrar lo siguiente.

a) $\mathbf{r}'(t)$ *b*) $\mathbf{r}''(t)$ *c*) $D_t[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)]$

d) $D_t[3\mathbf{r}(t) - \mathbf{u}(t)]$ *e*) $D_t[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}(t)]$ *f*) $D_t[\|\mathbf{r}(t)\|], \quad t > 0$

43. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad \mathbf{u}(t) = 4t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$

44. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} t\mathbf{j} + 2 \cos t\mathbf{k},$

$\mathbf{u}(t) = \dfrac{1}{t}\mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} t\mathbf{j} + 2 \cos t\mathbf{k}$

En los ejercicios 45 y 46, hallar *a*) $D_t[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)]$ y *b*) $D_t[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}(t)]$ en dos diferentes formas.

i) **Hallar primero el producto y luego derivar.**

ii) **Aplicar las propiedades del teorema 12.2.**

45. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}, \quad \mathbf{u}(t) = t^4\mathbf{k}$

46. $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{j} + t\mathbf{k}$

En los ejercicios 47 y 48, hallar el ángulo θ entre $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{r}'(t)$ en función de *t*. Usar una herramienta de graficación para representar $\theta(t)$. Usar la gráfica para hallar todos los extremos de la función. Hallar todos los valores de *t* en que los vectores son ortogonales.

47. $\mathbf{r}(t) = 3 \operatorname{sen} t\mathbf{i} + 4 \cos t\mathbf{j}$

48. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j}$

En los ejercicios 49 a 52, usar la definición de la derivada para hallar $\mathbf{r}'(t)$.

49. $\mathbf{r}(t) = (3t + 2)\mathbf{i} + (1 - t^2)\mathbf{j}$

50. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\,\mathbf{i} + \dfrac{3}{t}\mathbf{j} - 2t\mathbf{k}$

51. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, 0, 2t\rangle$

52. $\mathbf{r}(t) = \langle 0, \operatorname{sen} t, 4t\rangle$

En los ejercicios 53 a 60, hallar la integral indefinida.

53. $\displaystyle\int (2t\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})\,dt$

54. $\displaystyle\int \left(4t^3\,\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} - 4\sqrt{t}\,\mathbf{k}\right) dt$

55. $\displaystyle\int \left(\frac{1}{t}\mathbf{i} + \mathbf{j} - t^{3/2}\,\mathbf{k}\right) dt$

56. $\displaystyle\int \left(\ln t\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right) dt$

57. $\displaystyle\int \left[(2t - 1)\mathbf{i} + 4t^3\mathbf{j} + 3\sqrt{t}\,\mathbf{k}\right] dt$

58. $\displaystyle\int (e^t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k})\,dt$

59. $\displaystyle\int \left(\sec^2 t\mathbf{i} + \frac{1}{1 + t^2}\mathbf{j}\right) dt$

60. $\displaystyle\int (e^{-t}\operatorname{sen} t\mathbf{i} + e^{-t}\cos t\mathbf{j})\,dt$

En los ejercicios 61 a 66, evaluar la integral definida.

61. $\displaystyle\int_0^1 (8t\mathbf{i} + t\mathbf{j} - \mathbf{k})\,dt$

62. $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + \sqrt[3]{t}\,\mathbf{k}\right) dt$

63. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} [(a\cos t)\mathbf{i} + (a\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + \mathbf{k}]\,dt$

64. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} [(\sec t\tan t)\mathbf{i} + (\tan t)\mathbf{j} + (2\operatorname{sen} t\cos t)\mathbf{k}]\,dt$

65. $\displaystyle\int_0^2 (t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} - te^t\mathbf{k})\,dt$

66. $\displaystyle\int_0^3 \|t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}\|\,dt$

En los ejercicios 67 a 72, hallar $\mathbf{r}(t)$ para las condiciones dadas.

67. $\mathbf{r}'(t) = 4e^{2t}\mathbf{i} + 3e^t\mathbf{j}, \quad \mathbf{r}(0) = 2\mathbf{i}$

68. $\mathbf{r}'(t) = 3t^2\mathbf{j} + 6\sqrt{t}\,\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

69. $\mathbf{r}''(t) = -32\mathbf{j}, \quad \mathbf{r}'(0) = 600\sqrt{3}\mathbf{i} + 600\mathbf{j}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$

70. $\mathbf{r}''(t) = -4\cos t\mathbf{j} - 3\operatorname{sen} t\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}'(0) = 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(0) = 4\mathbf{j}$

71. $\mathbf{r}'(t) = te^{-t^2}\mathbf{i} - e^{-t}\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(0) = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

72. $\mathbf{r}'(t) = \dfrac{1}{1 + t^2}\mathbf{i} + \dfrac{1}{t^2}\mathbf{j} + \dfrac{1}{t}\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(1) = 2\mathbf{i}$

Desarrollo de conceptos

73. Definir la derivada de una función vectorial. Describir cómo hallar la derivada de una función vectorial y dar su interpretación geométrica.

74. ¿Cómo se encuentra la integral de una función vectorial?

75. Las tres componentes de la derivada de la función vectorial $\mathbf{u}$ son positivas en $t = t_0$. Describir el comportamiento de $\mathbf{u}$ en $t = t_0$.

76. La componente z de la derivada de la función vectorial $\mathbf{u}$ es 0 para t en el dominio de la función. ¿Qué implica esta información acerca de la gráfica de $\mathbf{u}$?

En los ejercicios 77 a 84, demostrar la propiedad. En todos los casos, suponer que r, u y v son funciones vectoriales derivables de *t*, que *w* es una función real derivable de *t*, y que *c* es un escalar.

77. $D_t[c\mathbf{r}(t)] = c\mathbf{r}'(t)$

78. $D_t[\mathbf{r}(t) \pm \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}'(t) \pm \mathbf{u}'(t)$

79. $D_t[w(t)\mathbf{r}(t)] = w(t)\mathbf{r}'(t) + w'(t)\mathbf{r}(t)$

80. $D_t[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}'(t) + \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{u}(t)$

81. $D_t[\mathbf{r}(w(t))] = \mathbf{r}'(w(t))w'(t)$

82. $D_t[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)] = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t)$

83. $D_t\{\mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)]\} = \mathbf{r}'(t) \cdot [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] + \mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t)] + \mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)]$

84. Si $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)$ es una constante, entonces $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$.

85. ***Movimiento de una partícula*** Una partícula se mueve en el plano xy a lo largo de la curva representada por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = (t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j}$.

a) Usar una herramienta de graficación para representar $\mathbf{r}$. Describir la curva.

b) Hallar los valores mínimo y máximo de $\|\mathbf{r}'\|$ y $\|\mathbf{r}''\|$.

86. ***Movimiento de una partícula*** Una partícula se mueve en el plano yz a lo largo de la curva representada por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = (2\cos t)\mathbf{j} + (3\operatorname{sen} t)\mathbf{k}$.

a) Describir la curva.

b) Hallar los valores mínimo y máximo de $\|\mathbf{r}'\|$ y $\|\mathbf{r}''\|$.

87. Considerar la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = (e^t\operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (e^t\cos t)\mathbf{j}.$$

Mostrar que $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{r}''(t)$ son siempre perpendiculares a cada uno.

Para discusión

88. ***Investigación*** Considerar la función vectorial $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (4 - t^2)\mathbf{j}$.

a) Trazar la gráfica de $\mathbf{r}(t)$. Usar una herramienta de graficación para verificar su gráfica.

b) Trazar los vectores $\mathbf{r}(1)$, $\mathbf{r}(1.25)$ y $\mathbf{r}(1.25) - \mathbf{r}(1)$ sobre la gráfica en el inciso *a*).

c) Comparar el vector $\mathbf{r}'(1)$ con el vector

$$\frac{\mathbf{r}(1.25) - \mathbf{r}(1)}{1.25 - 1}.$$

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 89 a 92, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que muestre que es falsa.**

89. Si una partícula se mueve a lo largo de una esfera centrada en el origen, entonces su vector derivada es siempre tangente a la esfera.

90. La integral definida de una función vectorial es un número real.

91. $\dfrac{d}{dt}[\|\mathbf{r}(t)\|] = \|\mathbf{r}'(t)\|$

92. Si $\mathbf{r}$ y $\mathbf{u}$ son funciones vectoriales derivables de t, entonces $D_t[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{u}'(t)$.

12.3 Velocidad y aceleración

- Describir la velocidad y la aceleración relacionadas con una función vectorial.
- Usar una función vectorial para analizar el movimiento de un proyectil.

Velocidad y aceleración

Ahora se combina el estudio de ecuaciones paramétricas, curvas, vectores y funciones vectoriales a fin de formular un modelo para el movimiento a lo largo de una curva. Se empezará por ver el movimiento de un objeto en el plano. (El movimiento de un objeto en el espacio puede desarrollarse de manera similar.)

Conforme un objeto se mueve a lo largo de una curva en el plano, la coordenada x y la coordenada y de su centro de masa es cada una función del tiempo t. En lugar de utilizar f y g para representar estas dos funciones, es conveniente escribir $x = x(t)$ y $y = y(t)$. Por tanto, el vector de posición $\mathbf{r}(t)$ toma la forma

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}. \qquad \text{Vector de posición.}$$

Lo mejor de este modelo vectorial para representar movimiento es que se pueden usar la primera y la segunda derivadas de la función vectorial $\mathbf{r}$ para hallar la velocidad y la aceleración del objeto. (Hay que recordar del capítulo anterior que la velocidad y la aceleración son cantidades vectoriales que tienen magnitud y dirección.) Para hallar los vectores velocidad y aceleración en un instante dado t, considérese un punto $Q(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t))$ que se aproxima al punto $P(x(t), y(t))$ a lo largo de la curva C dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, como se muestra en la figura 12.11. A medida que $\Delta t \to 0$, la dirección del vector $\overrightarrow{PQ}$ (denotado por $\Delta\mathbf{r}$) se aproxima a la *dirección del movimiento* en el instante t.

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$$

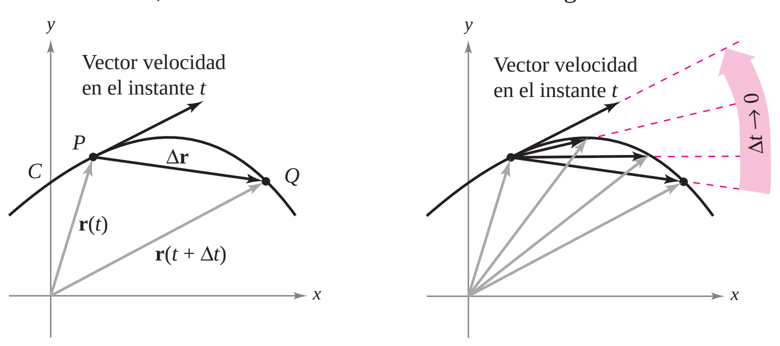
$$\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

Si este límite existe, se define como el **vector velocidad** o el **vector tangente** a la curva en el punto de P. Nótese que éste es el mismo límite usado en la definición de $\mathbf{r}'(t)$. Por tanto, la dirección de $\mathbf{r}'(t)$ da la dirección del movimiento en el instante t. La magnitud del vector $\mathbf{r}'(t)$

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \|x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

da la **rapidez** del objeto en el instante t. De manera similar, se puede usar $\mathbf{r}''(t)$ para hallar la aceleración, como se indica en las definiciones siguientes.



Conforme $\Delta t \to 0$, $\dfrac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$ se aproxima al vector velocidad

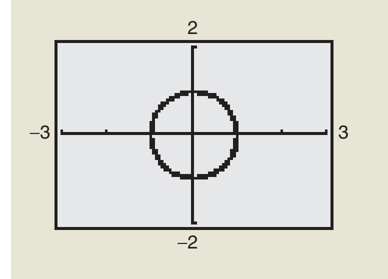
Figura 12.11

EXPLORACIÓN

Exploración de velocidad
Considérese el círculo dado por

$$\mathbf{r}(t) = (\cos \omega t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} \omega t)\mathbf{j}.$$

Usar una herramienta de graficación en modo *paramétrico* para representar este círculo para varios valores de ω. ¿Cómo afecta ω a la velocidad del punto final cuando se traza la curva? Para un valor dado de ω, ¿parece ser constante la velocidad? ¿Parece ser constante la aceleración? Explicar el razonamiento.



DEFINICIONES DE VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

Si x y y son funciones de t que tienen primera y segunda derivadas y $\mathbf{r}$ es una función vectorial dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, entonces el vector velocidad, el vector aceleración y la rapidez en el instante t se definen como sigue.

$$\textbf{Velocidad} = \mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}$$
$$\textbf{Aceleración} = \mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = x''(t)\mathbf{i} + y''(t)\mathbf{j}$$
$$\textbf{Rapidez} = \|\mathbf{v}(t)\| = \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

Para el movimiento a lo largo de una curva en el espacio, las definiciones son similares. Es decir, si $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, entonces

$$\textbf{Velocidad} = \mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$$
$$\textbf{Aceleración} = \mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = x''(t)\mathbf{i} + y''(t)\mathbf{j} + z''(t)\mathbf{k}$$
$$\textbf{Rapidez} = \|\mathbf{v}(t)\| = \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}.$$

EJEMPLO 1 Hallar la velocidad y la aceleración a lo largo de una curva plana

NOTA En el ejemplo 1, nótese que los vectores velocidad y aceleración son ortogonales en todo punto y en cualquier instante. Esto es característico del movimiento con rapidez constante. (Ver ejercicio 57.)

Hallar el vector velocidad, la rapidez y el vector aceleración de una partícula que se mueve a lo largo de la curva plana C descrita por

$$\mathbf{r}(t) = 2\,\text{sen}\frac{t}{2}\mathbf{i} + 2\cos\frac{t}{2}\mathbf{j}.$$ Vector posición.

Solución

El vector velocidad es

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \cos\frac{t}{2}\mathbf{i} - \text{sen}\frac{t}{2}\mathbf{j}.$$ Vector velocidad.

La rapidez (en cualquier instante) es

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{\cos^2\frac{t}{2} + \text{sen}^2\frac{t}{2}} = 1.$$ Rapidez.

El vector aceleración es

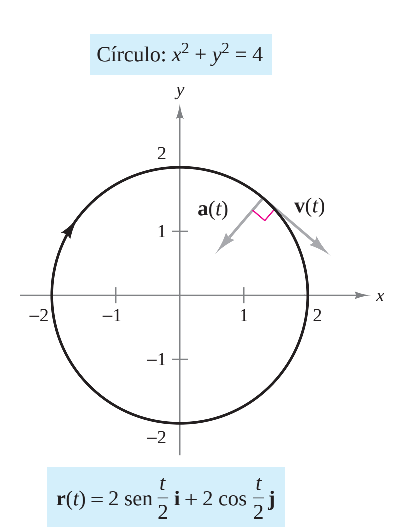
$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = -\frac{1}{2}\text{sen}\frac{t}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\mathbf{j}.$$ Vector aceleración.

Las ecuaciones paramétricas de la curva del ejemplo 1 son

$$x = 2\,\text{sen}\frac{t}{2} \quad \text{y} \quad y = 2\cos\frac{t}{2}.$$

Eliminando el parámetro t, se obtiene la ecuación rectangular

$$x^2 + y^2 = 4.$$ Ecuación rectangular.

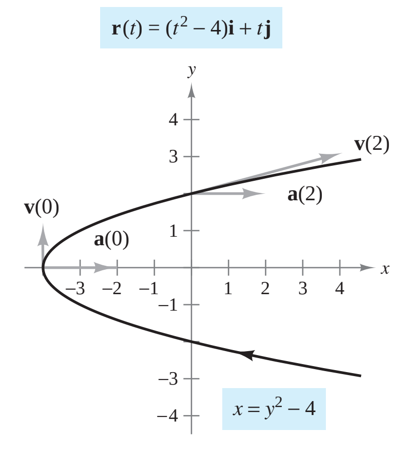


La partícula se mueve alrededor del círculo con rapidez constante
Figura 12.12

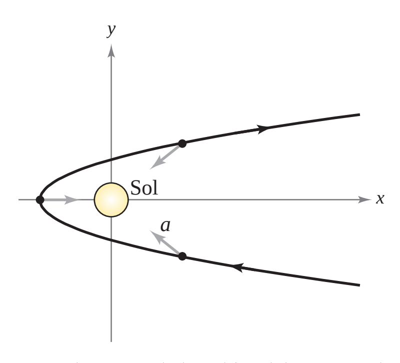
Por tanto, la curva es un círculo de radio 2 centrado en el origen, como se muestra en la figura 12.12. Como el vector velocidad

$$\mathbf{v}(t) = \cos\frac{t}{2}\mathbf{i} - \text{sen}\frac{t}{2}\mathbf{j}$$

tiene una magnitud constante pero cambia de dirección a medida que t aumenta, la partícula se mueve alrededor del círculo con una rapidez constante.



En todo punto en la curva, el vector aceleración apunta a la derecha
Figura 12.13



En todo punto de la órbita del cometa, el vector aceleración apunta hacia el Sol
Figura 12.14

EJEMPLO 2 Dibujo de los vectores velocidad y aceleración en el plano

Dibujar la trayectoria de un objeto que se mueve a lo largo de la curva plana dada por

$$\mathbf{r}(t) = (t^2 - 4)\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} \qquad \text{Vector posición.}$$

y hallar los vectores velocidad y aceleración cuando $t = 0$ y $t = 2$.

Solución Utilizando las ecuaciones paramétricas $x = t^2 - 4$ y $y = t$, se puede determinar que la curva es una parábola dada por $x = y^2 - 4$, como se muestra en la figura 12.13. El vector velocidad (en cualquier instante) es

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 2t\,\mathbf{i} + \mathbf{j} \qquad \text{Vector velocidad.}$$

y el vector aceleración (en cualquier instante) es

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = 2\mathbf{i}. \qquad \text{Vector aceleración.}$$

Cuando $t = 0$, los vectores velocidad y aceleración están dados por

$$\mathbf{v}(0) = 2(0)\mathbf{i} + \mathbf{j} = \mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{a}(0) = 2\mathbf{i}.$$

Cuando $t = 2$, los vectores velocidad y aceleración están dados por

$$\mathbf{v}(2) = 2(2)\mathbf{i} + \mathbf{j} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{a}(2) = 2\mathbf{i}.$$

Si el objeto se mueve por la trayectoria mostrada en la figura 12.13, nótese que el vector aceleración es constante (tiene una magnitud de 2 y apunta hacia la derecha). Esto implica que la rapidez del objeto va decreciendo conforme el objeto se mueve hacia el vértice de la parábola, y la rapidez va creciendo conforme el objeto se aleja del vértice de la parábola.

Este tipo de movimiento *no* es el característico de cometas que describen trayectorias parabólicas en nuestro sistema solar. En estos cometas, el vector aceleración apunta siempre hacia el origen (el Sol), lo que implica que la rapidez del cometa aumenta a medida que se aproxima al vértice de su trayectoria y disminuye cuando se aleja del vértice. (Ver figura 12.14.)

EJEMPLO 3 Dibujo de los vectores velocidad y aceleración en el espacio

Dibujar la trayectoria de un objeto que se mueve a lo largo de la curva en el espacio C dada por

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + 3t\,\mathbf{k}, \quad t \geq 0 \qquad \text{Vector posición.}$$

y hallar los vectores velocidad y aceleración cuando $t = 1$.

Solución Utilizando las ecuaciones paramétricas $x = t$ y $y = t^3$, se puede determinar que la trayectoria del objeto se encuentra en el cilindro cúbico dado por $y = x^3$. Como $z = 3t$, el objeto parte de $(0, 0, 0)$ y se mueve hacia arriba a medida que t aumenta, como se muestra en la figura 12.15. Como $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + 3t\,\mathbf{k}$, se tiene

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \qquad \text{Vector velocidad.}$$

y

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = 6t\mathbf{j}. \qquad \text{Vector aceleración.}$$

Cuando $t = 1$, los vectores velocidad y aceleración están dados por

$$\mathbf{v}(1) = \mathbf{r}'(1) = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{a}(1) = \mathbf{r}''(1) = 6\mathbf{j}.$$

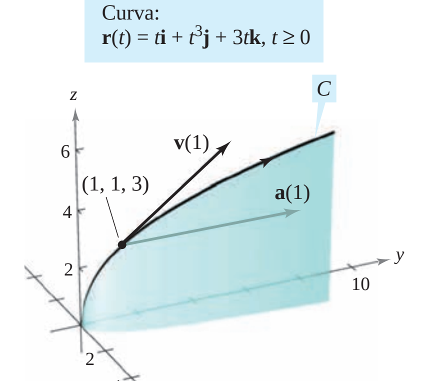


Figura 12.15

Hasta aquí se ha tratado de hallar la velocidad y la aceleración derivando la función de posición. En muchas aplicaciones prácticas se tiene el problema inverso, hallar la función de posición dadas una velocidad o una aceleración. Esto se demuestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4 Hallar una función posición por integración

Un objeto parte del reposo del punto $P(1, 2, 0)$ y se mueve con una aceleración

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$ Vector aceleración.

donde $\|\mathbf{a}(t)\|$ se mide en pies por segundo al cuadrado. Hallar la posición del objeto después de $t = 2$ segundos.

Solución A partir de la descripción del movimiento del objeto, se pueden deducir las *condiciones iniciales* siguientes. Como el objeto parte del reposo, se tiene

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{0}.$$

Como el objeto parte del punto $(x, y, z) = (1, 2, 0)$, se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(0) &= x(0)\mathbf{i} + y(0)\mathbf{j} + z(0)\mathbf{k}\\ &= 1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 0\mathbf{k}\\ &= \mathbf{i} + 2\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Para hallar la función de posición, hay que integrar dos veces, usando cada vez una de las condiciones iniciales para hallar la constante de integración. El vector velocidad es

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) = \int \mathbf{a}(t)\,dt &= \int (\mathbf{j} + 2\mathbf{k})\,dt\\ &= t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k} + \mathbf{C}\end{aligned}$$

donde $\mathbf{C} = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k}$. Haciendo $t = 0$ y aplicando la condición inicial $\mathbf{v}(0) = \mathbf{0}$, se obtiene

$$\mathbf{v}(0) = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad C_1 = C_2 = C_3 = 0.$$

Por tanto, la *velocidad* en cualquier instante t es

$$\mathbf{v}(t) = t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}.$$ Vector velocidad.

Integrando una vez más se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) = \int \mathbf{v}(t)\,dt &= \int (t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k})\,dt\\ &= \frac{t^2}{2}\mathbf{j} + t^2\mathbf{k} + \mathbf{C}\end{aligned}$$

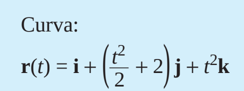
donde $\mathbf{C} = C_4\mathbf{i} + C_5\mathbf{j} + C_6\mathbf{k}$. Haciendo $t = 0$ y aplicando la condición inicial $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, se tiene

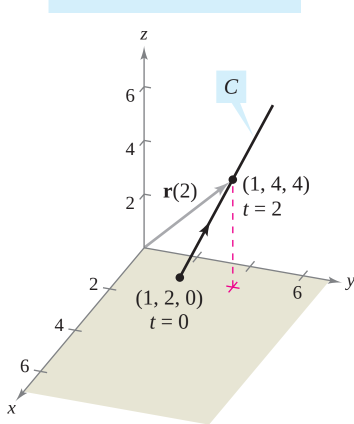
$$\mathbf{r}(0) = C_4\mathbf{i} + C_5\mathbf{j} + C_6\mathbf{k} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad C_4 = 1, C_5 = 2, C_6 = 0.$$

Por tanto, el vector *posición* es

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \left(\frac{t^2}{2} + 2\right)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}.$$ Vector posición.

La posición del objeto después de $t = 2$ segundos está dada por $\mathbf{r}(2) = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, como se muestra en la figura 12.16.





El objeto tarda 2 segundos en moverse del punto (1, 2, 0) al punto (1, 4, 4) a lo largo de C

Figura 12.16

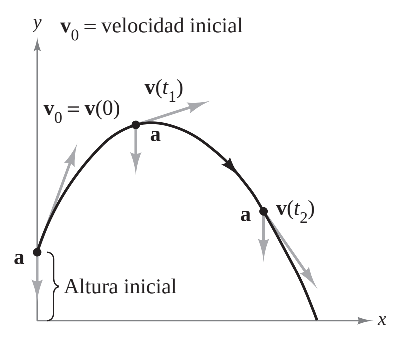


Figura 12.17

Movimiento de proyectiles

Ahora ya se dispone de lo necesario para deducir las ecuaciones paramétricas de la trayectoria de un proyectil. Supóngase que la gravedad es la única fuerza que actúa sobre un proyectil después de su lanzamiento. Por tanto, el movimiento ocurre en un plano vertical que puede representarse por el sistema de coordenadas xy con el origen correspondiente a un punto sobre la superficie de la Tierra (figura 12.17). Para un proyectil de masa m, la fuerza gravitatoria es

$$\mathbf{F} = -mg\mathbf{j}$$ Fuerza gravitatoria.

donde la constante gravitatoria es $g = 32$ pies por segundo al cuadrado, o 9.81 metros por segundo al cuadrado. Por la **segunda ley del movimiento de Newton**, esta misma fuerza produce una aceleración $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$, y satisface la ecuación $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Por consiguiente, la aceleración del proyectil está dada por $m\mathbf{a} = -mg\mathbf{j}$, lo que implica que

$$\mathbf{a} = -g\mathbf{j}.$$ Aceleración del proyectil.

EJEMPLO 5 Obtención de la función de posición de un proyectil

Un proyectil de masa m se lanza desde una posición inicial $\mathbf{r}_0$ con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$. Hallar su vector posición en función del tiempo.

Solución Se parte del vector aceleración $\mathbf{a}(t) = -g\mathbf{j}$ y se integra dos veces.

$$\mathbf{v}(t) = \int \mathbf{a}(t)\,dt = \int -g\mathbf{j}\,dt = -gt\mathbf{j} + \mathbf{C}_1$$

$$\mathbf{r}(t) = \int \mathbf{v}(t)\,dt = \int (-gt\mathbf{j} + \mathbf{C}_1)\,dt = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + \mathbf{C}_1 t + \mathbf{C}_2$$

Se puede usar el hecho de que $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ y $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$ para hallar los vectores constantes $\mathbf{C}_1$ y $\mathbf{C}_2$. Haciendo esto se obtiene $\mathbf{C}_1 = \mathbf{v}_0$ y $\mathbf{C}_2 = \mathbf{r}_0$. Por consiguiente, el vector posición es

$$\mathbf{r}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + t\mathbf{v}_0 + \mathbf{r}_0.$$ Vector posición.

En muchos problemas sobre proyectiles, los vectores constantes $\mathbf{r}_0$ y $\mathbf{v}_0$ no se dan explícitamente. A menudo se dan la altura inicial h, la rapidez inicial v_0 y el ángulo θ con que el proyectil es lanzado, como se muestra en la figura 12.18. De la altura dada, se puede deducir que $\mathbf{r}_0 = h\mathbf{j}$. Como la rapidez da la magnitud de la velocidad inicial, se sigue que $v_0 = \|\mathbf{v}_0\|$ y se puede escribir

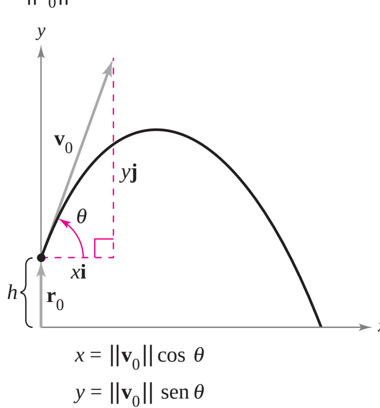


Figura 12.18

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_0 &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j}\\ &= (\|\mathbf{v}_0\|\cos\theta)\mathbf{i} + (\|\mathbf{v}_0\|\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j}\\ &= v_0\cos\theta\mathbf{i} + v_0\operatorname{sen}\theta\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Por tanto, el vector posición puede expresarse en la forma

$$\mathbf{r}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + t\mathbf{v}_0 + \mathbf{r}_0$$ Vector posición.

$$\begin{aligned}&= -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + tv_0\cos\theta\mathbf{i} + tv_0\operatorname{sen}\theta\mathbf{j} + h\mathbf{j}\\ &= (v_0\cos\theta)t\mathbf{i} + \left[h + (v_0\operatorname{sen}\theta)t - \frac{1}{2}gt^2\right]\mathbf{j}.\end{aligned}$$

TEOREMA 12.3 FUNCIÓN DE POSICIÓN DE UN PROYECTIL

Despreciando la resistencia del aire, la trayectoria de un proyectil lanzado de una altura inicial h con rapidez inicial v_0 y ángulo de elevación θ se describe por medio de la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = (v_0 \cos \theta)t\mathbf{i} + \left[h + (v_0 \operatorname{sen} \theta)t - \frac{1}{2}gt^2\right]\mathbf{j}$$

donde g es la constante de la gravedad.

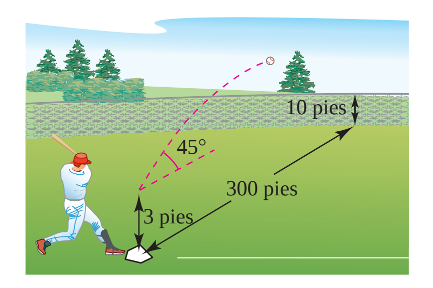


Figura 12.19

EJEMPLO 6 La trayectoria de una pelota de béisbol

Una pelota de béisbol es golpeada 3 pies sobre el nivel del suelo a 100 pies por segundo y con un ángulo de 45° respecto al suelo, como se muestra en la figura 12.19. Hallar la altura máxima que alcanza la pelota de béisbol. ¿Pasará por encima de una valla de 10 pies de altura localizada a 300 pies del plato de lanzamiento?

Solución Se tienen dados $h = 3$, $v_0 = 100$ y $\theta = 45°$. Así, tomando $g = 32$ pies por segundo al cuadrado se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= \left(100 \cos \frac{\pi}{4}\right)t\,\mathbf{i} + \left[3 + \left(100 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right)t - 16t^2\right]\mathbf{j}\\ &= \left(50\sqrt{2}\,t\right)\mathbf{i} + \left(3 + 50\sqrt{2}\,t - 16t^2\right)\mathbf{j}\\ \mathbf{v}(t) &= \mathbf{r}'(t) = 50\sqrt{2}\,\mathbf{i} + \left(50\sqrt{2} - 32t\right)\mathbf{j}.\end{aligned}$$

La altura máxima se alcanza cuando

$$y'(t) = 50\sqrt{2} - 32t = 0$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned}t &= \frac{25\sqrt{2}}{16}\\ &\approx 2.21 \text{ segundos.}\end{aligned}$$

Por tanto, la altura máxima que alcanza la pelota es

$$\begin{aligned}y &= 3 + 50\sqrt{2}\left(\frac{25\sqrt{2}}{16}\right) - 16\left(\frac{25\sqrt{2}}{16}\right)^2\\ &= \frac{649}{8}\\ &\approx 81 \text{ pies.}\end{aligned}$$

Altura máxima cuando $t \approx 2.21$ segundos.

La pelota está a 300 pies de donde fue golpeada cuando

$$300 = x(t) = 50\sqrt{2}\,t.$$

Despejando t de esta ecuación se obtiene $t = 3\sqrt{2} \approx 4.24$ segundos. En este instante, la altura de la pelota es

$$\begin{aligned}y &= 3 + 50\sqrt{2}\left(3\sqrt{2}\right) - 16\left(3\sqrt{2}\right)^2\\ &= 303 - 288\\ &= 15 \text{ pies.}\end{aligned}$$

Altura cuando $t \approx 4.24$ segundos.

Por consiguiente, la pelota pasará sobre la valla de 10 pies.

12.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 10, el vector posición r describe la trayectoria de un objeto que se mueve en el plano *xy*. Dibujar una gráfica de la trayectoria y dibujar los vectores velocidad y aceleración en el punto dado.

	Función posición	*Punto*
1.	$\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + (t-1)\mathbf{j}$	$(3, 0)$
2.	$\mathbf{r}(t) = (6-t)\mathbf{i} + t\mathbf{j}$	$(3, 3)$
3.	$\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j}$	$(4, 2)$
4.	$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (-t^2+4)\mathbf{j}$	$(1, 3)$
5.	$\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$	$(1, 1)$
6.	$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1}{4}t^3 + 1\right)\mathbf{i} + t\mathbf{j}$	$(3, 2)$
7.	$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\,\mathrm{sen}\,t\mathbf{j}$	$\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$
8.	$\mathbf{r}(t) = 3\cos t\mathbf{i} + 2\,\mathrm{sen}\,t\mathbf{j}$	$(3, 0)$
9.	$\mathbf{r}(t) = \langle t - \mathrm{sen}\,t, 1 - \cos t\rangle$	$(\pi, 2)$
10.	$\mathbf{r}(t) = \langle e^{-t}, e^t\rangle$	$(1, 1)$

En los ejercicios 11 a 20, el vector posición r describe la trayectoria de un objeto que se mueve en el espacio. Hallar velocidad, rapidez y aceleración del objeto.

11. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 5t\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$

12. $\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} + 4t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$

13. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \dfrac{t^2}{2}\mathbf{k}$

14. $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \dfrac{1}{4}t^2\mathbf{k}$

15. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \sqrt{9-t^2}\,\mathbf{k}$

16. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 2t^{3/2}\mathbf{k}$

17. $\mathbf{r}(t) = \langle 4t, 3\cos t, 3\,\mathrm{sen}\,t\rangle$

18. $\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\,t, t^2\rangle$

19. $\mathbf{r}(t) = \langle e^t\cos t, e^t\,\mathrm{sen}\,t, e^t\rangle$

20. $\mathbf{r}(t) = \left\langle \ln t, \dfrac{1}{t}, t^4\right\rangle$

Aproximación lineal **En los ejercicios 21 y 22 se dan la gráfica de la función vectorial r(*t*) y un vector tangente a la gráfica en $t = t_0$.**

***a*) Hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la gráfica en $t = t_0$.**

***b*) Utilizar las ecuaciones de la recta para aproximar $\mathbf{r}(t_0 + 0.1)$.**

21. $\mathbf{r}(t) = \left\langle t, -t^2, \frac{1}{4}t^3\right\rangle, \quad t_0 = 1$

22. $\mathbf{r}(t) = \left\langle t, \sqrt{25-t^2}, \sqrt{25-t^2}\right\rangle, \quad t_0 = 3$

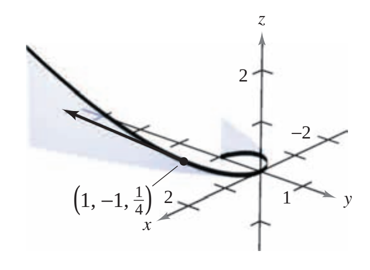


Figura para 21

Figura para 22

En los ejercicios 23 a 28, usar la función aceleración dada para determinar los vectores velocidad y posición. Después hallar la posición en el instante $t = 2$.

23. $\mathbf{a}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

$\mathbf{v}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$

24. $\mathbf{a}(t) = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$

$\mathbf{v}(0) = 4\mathbf{j}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$

25. $\mathbf{a}(t) = t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

$\mathbf{v}(1) = 5\mathbf{j}, \quad \mathbf{r}(1) = \mathbf{0}$

26. $\mathbf{a}(t) = -32\mathbf{k}$

$\mathbf{v}(0) = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(0) = 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

27. $\mathbf{a}(t) = -\cos t\mathbf{i} - \mathrm{sen}\,t\mathbf{j}$

$\mathbf{v}(0) = \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{i}$

28. $\mathbf{a}(t) = e^t\mathbf{i} - 8\mathbf{k}$

$\mathbf{v}(0) = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$

Movimiento de proyectiles **En los ejercicios 29 a 44, usar el modelo para el movimiento de un proyectil, suponiendo que no hay resistencia del aire.**



29. Hallar la función vectorial de la trayectoria de un proyectil lanzado desde una altura de 10 pies sobre el suelo con una velocidad inicial de 88 pies por segundo y con un ángulo de 30° sobre la horizontal. Usar una herramienta de graficación para representar la trayectoria del proyectil.

30. Determinar la altura máxima y el alcance de un proyectil disparado desde una altura de 3 pies sobre el nivel del suelo con velocidad inicial de 900 pies por segundo y con un ángulo de 45° sobre la horizontal.

31. Una pelota de béisbol es golpeada 3 pies sobre el nivel del suelo, se aleja del bate con un ángulo de 45° y es cachada por un jardinero a 3 pies sobre el nivel del suelo y a 300 pies del plato de lanzamiento. ¿Cuál es la rapidez inicial de la pelota y qué altura alcanza?

32. Un jugador de béisbol en segunda base lanza una pelota al jugador de primera base a 90 pies. La pelota es lanzada desde 5 pies sobre el nivel del suelo con una velocidad inicial de 50 millas por hora y con un ángulo de 15° con la horizontal. ¿A qué altura cacha la pelota el jugador de primera base?

33. Eliminar el parámetro t de la función de posición para el movimiento de un proyectil y mostrar que la ecuación rectangular es

$$y = -\frac{16\sec^2\theta}{v_0^2}x^2 + (\tan\theta)x + h.$$

34. La trayectoria de una pelota la da la ecuación rectangular

$y = x - 0.005x^2.$

Usar el resultado del ejercicio 33 para hallar la función de posición. Después hallar la velocidad y la dirección de la pelota en el punto en que ha recorrido 60 pies horizontalmente.


35. ***Modelo matemático*** La trayectoria de una pelota lanzada por un jugador de béisbol es videograbada y después se analiza la grabación con una cuadrícula que cubre la pantalla. La cinta se detiene tres veces y se miden las posiciones de la pelota. Las coordenadas son aproximadamente (0, 6.0), (15, 10.6) y (30, 13.4). (La coordenada x mide la distancia horizontal al jugador en pies y la coordenada y mide la altura en pies.)

a) Usar una herramienta de graficación para hallar un modelo cuadrático para los datos.

b) Usar una herramienta de graficación para representar los datos y la gráfica del modelo.

c) Determinar la altura máxima de la pelota.

d) Hallar la velocidad inicial de la pelota y el ángulo al que fue lanzada.


36. Una pelota de béisbol es golpeada desde una altura de 2.5 pies sobre el nivel del suelo con una velocidad inicial de 140 pies por segundo y con un ángulo de 22° sobre la horizontal. Usar una herramienta de graficación para representar la trayectoria de la pelota y determinar si pasará sobre una valla de 10 pies de altura localizada a 375 pies del plato de lanzamiento.

37. El Rogers Centre en Toronto, Ontario, tiene una cerca en su campo central que tiene 10 pies de altura y está a 400 pies del plato de lanzamiento. Una pelota es golpeada a 3 pies sobre el nivel del suelo y se da el batazo a una velocidad de 100 millas por hora.

a) La pelota se aleja del bate formando un ángulo de $\theta = \theta_0$ con la horizontal. Dar la función vectorial para la trayectoria de la pelota.


b) Usar una herramienta de graficación para representar la función vectorial para $\theta_0 = 10°$, $\theta_0 = 15°$, $\theta_0 = 20°$ y $\theta_0 = 25°$. Usar las gráficas para aproximar el ángulo mínimo requerido para que el golpe sea un *home run*.

c) Determinar analíticamente el ángulo mínimo requerido para que el golpe sea un *home run*.

38. El mariscal de campo de un equipo de fútbol americano lanza un pase a una altura de 7 pies sobre el campo de juego, y el balón de fútbol lo captura un receptor a 30 yardas a una altura de 4 pies. El pase se lanza con un ángulo de 35° con la horizontal.

a) Hallar la rapidez del balón de fútbol al ser lanzado.

b) Hallar la altura máxima del balón de fútbol.

c) Hallar el tiempo que el receptor tiene para alcanzar la posición apropiada después de que el mariscal de campo lanza el balón de fútbol.

39. Un expulsor de pacas consiste en dos bandas de velocidad variable al final del expulsor. Su función es lanzar las pacas a un camión. Al cargar la parte trasera del camión, una paca debe lanzarse a una posición 8 pies hacia arriba y 16 pies detrás del expulsor.

a) Hallar la velocidad inicial mínima de la paca y el ángulo correspondiente al que debe ser lanzada de la expulsora.

b) La expulsora tiene un ángulo fijo de 45°. Hallar la velocidad inicial requerida.

40. Un bombardero vuela a una altitud de 30 000 pies a una velocidad de 540 millas por hora (ver la figura). ¿Cuándo debe lanzar la bomba para que pegue en el blanco? (Dar la respuesta en términos del ángulo de depresión del avión con relación al blanco.) ¿Cuál es la velocidad de la bomba en el momento del impacto?

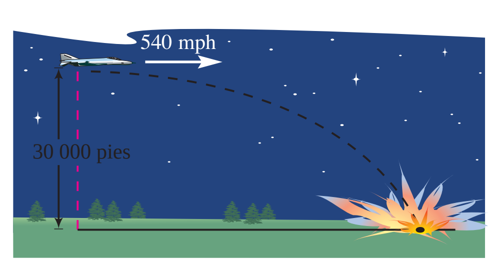


Figura para 40

41. Un disparo de un arma con una velocidad de 1 200 pies por segundo se lanza hacia un blanco a 3 000 pies de distancia. Determinar el ángulo mínimo de elevación del arma.

42. Un proyectil se lanza desde el suelo con un ángulo de 12° con la horizontal. El proyectil debe tener un alcance de 200 pies. Hallar la velocidad inicial mínima requerida.


43. Usar una herramienta de graficación para representar la trayectoria de un proyectil para los valores dados de θ y v_0. En cada caso, usar la gráfica para aproximar la altura máxima y el alcance del proyectil. (Suponer que el proyectil se lanza desde el nivel del suelo.)

a) $\theta = 10°$, $v_0 = 66$ pies/s *b*) $\theta = 10°$, $v_0 = 146$ pies/s

c) $\theta = 45°$, $v_0 = 66$ pies/s *d*) $\theta = 45°$, $v_0 = 146$ pies/s

e) $\theta = 60°$, $v_0 = 66$ pies/s *f*) $\theta = 60°$, $v_0 = 146$ pies/s

44. Hallar el ángulo con el que un objeto debe lanzarse para tener *a*) el alcance máximo y *b*) la altura máxima.

Movimiento de un proyectil **En los ejercicios 45 y 46, usar el modelo para el movimiento de un proyectil, suponiendo que no hay resistencia. [$a(t) = -9.8$ metros por segundo al cuadrado.]**

45. Determinar la altura y el alcance máximos de un proyectil disparado desde una altura de 1.5 metros sobre el nivel del suelo con una velocidad inicial de 100 metros por segundo y con un ángulo de 30° sobre la horizontal.

46. Un proyectil se dispara desde el nivel del suelo con un ángulo de 8° con la horizontal. El proyectil debe tener un alcance de 50 metros. Hallar la velocidad mínima necesaria.

Movimiento cicloidal **En los ejercicios 47 y 48, considerar el movimiento de un punto (o partícula) en la circunferencia de un círculo que rueda. A medida que el círculo rueda genera la cicloide $\mathbf{r}(t) = b(\omega t - \operatorname{sen} \omega t)\mathbf{i} + b(1 - \cos \omega t)\mathbf{j}$, donde ω es la velocidad angular constante del círculo y b es el radio del círculo.**

47. Hallar los vectores velocidad y aceleración de la partícula. Usar los resultados para determinar los instantes en que la rapidez de la partícula será *a*) cero y *b*) máxima.

48. Hallar la velocidad máxima de un punto de un neumático de automóvil de radio 1 pie cuando el automóvil viaja a 60 millas por hora. Comparar esta velocidad con la velocidad del automóvil.

Movimiento circular **En los ejercicios 49 a 52, considerar una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria circular de radio b descrita por $\mathbf{r}(t) = b \cos \omega t\mathbf{i} + b \operatorname{sen} \omega t\mathbf{j}$ donde $\omega = du/dt$ es la velocidad angular constante.**

49. Hallar el vector velocidad y mostrar que es ortogonal a $\mathbf{r}(t)$.

50. *a*) Mostrar que la rapidez de la partícula es $b\omega$.

b) Usar una herramienta de graficación en modo *paramétrico* para representar el círculo para $b = 6$. Probar distintos valores de ω. ¿Dibuja la herramienta de graficación más rápido los círculos para los valores mayores de ω?

51. Hallar el vector aceleración y mostrar que su dirección es siempre hacia el centro del círculo.

52. Mostrar que la magnitud del vector aceleración es $b\omega^2$.

Movimiento circular **En los ejercicios 53 y 54, usar los resultados de los ejercicios 49 a 52.**

53. Una piedra que pesa 1 libra se ata a un cordel de dos pies de largo y se hace girar horizontalmente (ver la figura). El cordel se romperá con una fuerza de 10 libras. Hallar la velocidad máxima que la piedra puede alcanzar sin que se rompa el cordel. (Usar $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, donde $m = \frac{1}{32}$.)

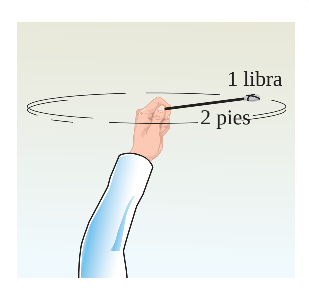


Figura para 53

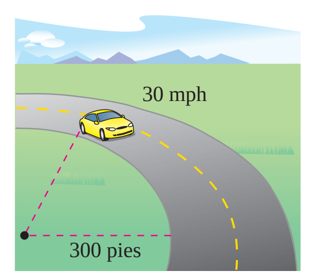


Figura para 54

54. Un automóvil de 3 400 libras está tomando una curva circular de 300 pies de radio a 30 millas por hora (ver la figura). Supuesto que la carretera está nivelada, hallar la fuerza necesaria entre los neumáticos y el pavimento para que el automóvil mantenga la trayectoria circular sin derrapar. (Usar $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, donde $m = 3\,400/32$.) Hallar el ángulo de peralte necesario para que ninguna fuerza de fricción lateral sea ejercida sobre los neumáticos del automóvil.

55. ***Lanzamiento de peso*** La trayectoria de un objeto lanzado con un ángulo θ es

$$\mathbf{r}(t) = (v_0 \cos\theta)t\,\mathbf{i} + \left[h + (v_0 \operatorname{sen}\theta)t - \frac{1}{2}gt^2\right]\mathbf{j}$$

donde v_0 es la rapidez inicial, h es la altura inicial, t es el tiempo en segundos y g es la aceleración debida a la gravedad. Verificar que el objeto permanecerá en el aire

$$t = \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta + \sqrt{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta + 2gh}}{g} \text{ segundos}$$

y recorrerá una distancia horizontal de

$$\frac{v_0^2 \cos\theta}{g}\left(\operatorname{sen}\theta + \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + \frac{2gh}{v_0^2}}\right) \text{ pies.}$$

56. ***Lanzamiento de peso*** Un peso es lanzado desde una altura de $h = 6$ pies con rapidez inicial $v_0 = 45$ pies por segundo y con un ángulo de $\theta = 42.5°$ con la horizontal. Hallar el tiempo total de recorrido y la distancia horizontal recorrida.

57. Demostrar que si un objeto se mueve con rapidez constante, sus vectores velocidad y aceleración son ortogonales.

58. Demostrar que un objeto que se mueve en línea recta a velocidad constante tiene aceleración nula.

59. ***Investigación*** Un objeto sigue una trayectoria elíptica dada por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = 6\cos t\,\mathbf{i} + 3\operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$.

a) Hallar $\mathbf{v}(t)$, $\|\mathbf{v}(t)\|$ y $\mathbf{a}(t)$.

b) Usar una herramienta de graficación para completar la tabla.

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
Rapidez					

c) Representar gráficamente la trayectoria elíptica y los vectores velocidad y aceleración para los valores de t dados en la tabla del inciso *b*).

d) Usar los resultados de los incisos *b*) y *c*) para describir la relación geométrica entre los vectores velocidad y aceleración cuando la rapidez de la partícula aumenta y cuando disminuye.

Para discusión

60. Considerar una partícula que se mueve sobre una trayectoria elíptica descrita por $\mathbf{r}(t) = a\cos\omega t\,\mathbf{i} + b\operatorname{sen}\omega t\,\mathbf{j}$, donde $\omega = d\theta/dt$ es la velocidad angular constante.

a) Encontrar el vector velocidad. ¿Cuál es la rapidez de la partícula?

b) Encontrar el vector aceleración y demostrar que su dirección está siempre hacia el centro de la elipse.

Desarrollo de conceptos

61. Con las propias palabras, explicar la diferencia entre la velocidad de un objeto y su rapidez.

62. ¿Qué se conoce acerca de la rapidez de un objeto si el ángulo entre los vectores velocidad y aceleración es *a*) agudo y *b*) obtuso?

63. ***Redacción*** Considerar una partícula que se mueve sobre la trayectoria $\mathbf{r}_1(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$.

a) Analizar todo cambio en la posición, velocidad o aceleración de la partícula si su posición está dada por la función vectorial $\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}_1(2t)$.

b) Generalizar los resultados a la función posición $\mathbf{r}_3(t) = \mathbf{r}_1(\omega t)$.

64. Cuando t = 0, un objeto está en el punto (0, 1) y tiene un vector velocidad $\mathbf{v}(0) = -\mathbf{i}$. Se mueve con aceleración $\mathbf{a}(t) = \operatorname{sen} t\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j}$. Mostrar que la trayectoria del objeto es un círculo.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 65 a 68, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que pruebe que es falsa.**

65. La aceleración de un objeto es la derivada de la rapidez.

66. La velocidad de un objeto es la derivada de la posición.

67. El vector velocidad apunta en la dirección de movimiento.

68. Si una partícula se mueve a lo largo de una línea recta, entonces los vectores velocidad y aceleración son ortogonales.

12.4 Vectores tangentes y vectores normales

- Hallar un vector unitario tangente en un punto a una curva en el espacio.
- Hallar las componentes tangencial y normal de la aceleración.

Vectores tangentes y vectores normales

En la sección precedente se vio que el vector velocidad apunta en la dirección del movimiento. Esta observación lleva a la definición siguiente, que es válida para cualquier curva suave, no sólo para aquellas en las que el parámetro es el tiempo.

DEFINICIÓN DEL VECTOR UNITARIO TANGENTE

Sea C una curva suave en un intervalo abierto I, representada por $\mathbf{r}$. El **vector unitario tangente $\mathbf{T}(t)$** en t se define como

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}, \quad \mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}.$$

Como se recordará, una curva es *suave* en un intervalo si $\mathbf{r}'$ es continua y distinta de cero en el intervalo. Por tanto, la “suavidad” es suficiente para garantizar que una curva tenga vector unitario tangente.

EJEMPLO 1 Hallar el vector unitario tangente

Hallar el vector unitario tangente a la curva dada por

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$$

cuando $t = 1$.

Solución La derivada de $\mathbf{r}(t)$ es

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j}. \qquad \text{Derivada de } \mathbf{r}(t).$$

Por tanto, el vector unitario tangente es

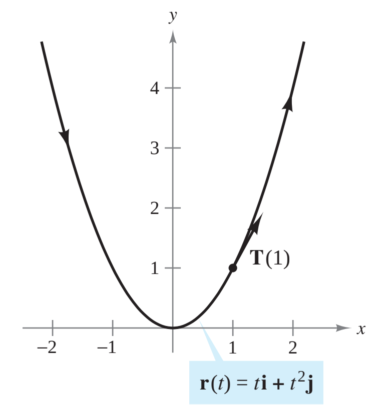
$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \qquad \text{Definición de } \mathbf{T}(t).$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}(\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}). \qquad \text{Sustituir } \mathbf{r}'(t).$$

Cuando $t = 1$, el vector unitario tangente es

$$\mathbf{T}(1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$$

como se muestra en la figura 12.20.



La dirección del vector unitario tangente depende de la orientación de la curva
Figura 12.20

NOTA En el ejemplo 1, hay que observar que la dirección del vector unitario tangente depende de la orientación de la curva. Por ejemplo, si la parábola de la figura 12.20 estuviera dada por

$$\mathbf{r}(t) = -(t-2)\mathbf{i} + (t-2)^2\mathbf{j},$$

aunque $\mathbf{T}(1)$ también representaría el vector unitario tangente en el punto $(1, 1)$, apuntaría en dirección opuesta. Tratar de verificar esto.

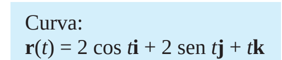
La **recta tangente a una curva** en un punto es la recta que pasa por el punto y es paralela al vector unitario tangente. En el ejemplo 2 se usa el vector unitario tangente para hallar la recta tangente a una hélice en un punto.

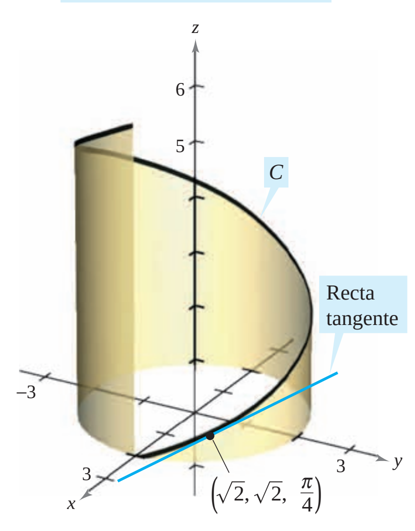
EJEMPLO 2 Hallar la recta tangente a una curva en un punto

Hallar $\mathbf{T}(t)$ y hallar después un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la hélice dada por

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

en el punto $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$.





La recta tangente a una curva en un punto está determinada por el vector unitario tangente en el punto
Figura 12.21

Solución La derivada de $\mathbf{r}(t)$ es $\mathbf{r}'(t) = -2\,\text{sen}\,t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}$, lo que implica que $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{4\,\text{sen}^2 t + 4\cos^2 t + 1} = \sqrt{5}$. Por consiguiente, el vector unitario tangente es

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\,\text{sen}\,t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}).$$ Vector unitario tangente.

En el punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \pi/4)$, $t = \pi/4$ y el vector unitario tangente es

$$\mathbf{T}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-2\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + 2\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(-\sqrt{2}\,\mathbf{i} + \sqrt{2}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

Usando los números directores $a = -\sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$ y $c = 1$, y el punto $(x_1, y_1, z_1) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \pi/4)$, se obtienen las ecuaciones paramétricas siguientes (dadas con el parámetro s).

$$x = x_1 + as = \sqrt{2} - \sqrt{2}s$$
$$y = y_1 + bs = \sqrt{2} + \sqrt{2}s$$
$$z = z_1 + cs = \frac{\pi}{4} + s$$

Esta recta tangente se muestra en la figura 12.21.

En el ejemplo 2 hay una cantidad infinita de vectores que son ortogonales al vector tangente $\mathbf{T}(t)$. Uno de estos vectores es el vector $\mathbf{T}'(t)$. Esto se desprende de la propiedad 7 del teorema 12.2. Es decir,

$$\mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}(t) = \|\mathbf{T}(t)\|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}'(t) = 0.$$

Normalizando el vector $\mathbf{T}'(t)$, se obtiene un vector especial llamado el **vector unitario normal principal**, como se indica en la definición siguiente.

DEFINICIÓN DE VECTOR UNITARIO NORMAL PRINCIPAL

Sea C una curva suave en un intervalo abierto I representada por $\mathbf{r}$. Si $\mathbf{T}'(t) \neq \mathbf{0}$, entonces el **vector unitario normal principal** en t se define como

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}.$$

EJEMPLO 3 Hallar el vector unitario normal principal

Hallar $\mathbf{N}(t)$ y $\mathbf{N}(1)$ para la curva representada por

$$\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j}.$$

Solución Derivando, se obtiene

$$\mathbf{r}'(t) = 3\mathbf{i} + 4t\mathbf{j} \qquad \text{y} \qquad \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{9 + 16t^2}$$

lo que implica que el vector unitario tangente es

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{9 + 16t^2}}(3\mathbf{i} + 4t\mathbf{j}). \qquad \text{Vector unitario tangente.}$$

Usando el teorema 12.2, se deriva $\mathbf{T}(t)$ con respecto a t para obtener

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{9 + 16t^2}}(4\mathbf{j}) - \frac{16t}{(9 + 16t^2)^{3/2}}(3\mathbf{i} + 4t\mathbf{j})$$

$$= \frac{12}{(9 + 16t^2)^{3/2}}(-4t\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$$

$$\|\mathbf{T}'(t)\| = 12\sqrt{\frac{9 + 16t^2}{(9 + 16t^2)^3}} = \frac{12}{9 + 16t^2}.$$

Curva: $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j}$

C

$\mathbf{N}(1) = \frac{1}{5}(-4\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$

$\mathbf{T}(1) = \frac{1}{5}(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j})$

El vector unitario normal principal apunta hacia el lado cóncavo de la curva
Figura 12.22

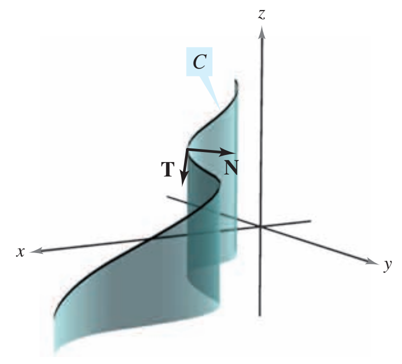
Por tanto, el vector unitario normal principal es

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{9 + 16t^2}}(-4t\mathbf{i} + 3\mathbf{j}). \qquad \text{Vector unitario normal principal.}$$

Cuando $t = 1$, el vector unitario normal principal es

$$\mathbf{N}(1) = \frac{1}{5}(-4\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$$

como se muestra en la figura 12.22.



En todo punto de una curva, un vector unitario normal es ortogonal al vector unitario tangente. El vector unitario normal *principal* apunta hacia la dirección en que gira la curva
Figura 12.23

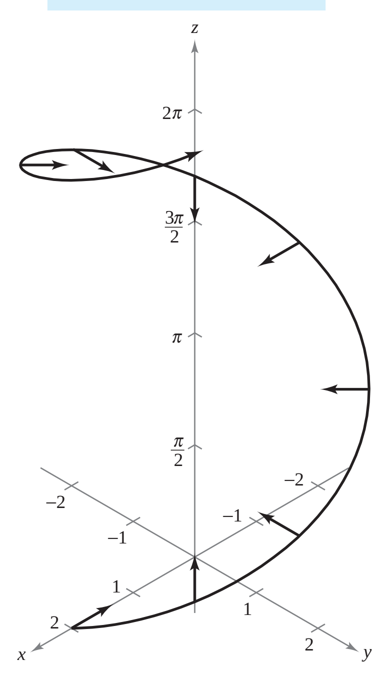
El vector unitario normal principal puede ser difícil de evaluar algebraicamente. En curvas planas, se puede simplificar el álgebra hallando

$$\mathbf{T}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \qquad \text{Vector unitario tangente.}$$

y observando que $\mathbf{N}(t)$ debe ser

$$\mathbf{N}_1(t) = y(t)\mathbf{i} - x(t)\mathbf{j} \qquad \text{o} \qquad \mathbf{N}_2(t) = -y(t)\mathbf{i} + x(t)\mathbf{j}.$$

Como $\sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2} = 1$, se sigue que tanto $\mathbf{N}_1(t)$ como $\mathbf{N}_2(t)$ son vectores unitarios normales. El vector unitario normal *principal* $\mathbf{N}$ es el que apunta hacia el lado cóncavo de la curva, como se muestra en la figura 12.22 (véase ejercicio 94). Esto también es válido para curvas en el espacio. Es decir, si un objeto se mueve a lo largo de la curva C en el espacio, el vector $\mathbf{T}(t)$ apunta hacia la dirección en la que se mueve el objeto, mientras que el vector $\mathbf{N}(t)$ es ortogonal a $\mathbf{T}(t)$ y apunta hacia la dirección en que gira el objeto, como se muestra en la figura 12.23.



$\mathbf{N}(t)$ es horizontal y apunta hacia el eje z
Figura 12.24

EJEMPLO 4 Hallar el vector unitario normal principal

Hallar el vector unitario normal principal para la hélice dada por

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,t\mathbf{j} + t\mathbf{k}.$$

Solución De acuerdo con el ejemplo 2, se sabe que el vector unitario tangente es

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\,\text{sen}\,t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}).$$ Vector unitario tangente.

Así, $\mathbf{T}'(t)$ está dado por

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\cos t\mathbf{i} - 2\,\text{sen}\,t\mathbf{j}).$$

Como $\|\mathbf{T}'(t)\| = 2/\sqrt{5}$, se sigue que el vector unitario normal principal es

$$\begin{aligned}\mathbf{N}(t) &= \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}\\ &= \frac{1}{2}(-2\cos t\mathbf{i} - 2\,\text{sen}\,t\mathbf{j})\\ &= -\cos t\mathbf{i} - \text{sen}\,t\mathbf{j}.\end{aligned}$$ Vector unitario normal principal.

Nótese que este vector es horizontal y apunta hacia el eje z, como se muestra en la figura 12.24.

Componentes tangencial y normal de la aceleración

Ahora se vuelve al problema de describir el movimiento de un objeto a lo largo de una curva. En la sección anterior, se vio que si un objeto se mueve con *rapidez constante*, los vectores velocidad y aceleración son perpendiculares. Esto parece razonable, porque la rapidez no sería constante si alguna aceleración actuara en dirección del movimiento. Esta afirmación se puede verificar observando que

$$\mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

si $\|\mathbf{r}'(t)\|$ es una constante. (Ver la propiedad 7 del teorema 12.2.)

Sin embargo, si un objeto viaja con *rapidez variable*, los vectores velocidad y aceleración no necesariamente son perpendiculares. Por ejemplo, se vio que en un proyectil el vector aceleración siempre apunta hacia abajo, sin importar la dirección del movimiento.

En general, parte de la aceleración (la componente tangencial) actúa en la línea del movimiento y otra parte (la componente normal) actúa perpendicular a la línea del movimiento. Para determinar estas dos componentes, se pueden usar los vectores unitarios $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$, que juegan un papel análogo a $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ cuando se representan los vectores en el plano. El teorema siguiente establece que el vector aceleración se encuentra en el plano determinado por $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$.

TEOREMA 12.4 VECTOR ACELERACIÓN

Si $\mathbf{r}(t)$ es el vector posición de una curva suave C y $\mathbf{N}(t)$ existe, entonces el vector aceleración $\mathbf{a}(t)$ se encuentra en el plano determinado por $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$.

Demostración Para simplificar la notación, se escribe $\mathbf{T}$ en lugar de $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{T}'$ en lugar de $\mathbf{T}'(t)$, y así sucesivamente. Como $\mathbf{T} = \mathbf{r}'/\|\mathbf{r}'\| = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$, se sigue que

$$\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\mathbf{T}.$$

Por derivación, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \mathbf{v}' &= D_t[\|\mathbf{v}\|]\mathbf{T} + \|\mathbf{v}\|\mathbf{T}' && \text{Regla del producto.} \\ &= D_t[\|\mathbf{v}\|]\mathbf{T} + \|\mathbf{v}\|\mathbf{T}'\left(\frac{\|\mathbf{T}'\|}{\|\mathbf{T}'\|}\right) \\ &= D_t[\|\mathbf{v}\|]\mathbf{T} + \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{T}'\|\,\mathbf{N}. && \mathbf{N} = \mathbf{T}'/\|\mathbf{T}'\| \end{aligned}$$

Como $\mathbf{a}$ se expresa mediante una combinación lineal de $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$, se sigue que $\mathbf{a}$ está en el plano determinado por $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$.

A los coeficientes de $\mathbf{T}$ y de $\mathbf{N}$ en la demostración del teorema 12.4 se les conoce como **componentes tangencial y normal de la aceleración** y se denotan por $a_{\mathbf{T}} = D_t[\|\mathbf{v}\|]$ y $a_{\mathbf{N}} = \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{T}'\|$. Por tanto, se puede escribir

$$\mathbf{a}(t) = a_{\mathbf{T}}\mathbf{T}(t) + a_{\mathbf{N}}\mathbf{N}(t).$$

El teorema siguiente da algunas fórmulas útiles para $a_{\mathbf{N}}$ y $a_{\mathbf{T}}$.

TEOREMA 12.5 COMPONENTES TANGENCIAL Y NORMAL DE LA ACELERACIÓN

Si $\mathbf{r}(t)$ es el vector posición de una curva suave C [para la cual $\mathbf{N}(t)$ existe], entonces las componentes tangencial y normal de la aceleración son las siguientes.

$$a_{\mathbf{T}} = D_t[\|\mathbf{v}\|] = \mathbf{a}\cdot\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|}$$

$$a_{\mathbf{N}} = \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{T}'\| = \mathbf{a}\cdot\mathbf{N} = \frac{\|\mathbf{v}\times\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_{\mathbf{T}}^2}$$

Nótese que $a_{\mathbf{N}} \geq 0$. A la componente normal de la aceleración también se le llama **componente centrípeta de la aceleración**.

Las componentes tangencial y normal de la aceleración se obtienen proyectando **a** sobre **T** y **N**
Figura 12.25

DEMOSTRACIÓN Nótese que a se encuentra en el plano de $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$. Por tanto, se puede usar la figura 12.25 para concluir que, en cualquier instante t, las componentes de la proyección del vector aceleración sobre $\mathbf{T}$ y sobre $\mathbf{N}$ están dadas por $a_{\mathbf{T}} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{T}$ y $a_{\mathbf{N}} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{N}$, respectivamente. Además, como $\mathbf{a} = \mathbf{v}'$ y $\mathbf{T} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$, se tiene

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{T}} &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{T} \\ &= \mathbf{T}\cdot\mathbf{a} \\ &= \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\cdot\mathbf{a} \\ &= \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|}. \end{aligned}$$

En los ejercicios 96 y 97 se pide demostrar las otras partes del teorema.

NOTA Las fórmulas del teorema 12.5, junto con algunas otras fórmulas de este capítulo, se resumen en la página 877.

EJEMPLO 5 Componentes tangencial y normal de la aceleración

Hallar las componentes tangencial y normal de la aceleración para el vector posición dado por $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} - t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$.

Solución Para empezar se halla la velocidad, la rapidez y la aceleración.

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$$
$$\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{9 + 1 + 4t^2} = \sqrt{10 + 4t^2}$$
$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = 2\mathbf{k}$$

De acuerdo con el teorema 12.5, la componente tangencial de la aceleración es

$$a_{\mathbf{T}} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{4t}{\sqrt{10 + 4t^2}}$$ Componente tangencial de la aceleración.

y como

$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & 2t \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$$

la componente normal de la aceleración es

$$a_{\mathbf{N}} = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\sqrt{4 + 36}}{\sqrt{10 + 4t^2}} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10 + 4t^2}}.$$ Componente normal de la aceleración.

NOTA En el ejemplo 5 se podría haber usado la fórmula alternativa siguiente para $a_{\mathbf{N}}$.

$$a_{\mathbf{N}} = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_{\mathbf{T}}^2} = \sqrt{(2)^2 - \frac{16t^2}{10 + 4t^2}} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10 + 4t^2}}$$

EJEMPLO 6 Hallar $a_{\mathbf{T}}$ y $a_{\mathbf{N}}$ para una hélice circular

Hallar las componentes tangencial y normal de la aceleración para la hélice dada por $\mathbf{r}(t) = b \cos t\mathbf{i} + b \operatorname{sen} t\mathbf{j} + ct\mathbf{k}$, $b > 0$.

Solución

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = -b \operatorname{sen} t\mathbf{i} + b \cos t\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$
$$\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{b^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t + c^2} = \sqrt{b^2 + c^2}$$
$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = -b \cos t\mathbf{i} - b \operatorname{sen} t\mathbf{j}$$

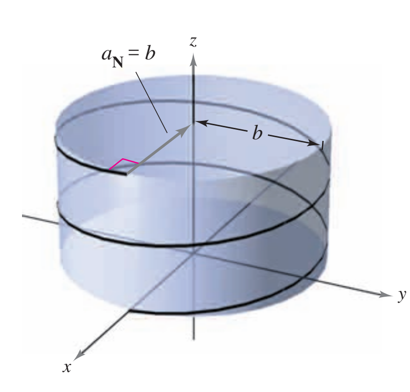
De acuerdo con el teorema 12.5, la componente tangencial de la aceleración es

$$a_{\mathbf{T}} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{b^2 \operatorname{sen} t \cos t - b^2 \operatorname{sen} t \cos t + 0}{\sqrt{b^2 + c^2}} = 0.$$ Componente tangencial de la aceleración.

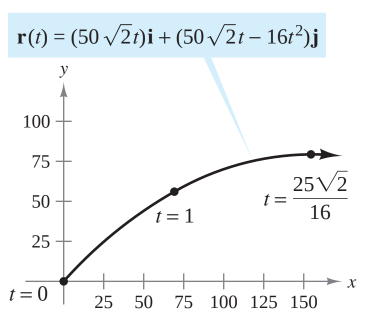
Como $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{b^2 \cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t} = b$, se puede usar la fórmula alternativa para la componente normal de la aceleración para obtener

$$a_{\mathbf{N}} = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_{\mathbf{T}}^2} = \sqrt{b^2 - 0^2} = b.$$ Componente normal de la aceleración.

Nótese que la componente normal de la aceleración es igual a la magnitud de la aceleración. En otras palabras, puesto que la rapidez es constante, la aceleración es perpendicular a la velocidad. Ver la figura 12.26.



La componente normal de la aceleración es igual al radio del cilindro alrededor del cual la hélice gira en espiral
Figura 12.26



La trayectoria de un proyectil
Figura 12.27

EJEMPLO 7 Movimiento de un proyectil

El vector posición para el proyectil mostrado en la figura 12.27 está dado por

$$\mathbf{r}(t) = \left(50\sqrt{2}\,t\right)\mathbf{i} + \left(50\sqrt{2}\,t - 16t^2\right)\mathbf{j}. \qquad \text{Vector posición.}$$

Hallar la componente tangencial de la aceleración cuando $t = 0$, 1 y $25\sqrt{2}/16$.

Solución

$$\mathbf{v}(t) = 50\sqrt{2}\,\mathbf{i} + \left(50\sqrt{2} - 32t\right)\mathbf{j} \qquad \text{Vector velocidad.}$$

$$\|\mathbf{v}(t)\| = 2\sqrt{50^2 - 16(50)\sqrt{2}t + 16^2t^2} \qquad \text{Velocidad.}$$

$$\mathbf{a}(t) = -32\mathbf{j} \qquad \text{Vector aceleración.}$$

La componente tangencial de la aceleración es

$$a_{\mathbf{T}}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{a}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|} = \frac{-32(50\sqrt{2} - 32t)}{2\sqrt{50^2 - 16(50)\sqrt{2}t + 16^2t^2}}. \qquad \text{Componente tangencial de la aceleración.}$$

En los instantes especificados, se tiene

$$a_{\mathbf{T}}(0) = \frac{-32\left(50\sqrt{2}\right)}{100} = -16\sqrt{2} \approx -22.6$$

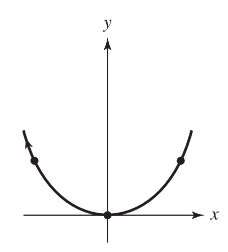
$$a_{\mathbf{T}}(1) = \frac{-32\left(50\sqrt{2} - 32\right)}{2\sqrt{50^2 - 16(50)\sqrt{2} + 16^2}} \approx -15.4$$

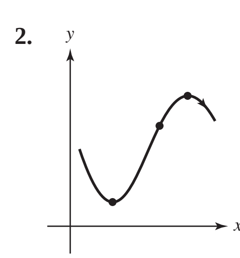
$$a_{\mathbf{T}}\left(\frac{25\sqrt{2}}{16}\right) = \frac{-32\left(50\sqrt{2} - 50\sqrt{2}\right)}{50\sqrt{2}} = 0.$$

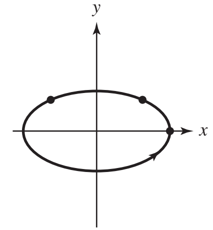
En la figura 12.27 se puede ver que, a la altura máxima, cuando $t = 25\sqrt{2}/16$, la componente tangencial es 0. Esto es razonable porque en ese punto la dirección del movimiento es horizontal y la componente tangencial de la aceleración es igual a la componente horizontal de la aceleración.

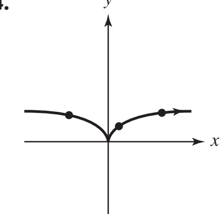
12.4 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, dibujar el vector unitario tangente y los vectores normales a los puntos dados.

1.


2.


3.


4.


En los ejercicios 5 a 10, hallar el vector unitario tangente a la curva en el valor especificado del parámetro.

5. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}, \quad t = 1$
6. $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j}, \quad t = 1$
7. $\mathbf{r}(t) = 4\cos t\mathbf{i} + 4\,\text{sen}\,t\mathbf{j}, \quad t = \frac{\pi}{4}$
8. $\mathbf{r}(t) = 6\cos t\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,t\mathbf{j}, \quad t = \frac{\pi}{3}$
9. $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} - \ln t\mathbf{j}, \quad t = e$
10. $\mathbf{r}(t) = e^t\cos t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j}, \quad t = 0$

En los ejercicios 11 a 16, hallar el vector unitario tangente $\mathbf{T}(t)$ y hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la curva en el espacio en el punto *P*.

11. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad P(0, 0, 0)$
12. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \frac{4}{3}\mathbf{k}, \quad P\left(1, 1, \frac{4}{3}\right)$
13. $\mathbf{r}(t) = 3\cos t\mathbf{i} + 3\,\text{sen}\,t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad P(3, 0, 0)$
14. $\mathbf{r}(t) = \left\langle t, t, \sqrt{4 - t^2}\right\rangle, \quad P\left(1, 1, \sqrt{3}\right)$
15. $\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t, 2\,\text{sen}\,t, 4\rangle, \quad P\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4\right)$
16. $\mathbf{r}(t) = \langle 2\,\text{sen}\,t, 2\cos t, 4\,\text{sen}^2\,t\rangle, \quad P\left(1, \sqrt{3}, 1\right)$

CAS **En los ejercicios 17 y 18, usar un sistema algebraico por computadora para representar la gráfica de la curva en el espacio. Después hallar T(t) y un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva en el espacio en el punto *P*. Representar la gráfica de la recta tangente.**

17. $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, 2t^3/3\rangle, \quad P(3, 9, 18)$

18. $\mathbf{r}(t) = 3\cos t\,\mathbf{i} + 4\,\text{sen}\, t\,\mathbf{j} + \frac{1}{2}t\,\mathbf{k}, \quad P(0, 4, \pi/4)$

Aproximación lineal **En los ejercicios 19 y 20, hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la gráfica en $t = t_0$ y utilizar las ecuaciones de la recta para aproximar r(t_0 + 0.1).**

19. $\mathbf{r}(t) = \langle t, \ln t, \sqrt{t}\rangle, \quad t_0 = 1$

20. $\mathbf{r}(t) = \langle e^{-t}, 2\cos t, 2\,\text{sen}\, t\rangle, \quad t_0 = 0$

En los ejercicios 21 y 22, verificar que las curvas en el espacio se cortan en los valores dados de los parámetros. Hallar el ángulo entre los vectores tangentes a las curvas en el punto de intersección.

21. $\mathbf{r}(t) = \langle t - 2, t^2, \frac{1}{2}t\rangle, \quad t = 4$

$\mathbf{u}(s) = \langle \frac{1}{4}s, 2s, \sqrt[3]{s}\rangle, \quad s = 8$

22. $\mathbf{r}(t) = \langle t, \cos t, \text{sen}\, t\rangle, \quad t = 0$

$\mathbf{u}(s) = \langle -\frac{1}{2}\text{sen}^2 s - \text{sen}\, s, 1 - \frac{1}{2}\text{sen}^2 s - \text{sen}\, s, \frac{1}{2}\text{sen}\, s\cos s + \frac{1}{2}s\rangle, \quad s = 0$

En los ejercicios 23 a 30, encontrar el vector unitario normal principal a la curva en el valor especificado del parámetro.

23. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j}, \quad t = 2$

24. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{6}{t}\mathbf{j}, \quad t = 3$

25. $\mathbf{r}(t) = \ln t\,\mathbf{i} + (t + 1)\mathbf{j}, \quad t = 2$

26. $\mathbf{r}(t) = \pi\cos t\,\mathbf{i} + \pi\,\text{sen}\, t\mathbf{j}, \quad t = \frac{\pi}{6}$

27. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \ln t\,\mathbf{k}, \quad t = 1$

28. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}, \quad t = 0$

29. $\mathbf{r}(t) = 6\cos t\,\mathbf{i} + 6\,\text{sen}\, t\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad t = \frac{3\pi}{4}$

30. $\mathbf{r}(t) = \cos 3t\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\, 3t\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad t = \pi$

En los ejercicios 31 a 34, hallar v(t), a(t), T(t) y N(t) (si existe) para un objeto que se mueve a lo largo de la trayectoria dada por la función vectorial r(t). Usar los resultados para determinar la forma de la trayectoria. ¿Es constante la rapidez del objeto o cambiante?

31. $\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i}$

32. $\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} - 2t\mathbf{j}$

33. $\mathbf{r}(t) = 4t^2\mathbf{i}$

34. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

En los ejercicios 35 a 44, hallar T(t), N(t), a_T y a_N para la curva plana *t* en el instante r(t).

35. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j}, \quad t = 1$

36. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}, \quad t = 1$

37. $\mathbf{r}(t) = (t - t^3)\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j}, \quad t = 1$

38. $\mathbf{r}(t) = (t^3 - 4t)\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j}, \quad t = 0$

39. $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-2t}\mathbf{j}, \quad t = 0$

40. $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad t = 0$

41. $\mathbf{r}(t) = e^t\cos t\,\mathbf{i} + e^t\,\text{sen}\, t\mathbf{j}, \quad t = \frac{\pi}{2}$

42. $\mathbf{r}(t) = a\cos\omega t\,\mathbf{i} + b\,\text{sen}\,\omega t\mathbf{j}, \quad t = 0$

43. $\mathbf{r}(t) = \langle\cos\omega t + \omega t\,\text{sen}\,\omega t, \text{sen}\,\omega t - \omega t\cos\omega t\rangle, \quad t = t_0$

44. $\mathbf{r}(t) = \langle\omega t - \text{sen}\,\omega t, 1 - \cos\omega t\rangle, \quad t = t_0$

Movimiento circular **En los ejercicios 45 a 48, considerar un objeto que se mueve según la función de posición**

$$\mathbf{r}(t) = a\cos\omega t\,\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,\omega t\,\mathbf{j}.$$

45. Hallar T(t), N(t), a_T y a_N.

46. Determinar las direcciones de **T** y **N** en relación con la función de posición **r**.

47. Determinar la rapidez del objeto en cualquier instante t y explicar su valor en relación con el valor de a_T.

48. Si la velocidad angular ω se reduce a la mitad, ¿en qué factor cambia a_N?

En los ejercicios 49 a 54, dibujar la gráfica de la curva plana dada por la función vectorial, y, en el punto sobre la curva determinada por r(t_0), dibujar los vectores T y N. Observar que N apunta hacia el lado cóncavo de la curva.

	Función	*Instante*
49.	$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j}$	$t_0 = 2$
50.	$\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t\mathbf{j}$	$t_0 = 1$
51.	$\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} + 4t^2\mathbf{j}$	$t_0 = \frac{1}{4}$
52.	$\mathbf{r}(t) = (2t + 1)\mathbf{i} - t^2\mathbf{j}$	$t_0 = 2$
53.	$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\, t\mathbf{j}$	$t_0 = \frac{\pi}{4}$
54.	$\mathbf{r}(t) = 3\cos t\,\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\, t\mathbf{j}$	$t_0 = \pi$

En los ejercicios 55 a 62, hallar T(t), N(t), a_T y a_N en el instante dado *t* para la curva espacial r(t). [*Sugerencia:* Hallar a(t), T(t) y a_N. Resolver para N en la ecuación a(t) = a_TT + a_NN.]

	Función	*Instante*
55.	$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} - 3t\mathbf{k}$	$t = 1$
56.	$\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} - 4t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$	$t = 2$
57.	$\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \text{sen}\, t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$	$t = \frac{\pi}{3}$
58.	$\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} - t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$	$t = -1$
59.	$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{t^2}{2}\mathbf{k}$	$t = 1$
60.	$\mathbf{r}(t) = (2t - 1)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} - 4t\mathbf{k}$	$t = 2$
61.	$\mathbf{r}(t) = e^t\,\text{sen}\, t\,\mathbf{i} + e^t\cos t\,\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$	$t = 0$
62.	$\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$	$t = 0$

CAS **En los ejercicios 63 y 66, usar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la curva espacial. Entonces hallar T(t), N(t), $a_{\mathbf{T}}$ y $a_{\mathbf{N}}$ en el instante dado t. Dibujar T(t) y N(t) en la curva en el espacio.**

Función	*Instante*
63. $\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} + 3\cos t\mathbf{j} + 3\,\text{sen}\,t\mathbf{k}$	$t = \frac{\pi}{2}$
64. $\mathbf{r}(t) = (2 + \cos t)\mathbf{i} + (1 - \text{sen}\,t)\mathbf{j} + \frac{t}{3}\mathbf{k}$	$t = \pi$
65. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + \frac{t^2}{2}\mathbf{k}$	$t = 2$
66. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$	$t = 1$

Desarrollo de conceptos

67. Definir el vector unitario tangente, el vector unitario normal principal, y las componentes tangencial y normal de la aceleración.

68. ¿Cuál es la relación entre el vector unitario tangente y la orientación de una curva? Explicar.

69. *a*) Describir el movimiento de una partícula si la componente normal de la aceleración es 0.

b) Describir el movimiento de una partícula si la componente tangencial de la aceleración es 0.

Para discusión

70. Un objeto se mueve a lo largo de la trayectoria dada por

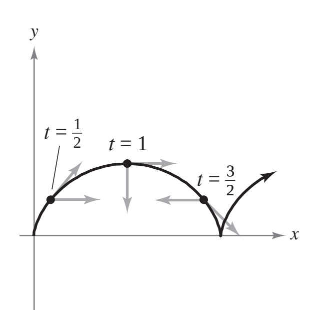
$\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + 4t\mathbf{j}$.

Encontrar $v(t)$, $a(t)$ $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$ (si existe). ¿Cuál es la forma de la trayectoria? ¿Es constante o variable la velocidad del objeto?

71. ***Movimiento cicloidal*** La figura muestra la trayectoria de una partícula representada por la función vectorial

$\mathbf{r}(t) = \langle \pi t - \text{sen}\,\pi t, 1 - \cos \pi t \rangle$.

La figura muestra también los vectores $\mathbf{v}(t)/\|\mathbf{v}(t)\|$ y $\mathbf{a}(t)/\|\mathbf{a}(t)\|$ en los valores indicados de t.



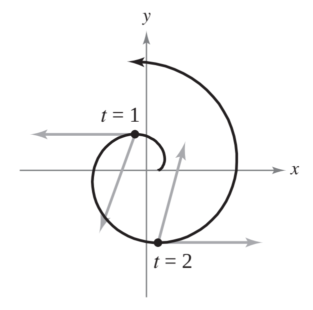
a) Hallar $a_{\mathbf{T}}$ y $a_{\mathbf{N}}$ en $t = \frac{1}{2}$, $t = 1$ y $t = \frac{3}{2}$.

b) En cada uno de los valores indicados de t, determinar si la rapidez de la partícula aumenta o disminuye. Dar razones para las respuestas.

72. ***Movimiento a lo largo de una involuta de un círculo*** La figura muestra una partícula que sigue la trayectoria dada por

$\mathbf{r}(t) = \langle \cos \pi t + \pi t\,\text{sen}\,\pi t, \text{sen}\,\pi t - \pi t \cos \pi t \rangle$.

La figura muestra también los vectores $\mathbf{v}(t)$ y $\mathbf{a}(t)$ para $t = 1$ y $t = 2$.



a) Hallar $a_{\mathbf{T}}$ y $a_{\mathbf{N}}$ en $t = 1$ y $t = 2$.

b) Determinar si la rapidez de la partícula aumenta o disminuye en cada uno de los valores indicados de t. Dar razones para las respuestas.

En los ejercicios 73 a 78, hallar los vectores T y N, y el vector unitario binormal B = T × N, de la función vectorial r(t) en el valor dado de t.

73. $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,t\mathbf{j} + \frac{t}{2}\mathbf{k}$

$t_0 = \frac{\pi}{2}$

74. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{t^3}{3}\mathbf{k}$

$t_0 = 1$

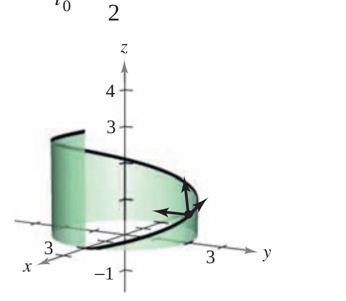


Figura para 73

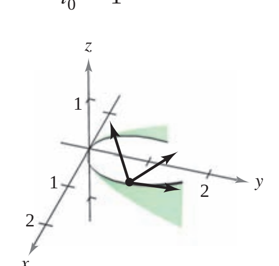


Figura para 74

75. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \text{sen}\,t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k}$, $t_0 = \frac{\pi}{4}$

76. $\mathbf{r}(t) = 2e^t\mathbf{i} + e^t\cos t\mathbf{j} + e^t\,\text{sen}\,t\mathbf{k}$, $t_0 = 0$

77. $\mathbf{r}(t) = 4\,\text{sen}\,t\mathbf{i} + 4\cos t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$, $t_0 = \frac{\pi}{3}$

78. $\mathbf{r}(t) = 3\cos 2t\mathbf{i} + 3\,\text{sen}\,2t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $t_0 = \frac{\pi}{4}$

79. ***Movimiento de un proyectil*** Hallar las componentes tangencial y normal de la aceleración de un proyectil disparado con un ángulo θ con la horizontal y con rapidez inicial v_0. ¿Cuáles son las componentes cuando el proyectil está en su altura máxima?

80. ***Movimiento de un proyectil*** Utilizar los resultados del ejercicio 79 para hallar las componentes tangencial y normal de la aceleración de un proyectil disparado con un ángulo de 45° con la horizontal con rapidez inicial de 150 pies por segundo. ¿Cuáles son las componentes cuando el proyectil está en su altura máxima?

81. ***Movimiento de un proyectil*** Un proyectil se lanza con velocidad inicial de 120 pies por segundo desde 5 pies de altura y con un ángulo de 30° con la horizontal.

a) Determinar la función vectorial de la trayectoria del proyectil.

b) Usar una herramienta de graficación para representar la trayectoria y aproximar la altura máxima y el alcance del proyectil.

c) Hallar $\mathbf{v}(t)$, $\|\mathbf{v}(t)\|$ y $\mathbf{a}(t)$.

d) Usar una herramienta de graficación para completar la tabla.

t	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
Velocidad						

e) Usar una herramienta de graficación para representar las funciones escalares $a_{\mathbf{T}}$ y $a_{\mathbf{N}}$. ¿Cómo cambia la velocidad del proyectil cuando $a_{\mathbf{T}}$ y $a_{\mathbf{N}}$ tienen signos opuestos?

82. ***Movimiento de un proyectil*** Un proyectil se lanza con velocidad inicial de 220 pies por segundo desde una altura de 4 pies y con un ángulo de 45° con la horizontal.

a) Determinar la función vectorial de la trayectoria del proyectil.

b) Usar una herramienta de graficación para representar la trayectoria y aproximar la altura máxima y el alcance del proyectil.

c) Hallar $\mathbf{v}(t)$, $\|\mathbf{v}(t)\|$ y $\mathbf{a}(t)$.

d) Usar una herramienta de graficación para completar la tabla.

t	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
Velocidad						

83. ***Control del tráfico aéreo*** Debido a una tormenta, los controladores aéreos en tierra indican a un piloto que vuela a una altitud de 4 millas que efectúe un giro de 90° y ascienda a una altitud de 4.2 millas. El modelo de la trayectoria del avión durante esta maniobra es

$$\mathbf{r}(t) = \langle 10 \cos 10\pi t, 10 \operatorname{sen} 10\pi t, 4 + 4t \rangle, \quad 0 \leq t \leq \tfrac{1}{20}$$

donde *t* es el tiempo en horas y **r** es la distancia en millas.

a) Determinar la rapidez del avión.

CAS *b*) Usar un sistema algebraico por computadora y calcular $a_{\mathbf{T}}$ y $a_{\mathbf{N}}$. ¿Por qué una de éstas es igual a 0?

84. ***Movimiento de un proyectil*** Un avión volando a una altitud de 36 000 pies con rapidez de 600 millas por hora deja caer una bomba. Hallar las componentes tangencial y normal de la aceleración que actúan sobre la bomba.

85. ***Aceleración centrípeta*** Un objeto, atado al extremo de una cuerda, gira con rapidez constante, de acuerdo con la función de posición dada en los ejercicios 45 a 48.

a) Si la velocidad angular ω se duplica, ¿cómo se modifica la componente centrípeta de la aceleración?

b) Si la velocidad angular no se modifica pero la longitud de la cuerda se reduce a la mitad, ¿cómo cambia la componente centrípeta de la aceleración?

86. ***Fuerza centrípeta*** Un objeto de masa *m* se mueve con rapidez constante *v* siguiendo una trayectoria circular de radio *r*. La fuerza requerida para producir la componente centrípeta de la aceleración se llama *fuerza centrípeta* y está dada por $F = mv^2/r$. La ley de Newton de la gravitación universal establece que $F = GMm/d^2$, donde *d* es la distancia entre los centros de los dos cuerpos de masas *M* y *m*, y *G* es una constante gravitatoria. Usar esta ley para mostrar que la rapidez requerida para el movimiento circular es $v = \sqrt{GM/r}$.

Velocidad orbital **En los ejercicios 87 a 90, usar el resultado del ejercicio 86 para hallar la rapidez necesaria para la órbita circular dada alrededor de la Tierra. Tomar $GM = 9.56 \times 10^4$ millas cúbicas por segundo al cuadrado, y suponer que el radio de la Tierra es 4 000 millas.**

87. La órbita de un transbordador espacial que viaja a 115 millas sobre la superficie de la Tierra.

88. La órbita de un transbordador espacial que viaja a 245 millas sobre la superficie de la Tierra.

89. La órbita de un satélite de detección térmica que viaja a 385 millas sobre la superficie de la Tierra.

90. La órbita de un satélite de comunicación que está en órbita geosíncrona a *r* millas sobre la superficie de la Tierra. [El satélite realiza una órbita por día sideral (aproximadamente 23 horas, 56 minutos) y, por consiguiente, parece permanecer estacionario sobre un punto en la Tierra.]

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 91 y 92, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que muestre que es falsa.**

91. Si el indicador de velocidad de un automóvil es constante, entonces el automóvil no puede estar acelerando.

92. Si $a_{\mathbf{N}} = 0$ en un objeto en movimiento, entonces el objeto se mueve en una línea recta.

93. Una partícula sigue una trayectoria dada por $\mathbf{r}(t) = \cosh(bt)\mathbf{i} + \operatorname{senh}(bt)\mathbf{j}$ donde *b* es una constante positiva.

a) Mostrar que la trayectoria de la partícula es una hipérbola.

b) Mostrar que $\mathbf{a}(t) = b^2\,\mathbf{r}(t)$.

94. Mostrar que el vector unitario normal principal **N** apunta hacia el lado cóncavo de una curva plana.

95. Mostrar que en un objeto que se mueve en línea recta el vector $\mathbf{T}'(t)$ es **0**.

96. Mostrar que $a_{\mathbf{N}} = \dfrac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|}$.

97. Mostrar que $a_{\mathbf{N}} = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_{\mathbf{T}}^2}$.

Preparación del examen Putnam

98. Una partícula de masa unitaria se mueve en línea recta bajo la acción de una fuerza que es función $f(v)$ de la velocidad *v* de la partícula, pero no se conoce la forma de esta función. Se observa el movimiento y se encuentra que la distancia *x* recorrida en el tiempo *t* está relacionada con *t* por medio de la fórmula $x = at + bt^2 + ct^3$, donde *a*, *b* y *c* tienen valores numéricos determinados por la observación del movimiento. Hallar la función $f(v)$ para el rango de *v* cubierto en el experimento.

12.5 Longitud de arco y curvatura

- Calcular la longitud de arco de una curva en el espacio.
- Utilizar el parámetro de longitud de arco para describir una curva plana o curva en el espacio.
- Calcular la curvatura de una curva en un punto en la curva.
- Utilizar una función vectorial para calcular la fuerza de rozamiento.

Longitud de arco

En la sección 10.3 se vio que la longitud de arco de una curva *plana* suave C dada por las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$ y $y = y(t)$, $a \le t \le b$, es

$$s = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt.$$

En forma vectorial, donde C está dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, se puede expresar esta ecuación de la longitud de arco como

$$s = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt.$$

La fórmula para la longitud de arco de una curva plana tiene una extensión natural a una curva suave en el *espacio*, como se establece en el teorema siguiente.

EXPLORACIÓN

Fórmula para la longitud de arco La fórmula para la longitud de arco de una curva en el espacio está dada en términos de las ecuaciones paramétricas que se usan para representar la curva. ¿Significa esto que la longitud de arco de la curva depende del parámetro que se use? ¿Sería deseable que fuera así? Explicar el razonamiento.

Ésta es una representación paramétrica diferente de la curva del ejemplo 1.

$$\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \frac{4}{3}t^3\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^4\mathbf{k}$$

Hallar la longitud de arco desde $t = 0$ hasta $t = \sqrt{2}$ y comparar el resultado con el encontrado en el ejemplo 1.

TEOREMA 12.6 LONGITUD DE ARCO DE UNA CURVA EN EL ESPACIO

Si C es una curva suave dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, en un intervalo $[a, b]$, entonces la longitud de arco de C en el intervalo es

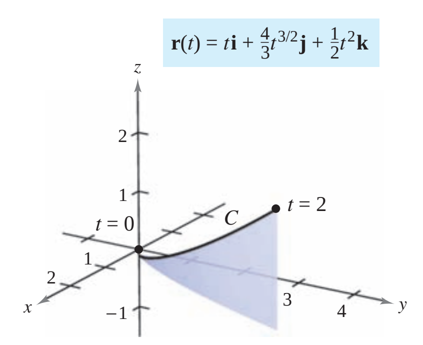
$$s = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt.$$

EJEMPLO 1 Hallar la longitud de arco de una curva en el espacio

Hallar la longitud de arco de la curva dada por

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{4}{3}t^{3/2}\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}$$

desde $t = 0$ hasta $t = 2$, como se muestra en la figura 12.28.



A medida que t crece de 0 a 2, el vector $\mathbf{r}(t)$ traza una curva
Figura 12.28

Solución Utilizando $x(t) = t, y(t) = \frac{4}{3}t^{3/2}$ y $z(t) = \frac{1}{2}t^2$, se obtiene $x'(t) = 1$, $y'(t) = 2t^{1/2}$ y $z'(t) = t$. Por tanto, la longitud de arco desde $t = 0$ hasta $t = 2$ está dada por

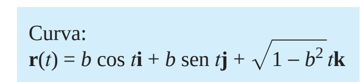
$$s = \int_0^2 \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt \quad \text{Fórmula para longitud de arco.}$$

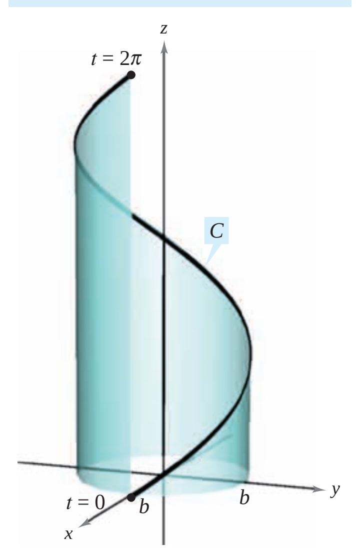
$$= \int_0^2 \sqrt{1 + 4t + t^2}\, dt$$

$$= \int_0^2 \sqrt{(t+2)^2 - 3}\, dt \quad \text{Tablas de integración (apéndice B), fórmula 26.}$$

$$= \left[\frac{t+2}{2}\sqrt{(t+2)^2 - 3} - \frac{3}{2}\ln\left|(t+2) + \sqrt{(t+2)^2 - 3}\right|\right]_0^2$$

$$= 2\sqrt{13} - \frac{3}{2}\ln\left(4 + \sqrt{13}\right) - 1 + \frac{3}{2}\ln 3 \approx 4.816.$$





Un giro de la hélice
Figura 12.29

EJEMPLO 2 Hallar la longitud de arco de una hélice

Hallar la longitud de un giro de la hélice dada por

$$\mathbf{r}(t) = b \cos t\mathbf{i} + b \text{ sen } t\mathbf{j} + \sqrt{1 - b^2}\, t\mathbf{k}$$

como se muestra en la figura 12.29.

Solución Se comienza hallando la derivada.

$$\mathbf{r}'(t) = -b \text{ sen } t\mathbf{i} + b \cos t\mathbf{j} + \sqrt{1 - b^2}\,\mathbf{k} \qquad \text{Derivada.}$$

Ahora, usando la fórmula para la longitud de arco, se puede encontrar la longitud de un giro de la hélice integrando $\|\mathbf{r}'(t)\|$ desde 0 hasta 2π.

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt \qquad \text{Fórmula para la longitud de arco.} \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{b^2(\text{sen}^2 t + \cos^2 t) + (1 - b^2)}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt \\ &= t \Big]_0^{2\pi} = 2\pi. \end{aligned}$$

Por tanto, la longitud es 2π unidades.

Parámetro longitud de arco

Se ha visto que las curvas pueden representarse por medio de funciones vectoriales de maneras diferentes, dependiendo del parámetro que se elija. Para el *movimiento* a lo largo de una curva, el parámetro adecuado es el tiempo t. Sin embargo, cuando se desean estudiar las *propiedades geométricas* de una curva, el parámetro adecuado es a menudo la longitud de arco s.

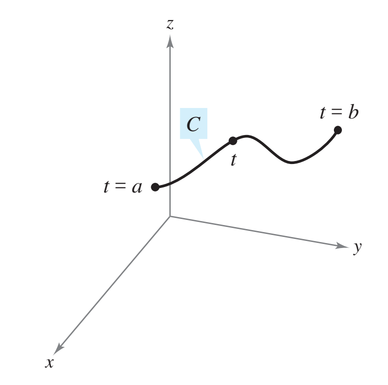


Figura 12.30

DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN LONGITUD DE ARCO

Sea C una curva suave dada por $\mathbf{r}(t)$ definida en el intervalo cerrado $[a, b]$. Para $a \leq t \leq b$, la **función longitud de arco** está dada por

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(u)\|\, du = \int_a^t \sqrt{[x'(u)]^2 + [y'(u)]^2 + [z'(u)]^2}\, du.$$

A la longitud de arco s se le llama **parámetro longitud de arco**. (Ver la figura 12.30.)

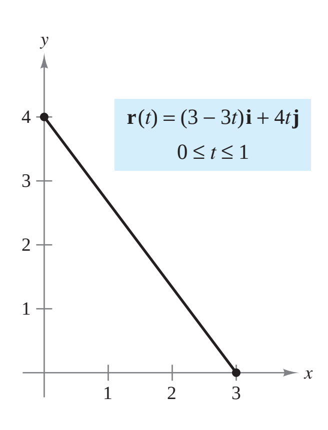
NOTA La función de longitud de arco s es *no negativa*. Mide la distancia sobre C desde el punto inicial $(x(a), y(a), z(a))$ hasta el punto $(x(t), y(t), z(t))$. ■

Usando la definición de la función longitud de arco y el segundo teorema fundamental de cálculo, se concluye que

$$\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{r}'(t)\|. \qquad \text{Derivada de la función longitud de arco.}$$

En la forma diferencial, se escribe

$$ds = \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt.$$



El segmento de recta desde (3, 0) hasta (0, 4) puede parametrizarse usando el parámetro longitud de arco s
Figura 12.31

EJEMPLO 3 Hallar la función longitud de arco para una recta

Hallar la función longitud de arco $s(t)$ para el segmento de recta dado por

$$\mathbf{r}(t) = (3 - 3t)\mathbf{i} + 4t\,\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 1$$

y expresar $\mathbf{r}$ como función del parámetro s. (Ver la figura 12.31.)

Solución Como $\mathbf{r}'(t) = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ y

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$$

se tiene

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \|\mathbf{r}'(u)\|\, du \\ &= \int_0^t 5\, du \\ &= 5t. \end{aligned}$$

Usando $s = 5t$ (o $t = s/5$), se puede reescribir $\mathbf{r}$ utilizando el parámetro longitud de arco como sigue.

$$\mathbf{r}(s) = \left(3 - \tfrac{3}{5}s\right)\mathbf{i} + \tfrac{4}{5}s\,\mathbf{j}, \quad 0 \le s \le 5.$$

Una de las ventajas de escribir una función vectorial en términos del parámetro longitud de arco es que $\|\mathbf{r}'(s)\| = 1$. De este modo, en el ejemplo 3, se tiene

$$\|\mathbf{r}'(s)\| = \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = 1.$$

Así, dada una curva suave C representada por $\mathbf{r}(s)$, donde s es el parámetro longitud de arco, la longitud de arco entre a y b es

$$\begin{aligned} \text{Longitud de arco} &= \int_a^b \|\mathbf{r}'(s)\|\, ds \\ &= \int_a^b ds \\ &= b - a \\ &= \text{longitud del intervalo.} \end{aligned}$$

Además, si t es *cualquier* parámetro tal que $\|\mathbf{r}'(t)\| = 1$, entonces t debe ser el parámetro longitud de arco. Estos resultados se resumen en el teorema siguiente que se presenta sin demostración.



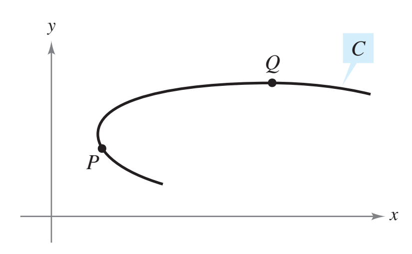
Si C es una curva suave dada por

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} \quad \text{o} \quad \mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k}$$

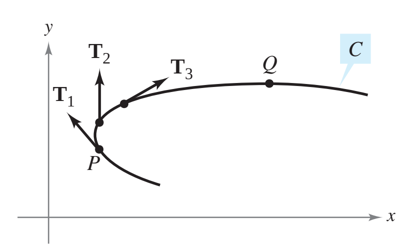
donde s es el parámetro longitud de arco, entonces

$$\|\mathbf{r}'(s)\| = 1.$$

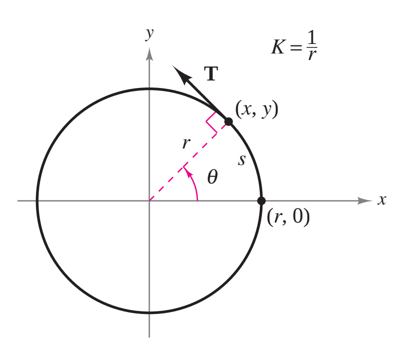
Si t es *cualquier* parámetro para la función vectorial $\mathbf{r}$ tal que $\|\mathbf{r}'(t)\| = 1$, entonces t debe ser el parámetro longitud de arco.



La curvatura en P es mayor que en Q
Figura 12.32



La magnitud de la tasa o del ritmo de cambio de **T** respecto a la longitud de arco es la curvatura de una curva
Figura 12.33



La curvatura de un círculo es constante
Figura 12.34

Curvatura

Un uso importante del parámetro longitud de arco es hallar la **curvatura**, la medida de cuán agudamente se dobla una curva. Por ejemplo, en la figura 12.32 la curva se dobla más agudamente en P que en Q, y se dice que la curvatura es mayor en P que en Q. Se puede hallar la curvatura calculando la magnitud de la tasa o ritmo de cambio del vector unitario tangente $\mathbf{T}$ con respecto a la longitud de arco s, como se muestra en la figura 12.33.

DEFINICIÓN DE CURVATURA

Sea C una curva suave (en el plano *o* en el espacio) dada por $\mathbf{r}(s)$, donde s es el parámetro longitud de arco. La **curvatura** K en s está dada por

$$K = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\| = \|\mathbf{T}'(s)\|.$$

Un círculo tiene la misma curvatura en todos sus puntos. La curvatura y el radio del círculo están relacionados inversamente. Es decir, un círculo con un radio grande tiene una curvatura pequeña, y un círculo con un radio pequeño tiene una curvatura grande. Esta relación inversa se explica en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4 Hallar la curvatura de un círculo

Mostrar que la curvatura de un círculo de radio r es $K = 1/r$.

Solución Sin pérdida de generalidad, se puede considerar que el círculo está centrado en el origen. Sea (x, y) cualquier punto en el círculo y sea s la longitud de arco desde $(r, 0)$ hasta (x, y), como se muestra en la figura 12.34. Denotando por θ el ángulo central del círculo, puede representarse el círculo por

$$\mathbf{r}(\theta) = r\cos\theta\,\mathbf{i} + r\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j}. \qquad \theta \text{ es el parámetro.}$$

Usando la fórmula para la longitud de un arco circular $s = r\theta$, se puede reescribir $\mathbf{r}(\theta)$ en términos del parámetro longitud de arco como sigue.

$$\mathbf{r}(s) = r\cos\frac{s}{r}\,\mathbf{i} + r\,\text{sen}\frac{s}{r}\,\mathbf{j} \qquad \text{La longitud de arco } s \text{ es el parámetro.}$$

Así, $\mathbf{r}'(s) = -\text{sen}\frac{s}{r}\,\mathbf{i} + \cos\frac{s}{r}\,\mathbf{j}$, de donde se sigue que $\|\mathbf{r}'(s)\| = 1$, lo que implica que el vector unitario tangente es

$$\mathbf{T}(s) = \frac{\mathbf{r}'(s)}{\|\mathbf{r}'(s)\|} = -\text{sen}\frac{s}{r}\,\mathbf{i} + \cos\frac{s}{r}\,\mathbf{j}$$

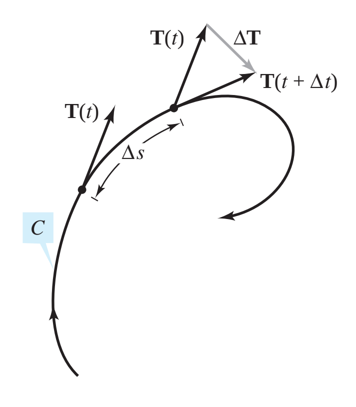
y la curvatura está dada por

$$K = \|\mathbf{T}'(s)\| = \left\| -\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}\,\mathbf{i} - \frac{1}{r}\,\text{sen}\frac{s}{r}\,\mathbf{j} \right\| = \frac{1}{r}$$

en todo punto del círculo.

NOTA Puesto que una recta no se curva, se esperaría que su curvatura fuera 0. Tratar de comprobar esto hallando la curvatura de la recta dada por

$$\mathbf{r}(s) = \left(3 - \frac{3}{5}s\right)\mathbf{i} + \frac{4}{5}s\mathbf{j}.$$



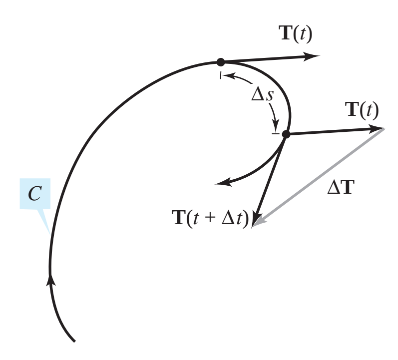


Figura 12.35

En el ejemplo 4, la curvatura se encontró aplicando directamente la definición. Esto requiere que la curva se exprese en términos del parámetro longitud de arco s. El teorema siguiente da otras dos fórmulas para encontrar la curvatura de una curva expresada en términos de un parámetro arbitrario t. La demostración de este teorema se deja como ejercicio [ver ejercicio 100, incisos *a*) y *b*)].

TEOREMA 12.8 FÓRMULAS PARA LA CURVATURA

Si C es una curva suave dada por $\mathbf{r}(t)$, entonces la curvatura K de C en t está dada por

$$K = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}.$$

Como $\|\mathbf{r}'(t)\| = ds/dt$, la primera fórmula implica que la curvatura es el cociente de la tasa o ritmo de cambio del vector tangente $\mathbf{T}$ entre la tasa o ritmo de cambio de la longitud de arco. Para ver que esto es razonable, sea Δt un número "pequeño". Entonces,

$$\frac{\mathbf{T}'(t)}{ds/dt} \approx \frac{[\mathbf{T}(t + \Delta t) - \mathbf{T}(t)]/\Delta t}{[s(t + \Delta t) - s(t)]/\Delta t} = \frac{\mathbf{T}(t + \Delta t) - \mathbf{T}(t)}{s(t + \Delta t) - s(t)} = \frac{\Delta \mathbf{T}}{\Delta s}.$$

En otras palabras, para un Δs dado, cuanto mayor sea la longitud de $\Delta \mathbf{T}$, la curva se dobla más en t, como se muestra en la figura 12.35.

EJEMPLO 5 Hallar la curvatura de una curva en el espacio

Hallar la curvatura de la curva definida por $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} - \frac{1}{3}t^3\mathbf{k}$.

Solución No se sabe a simple vista si este parámetro representa la longitud de arco, así es que hay que usar la fórmula $K = \|\mathbf{T}'(t)\|/\|\mathbf{r}'(t)\|$.

$$\mathbf{r}'(t) = 2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} - t^2\mathbf{k}$$

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{4 + 4t^2 + t^4} = t^2 + 2 \qquad \text{Longitud de } \mathbf{r}'(t).$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} - t^2\mathbf{k}}{t^2 + 2}$$

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{(t^2 + 2)(2\mathbf{j} - 2t\mathbf{k}) - (2t)(2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} - t^2\mathbf{k})}{(t^2 + 2)^2}$$

$$= \frac{-4t\mathbf{i} + (4 - 2t^2)\mathbf{j} - 4t\mathbf{k}}{(t^2 + 2)^2}$$

$$\|\mathbf{T}'(t)\| = \frac{\sqrt{16t^2 + 16 - 16t^2 + 4t^4 + 16t^2}}{(t^2 + 2)^2}$$

$$= \frac{2(t^2 + 2)}{(t^2 + 2)^2}$$

$$= \frac{2}{t^2 + 2} \qquad \text{Longitud de } \mathbf{T}'(t).$$

Por tanto,

$$K = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{2}{(t^2 + 2)^2}. \qquad \text{Curvatura.}$$

El teorema siguiente presenta una fórmula para calcular la curvatura de una curva plana dada por $y = f(x)$.

TEOREMA 12.9 CURVATURA EN COORDENADAS RECTANGULARES

Si C es la gráfica de una función dos veces derivable $y = f(x)$, entonces la curvatura K en el punto (x, y) está dada por

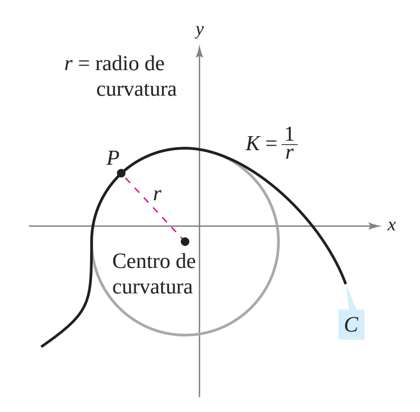
$$K = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}}.$$

DEMOSTRACIÓN Si se representa la curva C por $\mathbf{r}(x) = x\mathbf{i} + f(x)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ (donde x es el parámetro), se obtiene $\mathbf{r}'(x) = \mathbf{i} + f'(x)\mathbf{j}$,

$$\|\mathbf{r}'(x)\| = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

y $\mathbf{r}''(x) = f''(x)\mathbf{j}$. Como $\mathbf{r}'(x) \times \mathbf{r}''(x) = f''(x)\mathbf{k}$, se sigue que la curvatura es

$$\begin{aligned} K &= \frac{\|\mathbf{r}'(x) \times \mathbf{r}''(x)\|}{\|\mathbf{r}'(x)\|^3} \\ &= \frac{|f''(x)|}{\{1 + [f'(x)]^2\}^{3/2}} \\ &= \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}}. \end{aligned}$$



El círculo de curvatura
Figura 12.36

Sea C una curva con curvatura K en el punto P. El círculo que pasa por el punto P de radio $r = 1/K$ se denomina el **círculo de curvatura** si su centro se encuentra en el lado cóncavo de la curva y tiene en común con la curva una recta tangente en el punto P. Al radio se le llama el **radio de curvatura** en P, y al centro se le llama el **centro de curvatura**.

El círculo de curvatura permite estimar gráficamente la curvatura K en un punto P de una curva. Usando un compás, se puede trazar un círculo contra el lado cóncavo de la curva en el punto P, como se muestra en la figura 12.36. Si el círculo tiene radio r, se puede estimar que la curvatura es $K = 1/r$.

EJEMPLO 6 Hallar la curvatura en coordenadas rectangulares

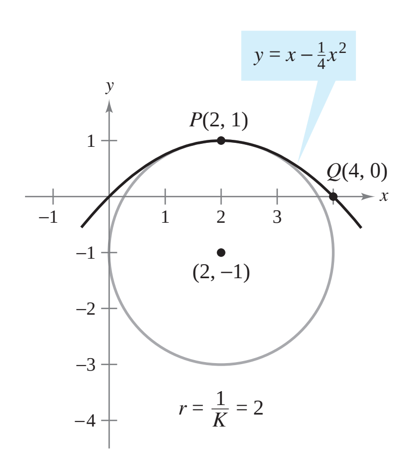
Hallar la curvatura de la parábola dada por $y = x - \frac{1}{4}x^2$ en $x = 2$. Dibujar el círculo de curvatura en $(2, 1)$.

Solución La curvatura en $x = 2$ se calcula como sigue:

$$y' = 1 - \frac{x}{2} \qquad y' = 0$$

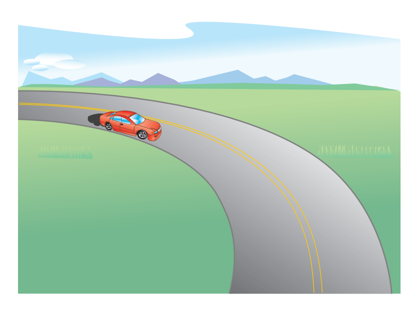
$$y'' = -\frac{1}{2} \qquad y'' = -\frac{1}{2}$$

$$K = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}} \qquad K = \frac{1}{2}$$



El círculo de curvatura
Figura 12.37

Como la curvatura en $P(2, 1)$ es $\frac{1}{2}$, el radio del círculo de curvatura en ese punto es 2. Por tanto, el centro de curvatura es $(2, -1)$, como se muestra en la figura 12.37. [En la figura, obsérvese que la curva tiene la mayor curvatura en P. Trate de mostrar que la curvatura en $Q(4, 0)$ es $1/2^{5/2} \approx 0.177$.]



La fuerza del empuje lateral que perciben los pasajeros en un automóvil que toma una curva depende de dos factores: la rapidez del automóvil y lo brusco de la curva
Figura 12.38

La longitud de arco y la curvatura están estrechamente relacionadas con las componentes tangencial y normal de la aceleración. La componente tangencial de la aceleración es la tasa o ritmo de cambio de la rapidez, que a su vez es la tasa o ritmo de cambio de la longitud de arco. Esta componente es negativa cuando un objeto en movimiento reduce su velocidad y positiva cuando la aumenta, independientemente de si el objeto gira o viaja en una recta. En consecuencia, la componente tangencial es solamente función de la longitud de arco y es independiente de la curvatura.

Por otro lado, la componente normal de la aceleración es función tanto de la rapidez como de la curvatura. Esta componente mide la aceleración que actúa perpendicular a la dirección del movimiento. Para ver por qué afectan la rapidez y la curvatura a la componente normal, imaginarse conduciendo un automóvil por una curva, como se muestra en la figura 12.38. Si la velocidad es alta y la curva muy cerrada, se sentirá empujado contra la puerta del automóvil. Al bajar la velocidad *o* tomar una curva más suave, se disminuye este efecto de empuje lateral.

El teorema siguiente establece explícitamente la relación entre rapidez, curvatura y componentes de la aceleración.

NOTA El teorema 12.10 da fórmulas adicionales para $a_{\mathbf{T}}$ y $a_{\mathbf{N}}$.

TEOREMA 12.10 ACELERACIÓN, RAPIDEZ Y CURVATURA

Si $\mathbf{r}(t)$ es el vector posición de una curva suave C, entonces el vector aceleración está dado por

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\mathbf{N}$$

donde K es la curvatura de C y ds/dt es la rapidez.

DEMOSTRACIÓN Para el vector posición $\mathbf{r}(t)$, se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{a}(t) &= a_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + a_{\mathbf{N}}\mathbf{N}\\ &= D_t[\|\mathbf{v}\|]\mathbf{T} + \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{T}'\|\mathbf{N}\\ &= \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \frac{ds}{dt}(\|\mathbf{v}\|K)\mathbf{N}\\ &= \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\mathbf{N}.\end{aligned}$$

EJEMPLO 7 Componentes tangencial y normal de la aceleración

Hallar $a_{\mathbf{T}}$ y $a_{\mathbf{N}}$ de la curva dada por

$$\mathbf{r}(t) = 2t\,\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} - \tfrac{1}{3}t^3\mathbf{k}.$$

Solución Por el ejemplo 5, se sabe que

$$\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{r}'(t)\| = t^2 + 2 \quad \text{y} \quad K = \frac{2}{(t^2+2)^2}.$$

Por tanto,

$$a_{\mathbf{T}} = \frac{d^2s}{dt^2} = 2t \qquad \text{Componente tangencial.}$$

y

$$a_{\mathbf{N}} = K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{2}{(t^2+2)^2}(t^2+2)^2 = 2. \qquad \text{Componente normal.}$$

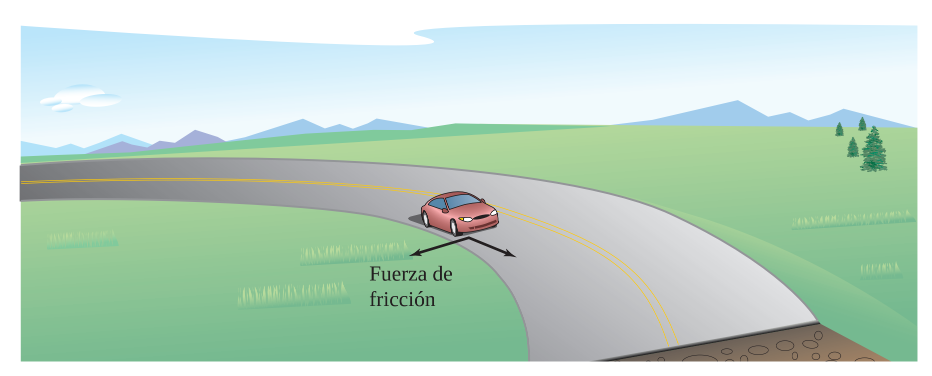
Aplicación

Hay muchas aplicaciones prácticas en física e ingeniería dinámica en las que se emplean las relaciones entre rapidez, longitud de arco, curvatura y aceleración. Una de estas aplicaciones se refiere a la fuerza de fricción o de rozamiento.

Un objeto de masa *m* en movimiento está en contacto con un objeto estacionario. La fuerza requerida para producir una aceleración **a** a lo largo de una trayectoria dada es

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= m\mathbf{a} = m\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)\mathbf{T} + mK\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\mathbf{N}\\ &= ma_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + ma_{\mathbf{N}}\mathbf{N}.\end{aligned}$$

La porción de esta fuerza que es proporcionada por el objeto estacionario se llama **fuerza de fricción** o **de rozamiento**. Por ejemplo, si un automóvil se mueve con rapidez constante tomando una curva, la carretera ejerce una fuerza de fricción o rozamiento que impide que el automóvil salga de la carretera. Si el automóvil no se desliza, la fuerza de fricción es perpendicular a la dirección del movimiento y su magnitud es igual a la componente normal de la aceleración, como se muestra en la figura 12.39. La fuerza de rozamiento (o de fricción) potencial de una carretera en una curva puede incrementarse peraltando la carretera.



La fuerza de fricción es perpendicular a la dirección del movimiento
Figura 12.39

EJEMPLO 8 Fuerza de fricción

Un coche de carreras (kart) de 360 kilogramos viaja a una velocidad de 60 kilómetros por hora por una pista circular de 12 metros de radio, como se muestra en la figura 12.40. ¿Qué fuerza de fricción (o rozamiento) debe ejercer la superficie en los neumáticos para impedir que el coche salga de su curso?

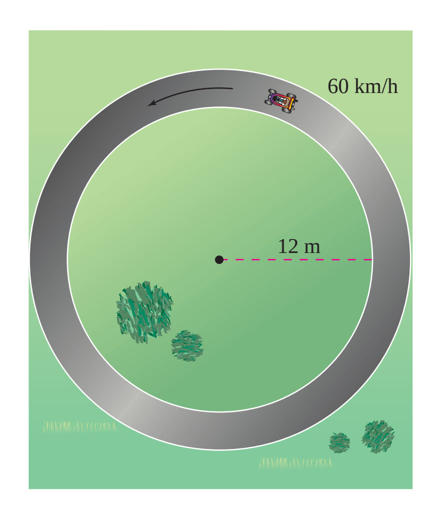


Figura 12.40

Solución La fuerza de fricción o rozamiento debe ser igual a la masa por la componente normal de aceleración. En el caso de esta pista circular, se sabe que la curvatura es

$$K = \frac{1}{12}. \qquad \text{Curvatura de la pista circular.}$$

Por consiguiente, la fuerza de fricción es

$$\begin{aligned}ma_{\mathbf{N}} &= mK\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\\ &= (360 \text{ kg})\left(\frac{1}{12 \text{ m}}\right)\left(\frac{60\,000 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}}\right)^2\\ &\approx 8\,333 \text{ (kg)(m)/s}^2.\end{aligned}$$

Resumen sobre velocidad, aceleración y curvatura

Sea C una curva (en el plano o en el espacio) dada por la función de posición

$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ Curva en el plano.

$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$ Curva en el espacio.

Vector velocidad, rapidez y vector aceleración:

$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ Vector velocidad.

$\|\mathbf{v}(t)\| = \dfrac{ds}{dt} = \|\mathbf{r}'(t)\|$ Rapidez.

$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = a_{\mathbf{T}}\mathbf{T}(t) + a_{\mathbf{N}}\mathbf{N}(t)$ Vector aceleración.

Vector unitario tangente y vector unitario normal principal:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \quad \text{y} \quad \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$$

Componentes de la aceleración:

$$a_{\mathbf{T}} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

$$a_{\mathbf{N}} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{N} = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_{\mathbf{T}}^2} = K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

Fórmulas para la curvatura en el plano:

$K = \dfrac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}}$ C dada por $y = f(x)$.

$K = \dfrac{|x'y'' - y'x''|}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}}$ C dada por $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Fórmulas para la curvatura en el plano o en el espacio:

$K = \|\mathbf{T}'(s)\| = \|\mathbf{r}''(s)\|$ s es el parámetro longitud de arco.

$K = \dfrac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \dfrac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$ t es el parámetro general.

$$K = \frac{\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{N}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|^2}$$

Las fórmulas con productos vectoriales aplican sólo a curvas en el espacio.

12.5 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, dibujar la curva plana y hallar su longitud en el intervalo dado.

1. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 3t\mathbf{j}$, $[0, 4]$
2. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, $[0, 4]$
3. $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, $[0, 2]$
4. $\mathbf{r}(t) = (t + 1)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, $[0, 6]$
5. $\mathbf{r}(t) = a\cos^3 t\,\mathbf{i} + a\,\text{sen}^3\,t\,\mathbf{j}$, $[0, 2\pi]$
6. $\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j}$, $[0, 2\pi]$

7. ***Movimiento de un proyectil*** Una pelota de béisbol es golpeada desde 3 pies sobre el nivel del suelo a 100 pies por segundo y con un ángulo de 45° con respecto al nivel del suelo.
   a) Hallar la función vectorial de la trayectoria de la pelota de béisbol.
   b) Hallar la altura máxima.
   c) Hallar el alcance.
   d) Hallar la longitud de arco de la trayectoria.

8. ***Movimiento de un proyectil*** Un objeto se lanza desde el nivel del suelo. Determinar el ángulo del lanzamiento para obtener *a*) la altura máxima, *b*) el alcance máximo y *c*) la longitud máxima de la trayectoria. En el inciso *c*), tomar $v_0 = 96$ pies por segundo.

En los ejercicios 9 a 14, dibujar la curva en el espacio y hallar su longitud sobre el intervalo dado.

	Función	*Intervalo*
9.	$\mathbf{r}(t) = -t\,\mathbf{i} + 4t\,\mathbf{j} + 3t\,\mathbf{k}$	$[0, 1]$
10.	$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$	$[0, 2]$
11.	$\mathbf{r}(t) = \langle 4t, -\cos t, \text{sen}\,t\rangle$	$\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$
12.	$\mathbf{r}(t) = \langle 2\,\text{sen}\,t, 5t, 2\cos t\rangle$	$[0, \pi]$
13.	$\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + bt\,\mathbf{k}$	$[0, 2\pi]$
14.	$\mathbf{r}(t) = \langle \cos t + t\,\text{sen}\,t, \text{sen}\,t - t\cos t, t^2\rangle$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

En los ejercicios 15 y 16, usar las funciones de integración de una herramienta de graficación para aproximar la longitud de la curva en el espacio sobre el intervalo dado.

	Función	*Intervalo*
15.	$\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \ln t\mathbf{k}$	$1 \le t \le 3$
16.	$\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} \pi t\,\mathbf{i} + \cos \pi t\,\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$	$0 \le t \le 2$

17. ***Investigación*** Considerar la gráfica de la función vectorial $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (4 - t^2)\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ en el intervalo $[0, 2]$.

a) Aproximar la longitud de la curva hallando la longitud del segmento de recta que une sus extremos.

b) Aproximar la longitud de la curva sumando las longitudes de los segmentos de recta que unen los extremos de los vectores $\mathbf{r}(0)$, $\mathbf{r}(0.5)$, $\mathbf{r}(1)$, $\mathbf{r}(1.5)$ y $\mathbf{r}(2)$.

c) Describir cómo obtener una estimación más exacta mediante los procesos de los incisos *a*) y *b*).



d) Usar las funciones de integración de una herramienta de graficación para aproximar la longitud de la curva. Comparar este resultado con las respuestas de los incisos *a*) y *b*).

18. ***Investigación*** Repetir el ejercicio 17 con la función vectorial $\mathbf{r}(t) = 6\cos(\pi t/4)\mathbf{i} + 2\operatorname{sen}(\pi t/4)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$.

19. ***Investigación*** Considerar la hélice representada por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t, 2\operatorname{sen} t, t\rangle$.

a) Expresar la longitud de arco s de la hélice como función de t evaluando la integral

$$s = \int_0^t \sqrt{[x'(u)]^2 + [y'(u)]^2 + [z'(u)]^2}\,du.$$

b) Despejar t en la relación deducida en el inciso *a*), y sustituir el resultado en el conjunto de ecuaciones paramétricas original. Esto da una parametrización de la curva en términos del parámetro longitud de arco s.

c) Hallar las coordenadas del punto en la hélice con longitud de arco $s = \sqrt{5}$ y $s = 4$.

d) Verificar que $\|\mathbf{r}'(s)\| = 1$.

20. ***Investigación*** Repetir el ejercicio 19 con la curva representada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = \left\langle 4(\operatorname{sen} t - t\cos t), 4(\cos t + t\operatorname{sen} t), \tfrac{3}{2}t^2\right\rangle.$$

En los ejercicios 21 a 24, hallar la curvatura *K* de la curva donde *s* es el parámetro longitud de arco.

21. $\mathbf{r}(s) = \left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}s\right)\mathbf{i} + \left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}s\right)\mathbf{j}$

22. $\mathbf{r}(s) = (3 + s)\mathbf{i} + \mathbf{j}$

23. La hélice del ejercicio 19: $\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t, 2\operatorname{sen} t, t\rangle$

24. La curva del ejercicio 20:
$\mathbf{r}(t) = \left\langle 4(\operatorname{sen} t - t\cos t), 4(\cos t + t\operatorname{sen} t), \tfrac{3}{2}t^2\right\rangle$

En los ejercicios 25 a 30, hallar la curvatura *K* de la curva plana en el valor dado del parámetro.

25. $\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} - 2t\mathbf{j}, \quad t = 1$

26. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad t = 2$

27. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \dfrac{1}{t}\mathbf{j}, \quad t = 1$

28. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \dfrac{1}{9}t^3\mathbf{j}, \quad t = 2$

29. $\mathbf{r}(t) = \langle t, \operatorname{sen} t\rangle, \quad t = \dfrac{\pi}{2}$

30. $\mathbf{r}(t) = \langle 5\cos t, 4\operatorname{sen} t\rangle, \quad t = \dfrac{\pi}{3}$

En los ejercicios 31 a 40, hallar la curvatura *K* de la curva.

31. $\mathbf{r}(t) = 4\cos 2\pi t\,\mathbf{i} + 4\operatorname{sen} 2\pi t\,\mathbf{j}$

32. $\mathbf{r}(t) = 2\cos \pi t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} \pi t\,\mathbf{j}$

33. $\mathbf{r}(t) = a\cos \omega t\,\mathbf{i} + a\operatorname{sen} \omega t\,\mathbf{j}$

34. $\mathbf{r}(t) = a\cos \omega t\,\mathbf{i} + b\operatorname{sen} \omega t\,\mathbf{j}$

35. $\mathbf{r}(t) = \langle a(\omega t - \operatorname{sen} \omega t), a(1 - \cos \omega t)\rangle$

36. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos \omega t + \omega t\operatorname{sen} \omega t, \operatorname{sen} \omega t - \omega t\cos \omega t\rangle$

37. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \dfrac{t^2}{2}\mathbf{k}$

38. $\mathbf{r}(t) = 2t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \dfrac{1}{2}t^2\mathbf{k}$

39. $\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} + 3\cos t\,\mathbf{j} + 3\operatorname{sen} t\,\mathbf{k}$

40. $\mathbf{r}(t) = e^{2t}\mathbf{i} + e^{2t}\cos t\,\mathbf{j} + e^{2t}\operatorname{sen} t\,\mathbf{k}$

En los ejercicios 41 a 44, encontrar la curvatura *K* de la curva en el punto *P*.

41. $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j}, \quad P(-3, 2)$

42. $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + 4t\mathbf{j}, \quad P(1, 0)$

43. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \dfrac{t^3}{4}\mathbf{k}, \quad P(2, 4, 2)$

44. $\mathbf{r}(t) = e^t\cos t\mathbf{i} + e^t\operatorname{sen} t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}, \quad P(1, 0, 1)$

En los ejercicios 45 a 54, hallar la curvatura y el radio de curvatura de la curva plana en el valor dado de *x*.

45. $y = 3x - 2, \quad x = a$

46. $y = mx + b, \quad x = a$

47. $y = 2x^2 + 3, \quad x = -1$

48. $y = 2x + \dfrac{4}{x}, \quad x = 1$

49. $y = \cos 2x, \quad x = 2\pi$

50. $y = e^{3x}, \quad x = 0$

51. $y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad x = 0$

52. $y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}, \quad x = 0$

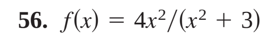
53. $y = x^3, \quad x = 2$

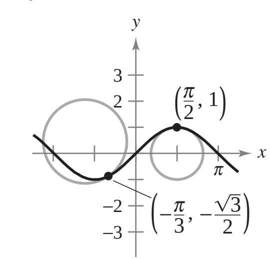
54. $y = x^n, \quad x = 1, \quad n \ge 2$

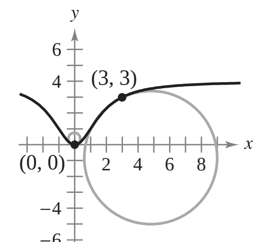
Redacción **En los ejercicios 55 y 56, se dan dos círculos de curvatura de la gráfica de la función. *a*) Hallar la ecuación del círculo menor, y *b*) escribir un párrafo corto que explique por qué los círculos tienen radios diferentes.**

55. $f(x) = \operatorname{sen} x$

56. $f(x) = 4x^2/(x^2 + 3)$









En los ejercicios 57 a 60, usar una herramienta de graficación para representar la función. En la misma pantalla, representar el círculo de curvatura de la gráfica en el valor dado de *x*.

57. $y = x + \frac{1}{x}, \quad x = 1$ **58.** $y = \ln x, \quad x = 1$

59. $y = e^x, \quad x = 0$ **60.** $y = \frac{1}{3}x^3, \quad x = 1$

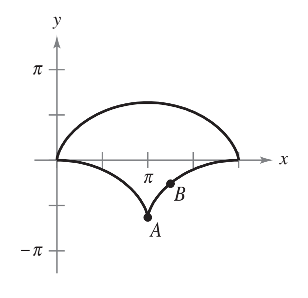
Evoluta **Un evoluta es la curva formada por el conjunto de centros de curvatura de una curva. En los ejercicios 61 y 62 se dan una curva y su evoluta. Usar un compás para trazar los círculos de curvatura con centros en los puntos *A* y *B*.**

61. Cicloide: $x = t - \operatorname{sen} t$

$y = 1 - \cos t$

Evoluta: $x = \operatorname{sen} t + t$

$y = \cos t - 1$

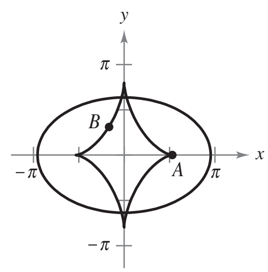


62. Elipse: $x = 3\cos t$

$y = 2\operatorname{sen} t$

Evoluta: $x = \frac{5}{3}\cos^3 t$

$y = \frac{5}{2}\operatorname{sen}^3 t$



En los ejercicios 63 a 70 *a*) hallar el punto de la curva en el que la curvatura *K* es máxima y *b*) hallar el límite de *K* cuando $x \to \infty$.

63. $y = (x - 1)^2 + 3$ **64.** $y = x^3$

65. $y = x^{2/3}$ **66.** $y = \frac{1}{x}$

67. $y = \ln x$ **68.** $y = e^x$

69. $y = \operatorname{senh} x$ **70.** $y = \cosh x$

En los ejercicios 71 a 74, hallar todos los puntos de la gráfica de una función en los que la curvatura es cero.

71. $y = 1 - x^3$ **72.** $y = (x - 1)^3 + 3$

73. $y = \cos x$ **74.** $y = \operatorname{sen} x$

Desarrollo de conceptos

75. *a*) Dada la fórmula para la longitud de arco de una curva suave en el espacio.

b) Dada las fórmulas para la curvatura en el plano y en el espacio.

76. Describir la gráfica de una función vectorial para la que la curvatura sea 0 en todos los valores *t* de su dominio.

Desarrollo de conceptos (*continuación*)

77. Dada una función dos veces derivable $y = f(x)$, determinar su curvatura en un extremo relativo. ¿Puede la curvatura tener valores mayores que los que alcanza en un extremo relativo? ¿Por qué sí o por qué no?

Para discusión

78. Una partícula se mueve a lo largo de la curva plana *C* descrita por $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$.

a) Encontrar la longitud de *C* en el intervalo $0 \le t \le 2$.

b) Encontrar la curvatura *K* de la curva plana en $t = 0$, $t = 1$ y $t = 2$.

c) Describir la curvatura de *C* cuando *t* varía desde $t = 0$ hasta $t = 2$.

79. En la elipse dada por $x^2 + 4y^2 = 4$, mostrar que la curvatura es mayor en los puntos terminales del eje mayor, y es menor en los puntos terminales del eje menor.

80. ***Investigación*** Hallar todos los *a* y *b* tales que las dos curvas dadas por

$$y_1 = ax(b - x) \quad \text{y} \quad y_2 = \frac{x}{x + 2}$$

se corten en un solo punto y tengan una recta tangente común y curvatura igual en ese punto. Trazar una gráfica para cada conjunto de valores de *a* y *b*.



81. ***Investigación*** Considerar la función $f(x) = x^4 - x^2$.

a) Usar un sistema computacional para álgebra y encontrar la curvatura *K* de la curva como función de *x*.

b) Usar el resultado del inciso *a*) para hallar los círculos de curvatura de la gráfica de *f* en $x = 0$ y $x = 1$. Usar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la función y los dos círculos de curvatura.

c) Representar gráficamente la función $K(x)$ y compararla con la gráfica de $f(x)$. Por ejemplo, ¿se presentan los extremos de *f* y *K* en los mismos números críticos? Explicar el razonamiento.

82. ***Investigación*** La superficie de una copa se forma por revolución de la gráfica de la función

$y = \frac{1}{4}x^{8/5}, \quad 0 \le x \le 5$

en torno al eje *y*. Las medidas se dan en centímetros.

CAS *a*) Usar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la superficie.

b) Hallar el volumen de la copa.



c) Hallar la curvatura *K* de la curva generatriz como función de *x*. Usar una herramienta de graficación para representar *K*.

d) Si un objeto esférico se deja caer en la copa, ¿es posible que toque el fondo? Explicar la respuesta.

83. Una esfera de radio 4 se deja caer en el paraboloide dado por $z = x^2 + y^2$.

a) ¿Qué tanto se acercará la esfera al vértice del paraboloide?

b) ¿Cuál es el radio de la esfera mayor que toca el vértice?

84. ***Rapidez*** Cuanto menor es la curvatura en una curva de una carretera, mayor es la velocidad a la que pueden ir los automóviles. Suponer que la velocidad máxima en una curva es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la curvatura. Un automóvil que recorre la trayectoria $y = \frac{1}{3}x^3$ (x y y medidos en millas) puede ir con seguridad a 30 millas por hora en $\left(1, \frac{1}{3}\right)$. ¿Qué tan rápido puede ir en $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{8}\right)$?

85. Sea C una curva dada por $y = f(x)$. Sea K la curvatura $(K \neq 0)$ en el punto $P(x_0, y_0)$ y sea

$$z = \frac{1 + f'(x_0)^2}{f''(x_0)}.$$

Mostrar que las coordenadas (α, β) del centro de curvatura en P son $(\alpha, \beta) = (x_0 - f'(x_0)z, y_0 + z)$.

86. Usar el resultado del ejercicio 85 para hallar el centro de curvatura de la curva en el punto dado.

a) $y = e^x, \quad (0, 1)$ *b)* $y = \dfrac{x^2}{2}, \quad \left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ *c)* $y = x^2, \quad (0, 0)$

87. Se da una curva C por medio de la ecuación polar $r = f(\theta)$. Mostrar que la curvatura K en el punto (r, θ) es

$$K = \frac{[2(r')^2 - rr'' + r^2]}{[(r')^2 + r^2]^{3/2}}.$$

[*Sugerencia:* Representar la curva por $\mathbf{r}(\theta) = r\cos\theta\,\mathbf{i} + r\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j}$.]

88. Usar el resultado del ejercicio 87 para hallar la curvatura de cada una de las curvas polares.

a) $r = 1 + \text{sen}\,\theta$ *b)* $r = \theta$ *c)* $r = a\,\text{sen}\,\theta$ *d)* $r = e^\theta$

89. Dada la curva polar $r = e^{a\theta}$, $a > 0$, hallar la curvatura K y determinar el límite de K cuando *a)* $\theta \to \infty$ y *b)* $a \to \infty$.

90. Mostrar que la fórmula para la curvatura de una curva polar $r = f(\theta)$ dada en el ejercicio 87 se reduce a $K = 2/|r'|$ para la curvatura *en el polo*.

En los ejercicios 91 y 92, usar el resultado del ejercicio 90 para hallar la curvatura de la curva rosa en el polo.

91. $r = 4\,\text{sen}\,2\theta$ **92.** $r = 6\cos 3\theta$

93. Para la curva suave dada por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$, demostrar que la curvatura está dada por

$$K = \frac{|f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)|}{\{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2\}^{3/2}}.$$

94. Usar el resultado del ejercicio 93 para encontrar la curvatura K de la curva representada por ecuaciones paramétricas $x(t) = t^3$ y $y(t) = \frac{1}{2}t^2$. Usar una herramienta de graficación para representar K y determinar toda asíntota horizontal. Interpretar las asíntotas en el contexto del problema.

95. Usar el resultado del ejercicio 93 para encontrar la curvatura K de la cicloide representada por las ecuaciones paramétricas

$$x(\theta) = a(\theta - \text{sen}\,\theta) \quad \text{y} \quad y(\theta) = a(1 - \cos\theta).$$

¿Cuáles son los valores mínimo y máximo de K?

96. Usar el teorema 12.10 para encontrar $a_{\mathbf{T}}$ y $a_{\mathbf{N}}$ de cada una de las curvas dadas por las funciones vectoriales.

a) $\mathbf{r}(t) = 3t^2\mathbf{i} + (3t - t^3)\mathbf{j}$ *b)* $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}$

97. ***Fuerza de rozamiento o de fricción*** Un vehículo de 5 500 libras va a una velocidad de 30 millas por hora por una glorieta de 100 pies de radio. ¿Cuál es la fuerza de fricción o de rozamiento que debe ejercer la superficie de la carretera en los neumáticos para impedir que el vehículo salga de curso?

98. ***Fuerza de rozamiento o de fricción*** Un vehículo de 6 400 libras viaja a 35 millas por hora en una glorieta de 250 pies de radio. ¿Cuál es la fuerza de fricción o de rozamiento que debe ejercer la superficie de la carretera en los neumáticos para impedir que el vehículo salga de curso?

99. Verificar que la curvatura en cualquier punto (x, y) de la gráfica de $y = \cosh x$ es $1/y^2$.

100. Usar la definición de curvatura en el espacio $K = \|\mathbf{T}'(s)\| = \|\mathbf{r}''(s)\|$, para verificar cada una de las fórmulas siguientes.

a) $K = \dfrac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$

b) $K = \dfrac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$

c) $K = \dfrac{\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{N}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|^2}$

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 101 a 104, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.**

101. La longitud de arco de una curva en el espacio depende de la parametrización.

102. La curvatura de un círculo es igual a su radio.

103. La curvatura de una recta es 0.

104. La componente normal de la aceleración es función tanto de la velocidad como de la curvatura.

Leyes de Kepler **En los ejercicios 105 a 112, se pide verificar las leyes de Kepler del movimiento planetario. En estos ejercicios, suponer que todo planeta se mueve en una órbita dada por la función vectorial r. Sean $r = \|\mathbf{r}\|$, G la constante gravitatoria universal, M la masa del Sol y m la masa del planeta.**

105. Demostrar que $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = r\dfrac{dr}{dt}$.

106. Usando la segunda ley del movimiento de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, y la segunda ley de la gravitación de Newton, $\mathbf{F} = -(GmM/r^3)\mathbf{r}$, mostrar que $\mathbf{a}$ y $\mathbf{r}$ son paralelos, y que $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t) = \mathbf{L}$ es un vector constante. Por tanto, $\mathbf{r}(t)$ se mueve en un *plano fijo*, ortogonal a $\mathbf{L}$.

107. Demostrar que $\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{\mathbf{r}}{r}\right] = \dfrac{1}{r^3}\{[\mathbf{r} \times \mathbf{r}'] \times \mathbf{r}\}$.

108. Mostrar que $\dfrac{\mathbf{r}'}{GM} \times \mathbf{L} - \dfrac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{e}$ es un vector constante.

109. Demostrar la primera ley de Kepler: todo planeta describe una órbita elíptica con el Sol como uno de sus focos.

110. Suponer que la órbita elíptica $r = ed/(1 + e\cos\theta)$ está en el plano xy, con $\mathbf{L}$ a lo largo del eje z. Demostrar que $\|\mathbf{L}\| = r^2\,d\theta/dt$.

111. Demostrar la segunda ley de Kepler: todo rayo del Sol a un planeta barre áreas iguales de la elipse en tiempos iguales.

112. Demostrar la tercera ley de Kepler: el cuadrado del periodo de la órbita de un planeta es proporcional al cubo de la distancia media entre el planeta y el Sol.

12 Ejercicios de repaso

En los ejercicios 1 a 4, *a*) hallar el dominio de r y *b*) determinar los valores de *t* (si los hay) en los que la función es continua.

1. $\mathbf{r}(t) = \tan t\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$

2. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\,\mathbf{i} + \dfrac{1}{t-4}\mathbf{j} + \mathbf{k}$

3. $\mathbf{r}(t) = \ln t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$

4. $\mathbf{r}(t) = (2t+1)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

En los ejercicios 5 y 6, evaluar (si es posible) la función vectorial en cada uno de los valores dados de *t*.

5. $\mathbf{r}(t) = (2t+1)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} - \sqrt{t+2}\,\mathbf{k}$

a) $\mathbf{r}(0)$ *b*) $\mathbf{r}(-2)$ *c*) $\mathbf{r}(c-1)$ *d*) $\mathbf{r}(1+\Delta t) - \mathbf{r}(1)$

6. $\mathbf{r}(t) = 3\cos t\,\mathbf{i} + (1 - \operatorname{sen} t)\mathbf{j} - t\,\mathbf{k}$

a) $\mathbf{r}(0)$ *b*) $\mathbf{r}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ *c*) $\mathbf{r}(s-\pi)$ *d*) $\mathbf{r}(\pi+\Delta t) - \mathbf{r}(\pi)$

En los ejercicios 7 y 8, trazar la curva plana representada por la función vectorial y dar la orientación de la curva.

7. $\mathbf{r}(t) = \langle \pi\cos t, \pi\operatorname{sen} t\rangle$

8. $\mathbf{r}(t) = \langle t+2, t^2-1\rangle$

CAS **En los ejercicios 9 a 14, usar un sistema algebraico por computadora a fin de representar gráficamente la curva en el espacio representada por la función vectorial.**

9. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$

10. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + 3t\,\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$

11. $\mathbf{r}(t) = \langle 1, \operatorname{sen} t, 1\rangle$

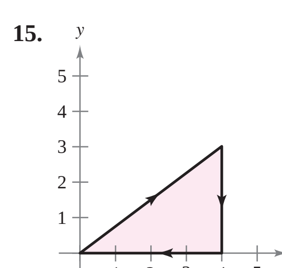
12. $\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t, t, 2\operatorname{sen} t\rangle$

13. $\mathbf{r}(t) = \left\langle t, \ln t, \tfrac{1}{2}t^2\right\rangle$

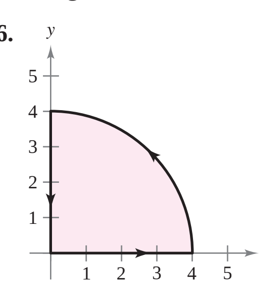
14. $\mathbf{r}(t) = \left\langle \tfrac{1}{2}t, \sqrt{t}, \tfrac{1}{4}t^3\right\rangle$

En los ejercicios 15 y 16, hallar las funciones vectoriales que describen la frontera de la región de la figura.

15.



16.



17. Una partícula se mueve en una trayectoria recta que pasa por los puntos $(-2, -3, 8)$ y $(5, 1, -2)$. Hallar una función vectorial para esta trayectoria. (Hay muchas respuestas correctas.)

18. El borde exterior de una escalera de caracol tiene forma de una hélice de 2 metros de radio. La altura de la escalera es 2 metros y gira tres cuartos de una revolución completa de abajo a arriba. Hallar una función vectorial para la hélice. (Hay muchas respuestas correctas.)

En los ejercicios 19 y 20, dibujar la curva en el espacio representada por la intersección de las superficies. Usar el parámetro $x = t$ para hallar una función vectorial para la curva en el espacio.

19. $z = x^2 + y^2, \quad x + y = 0$

20. $x^2 + z^2 = 4, \quad x - y = 0$

En los ejercicios 21 y 22, evaluar el límite.

21. $\displaystyle\lim_{t\to 4^-}\left(t\,\mathbf{i} + \sqrt{4-t}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)$

22. $\displaystyle\lim_{t\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} 2t}{t}\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + e^{t}\mathbf{k}\right)$

En los ejercicios 23 y 24, hallar lo siguiente.

a) $\mathbf{r}'(t)$ *b*) $\mathbf{r}''(t)$ *c*) $D_t[\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{u}(t)]$

d) $D_t[\mathbf{u}(t) - 2\mathbf{r}(t)]$ *e*) $D_t[\|\mathbf{r}(t)\|],\ t > 0$ *f*) $D_t[\mathbf{r}(t)\times\mathbf{u}(t)]$

23. $\mathbf{r}(t) = 3t\,\mathbf{i} + (t-1)\mathbf{j}, \quad \mathbf{u}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \tfrac{2}{3}t^3\mathbf{k}$

24. $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}, \quad \mathbf{u}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \dfrac{1}{t}\mathbf{k}$

25. ***Redacción*** Las componentes *x* y *y* de la derivada de la función vectorial **u** son positivas en $t = t_0$, y la componente *z* es negativa. Describir el comportamiento de **u** en $t = t_0$.

26. ***Redacción*** La componente *x* de la derivada de la función vectorial **u** es 0 para *t* en el dominio de la función. ¿Qué implica esta información acerca de la gráfica de **u**?

En los ejercicios 27 a 30, hallar la integral indefinida.

27. $\displaystyle\int (\cos t\,\mathbf{i} + t\cos t\,\mathbf{j})\,dt$

28. $\displaystyle\int (\ln t\,\mathbf{i} + t\ln t\,\mathbf{j} + \mathbf{k})\,dt$

29. $\displaystyle\int \|\cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}\|\,dt$

30. $\displaystyle\int (t\,\mathbf{j} + t^2\mathbf{k})\times(\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k})\,dt$

En los ejercicios 31 a 34, evaluar la integral definida.

31. $\displaystyle\int_{-2}^{2} (3t\,\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j} - t^3\mathbf{k})\,dt$

32. $\displaystyle\int_{0}^{1} \left(\sqrt{t}\,\mathbf{j} + t\operatorname{sen} t\,\mathbf{k}\right)dt$

33. $\displaystyle\int_{0}^{2} (e^{t/2}\,\mathbf{i} - 3t^2\mathbf{j} - \mathbf{k})\,dt$

34. $\displaystyle\int_{-1}^{1} (t^3\mathbf{i} + \operatorname{arcsen} t\,\mathbf{j} - t^2\mathbf{k})\,dt$

En los ejercicios 35 y 36, hallar r(*t*) para las condiciones dadas.

35. $\mathbf{r}'(t) = 2t\,\mathbf{i} + e^{t}\,\mathbf{j} + e^{-t}\,\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

36. $\mathbf{r}'(t) = \sec t\,\mathbf{i} + \tan t\,\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(0) = 3\mathbf{k}$

En los ejercicios 37 a 40, el vector posición r describe la trayectoria de un objeto que se mueve en el espacio. Hallar la velocidad, la rapidez y la aceleración del objeto.

37. $\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} - t\mathbf{k}$

38. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\,\mathbf{i} + 5t\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}$

39. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t, 3t\rangle$

40. $\mathbf{r}(t) = \langle t, -\tan t, e^{t}\rangle$

Aproximación lineal **En los ejercicios 41 y 42, hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la gráfica de la función vectorial en $t = t_0$. Usar las ecuaciones de la recta para aproximar $\mathbf{r}(t_0 + 0.1)$.**

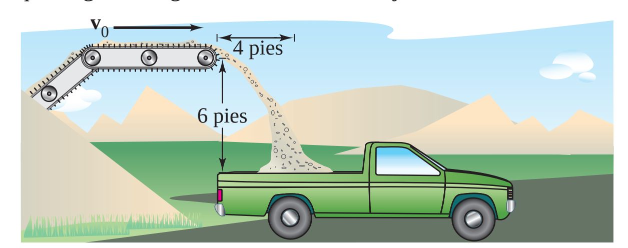
41. $\mathbf{r}(t) = \ln(t-3)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \tfrac{1}{2}t\,\mathbf{k}, \quad t_0 = 4$

42. $\mathbf{r}(t) = 3\cosh t\,\mathbf{i} + \operatorname{senh} t\,\mathbf{j} - 2t\,\mathbf{k}, \quad t_0 = 0$

Movimiento de un proyectil **En los ejercicios 43 a 46, usar el modelo para el movimiento de un proyectil, suponiendo que no hay resistencia del aire. [$a(t) = -32$ pies por segundo al cuadrado o $a(t) = -9.8$ metros por segundo al cuadrado.]**

43. Un proyectil se dispara desde el nivel del suelo a una velocidad inicial de 84 pies por segundo con un ángulo de 30° con la horizontal. Hallar el alcance del proyectil.

44. El centro de la caja de un camión está a 6 pies hacia abajo y a 4 pies horizontalmente del extremo de una cinta transportadora horizontal que descarga grava (ver la figura). Determinar la velocidad ds/dt a que la cinta transportadora debe moverse para que la grava caiga en el centro de la caja del camión.



45. Un proyectil se dispara desde el nivel del suelo con un ángulo de 20° con la horizontal. El proyectil tiene un alcance de 95 metros. Hallar la velocidad inicial mínima.

46. Usar una herramienta de graficación para representar las trayectorias de un proyectil si $v_0 = 20$ metros por segundo, $h = 0$ y *a)* $\theta = 30°$, *b)* $\theta = 45°$ y *c)* $\theta = 60°$. Usar las gráficas para aproximar en cada caso la altura máxima y el alcance máximo del proyectil.

En los ejercicios 47 a 54, hallar la velocidad, la rapidez y la aceleración en el instante *t*. A continuación hallar a · T y a · N en el instante *t*.

47. $\mathbf{r}(t) = (2 - t)\mathbf{i} + 3t\mathbf{j}$

48. $\mathbf{r}(t) = (1 + 4t)\mathbf{i} + (2 - 3t)\mathbf{j}$

49. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \sqrt{t}\,\mathbf{j}$

50. $\mathbf{r}(t) = 2(t + 1)\mathbf{i} + \dfrac{2}{t + 1}\mathbf{j}$

51. $\mathbf{r}(t) = e^t\,\mathbf{i} + e^{-t}\,\mathbf{j}$

52. $\mathbf{r}(t) = t\cos t\,\mathbf{i} + t\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j}$

53. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + \dfrac{1}{2}t^2\,\mathbf{k}$

54. $\mathbf{r}(t) = (t - 1)\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + \dfrac{1}{t}\,\mathbf{k}$

En los ejercicios 55 y 56, hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la curva en el espacio en el punto dado.

55. $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}, \quad t = \dfrac{\pi}{3}$

56. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + \frac{2}{3}t^3\,\mathbf{k}, \quad t = 2$

57. ***Órbita de un satélite*** Hallar la velocidad necesaria para que un satélite mantenga una órbita circular 550 millas sobre la superficie de la Tierra.

58. ***Fuerza centrípeta*** Un automóvil circula por una glorieta al doble de la velocidad permitida. ¿En un factor de cuánto aumenta la fuerza centrípeta sobre la que se tendría a la velocidad permitida?

En los ejercicios 59 a 62, dibujar la curva plana y hallar su longitud en el intervalo dado.

	Función	*Intervalo*
59.	$\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} - 3t\mathbf{j}$	$[0, 5]$
60.	$\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{k}$	$[0, 3]$
61.	$\mathbf{r}(t) = 10\cos^3 t\,\mathbf{i} + 10\,\mathrm{sen}^3\,t\,\mathbf{j}$	$[0, 2\pi]$
62.	$\mathbf{r}(t) = 10\cos t\,\mathbf{i} + 10\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j}$	$[0, 2\pi]$

En los ejercicios 63 a 66, dibujar la curva en el espacio y hallar su longitud en el intervalo dado.

	Función	*Intervalo*
63.	$\mathbf{r}(t) = -3t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$	$[0, 3]$
64.	$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$	$[0, 2]$
65.	$\mathbf{r}(t) = \langle 8\cos t, 8\,\mathrm{sen}\,t, t\rangle$	$[0, \pi/2]$
66.	$\mathbf{r}(t) = \langle 2(\mathrm{sen}\,t - t\cos t), 2(\cos t + t\,\mathrm{sen}\,t), t\rangle$	$[0, \pi/2]$

En los ejercicios 67 a 70, hallar la curvatura *K* de la curva.

67. $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$

68. $\mathbf{r}(t) = 2\sqrt{t}\,\mathbf{i} + 3t\mathbf{j}$

69. $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$

70. $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + 5\cos t\mathbf{j} + 5\,\mathrm{sen}\,t\mathbf{k}$

En los ejercicios 71 y 72, encontrar la curvatura *K* de la curva en el punto *P*.

71. $\mathbf{r}(t) = \dfrac{1}{2}t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \dfrac{1}{3}t^3\mathbf{k}, \quad P\left(\dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{1}{3}\right)$

72. $\mathbf{r}(t) = 4\cos t\mathbf{i} + 3\,\mathrm{sen}\,t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad P(-4, 0, \pi)$

En los ejercicios 73 a 76, hallar la curvatura y el radio de curvatura de la curva plana en el valor dado de *x*.

73. $y = \frac{1}{2}x^2 + 2, \quad x = 4$

74. $y = e^{-x/2}, \quad x = 0$

75. $y = \ln x, \quad x = 1$

76. $y = \tan x, \quad x = \dfrac{\pi}{4}$

77. ***Redacción*** Un ingeniero civil diseña una autopista como se muestra en la figura. BC es un arco del círculo. AB y CD son rectas tangentes al arco circular. Criticar el diseño.

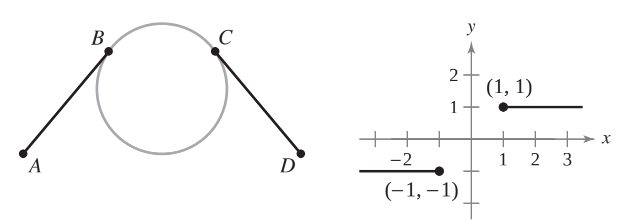


Figura para 77 **Figura para 78**

78. Un segmento de recta se extiende horizontalmente a la izquierda desde el punto $(-1, -1)$. Otro segmento de recta se extiende horizontalmente a la derecha del punto $(1, 1)$, como se muestra en la figura. Hallar una curva de la forma

$$y = ax^5 + bx^3 + cx$$

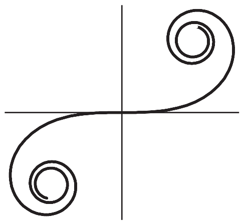
que una los puntos $(-1, -1)$ y $(1, 1)$ de manera que la pendiente y curvatura de la curva sean cero en los puntos terminales.

SP Solución de problemas

1. La **espiral de Cornu** está dada por

$$x(t) = \int_0^t \cos\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du \quad \text{y} \quad y(t) = \int_0^t \text{sen}\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du.$$

La espiral mostrada en la figura fue trazada sobre el intervalo $-\pi \leq t \leq \pi$.



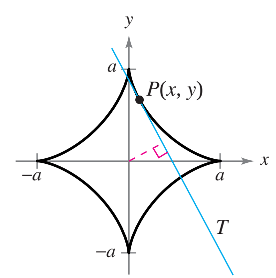
Generada con Mathematica

a) Hallar la longitud de arco de esta curva desde $t = 0$ hasta $t = a$.

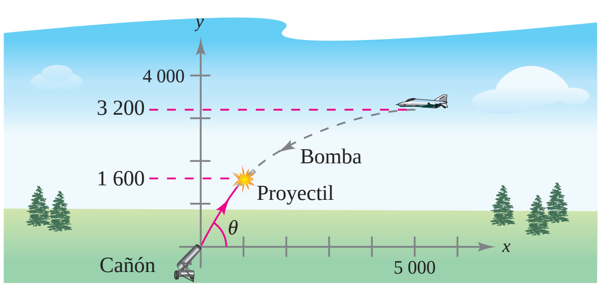
b) Hallar la curvatura de la gráfica cuando $t = a$.

c) La espiral de Cornu la descubrió James Bernoulli. Bernoulli encontró que la espiral tiene una relación interesante entre curvatura y longitud del arco. ¿Cuál es esta relación?

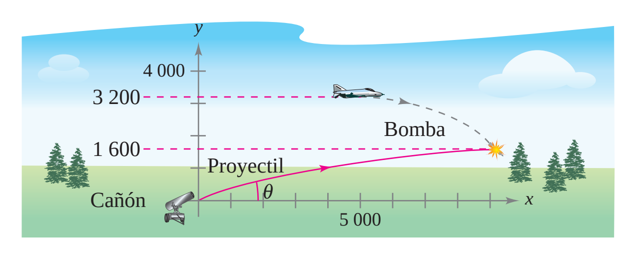
2. Sea T la recta tangente en el punto $P(x, y)$ a la gráfica de la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$, como se observa en la figura. Mostrar que el radio de curvatura en P es el triple de la distancia del origen a la recta tangente T.



3. Un bombardero vuela horizontalmente a una altitud de 3 200 pies con una velocidad de 400 pies por segundo cuando suelta una bomba. Un proyectil se lanza 5 segundos después desde un cañón orientado hacia el bombardero y abajo a 5 000 pies del punto original del bombardero, como se muestra en la figura. El proyectil va a interceptar la bomba a una altitud de 1 600 pies. Determinar la velocidad inicial y el ángulo de inclinación del proyectil. (Despreciar la resistencia del aire.)



4. Repetir el ejercicio 3 si el bombardero está orientado en dirección opuesta a la del lanzamiento, como se muestra en la figura.

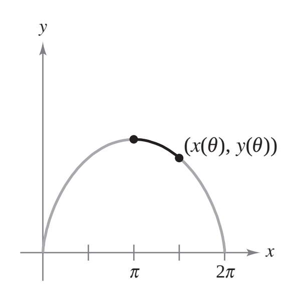


5. Considerar un arco de la cicloide

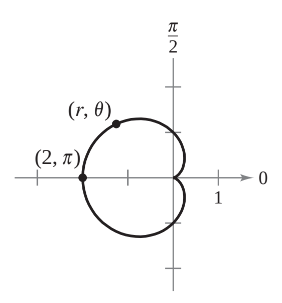
$$\mathbf{r}(\theta) = (\theta - \text{sen}\,\theta)\mathbf{i} + (1 - \cos\theta)\mathbf{j}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

que se muestra en la figura. Sea $s(\theta)$ la longitud de arco desde el punto más alto del arco hasta el punto $(x(\theta), y(\theta))$, y sea $\rho(\theta) = \dfrac{1}{K}$ el radio de curvatura en el punto $(x(\theta), y(\theta))$.

Mostrar que s y ρ están relacionados por la ecuación $s^2 + \rho^2 = 16$. (Esta ecuación se llama *ecuación natural* de la curva.)



6. Considere la cardioide $r = 1 - \cos\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, que se muestra en la figura. Sea $s(\theta)$ la longitud de arco desde el punto $(2, \pi)$ de la cardioide hasta el punto (r, θ), y sea $\rho(\theta) = \dfrac{1}{K}$ el radio de curvatura en el punto (r, θ). Mostrar que s y ρ están relacionados por la ecuación $s^2 + 9\rho^2 = 16$. (Esta ecuación se llama *ecuación natural* de la curva.)



7. Si $\mathbf{r}(t)$ es una función no nula y derivable en t, demostrar que

$$\frac{d}{dt}(\|\mathbf{r}(t)\|) = \frac{1}{\|\mathbf{r}(t)\|}\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t).$$

8. Un satélite de comunicaciones se mueve en una órbita circular alrededor de la Tierra a una distancia de 42 000 kilómetros del centro de la Tierra. La velocidad angular

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega = \frac{\pi}{12} \text{ radianes por hora}$$

es constante.

a) Utilizar coordenadas polares para mostrar que el vector aceleración está dado por

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\mathbf{u}_\mathbf{r} + \left[r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right]\mathbf{u}_\theta$$

donde $\mathbf{u}_\mathbf{r} = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$ es el vector unitario en la dirección radial y $\mathbf{u}_\theta = -\operatorname{sen}\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}$.

b) Hallar las componentes radial y angular de la aceleración para el satélite.

En los ejercicios 9 a 11, usar el vector binormal definido por la ecuación $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$.

9. Hallar los vectores unitario tangente, unitario normal y binormal a la hélice $\mathbf{r}(t) = 4\cos t\mathbf{i} + 4\operatorname{sen} t\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$ en $t = \frac{\pi}{2}$. Dibujar la hélice junto con estos tres vectores unitarios mutuamente ortogonales.

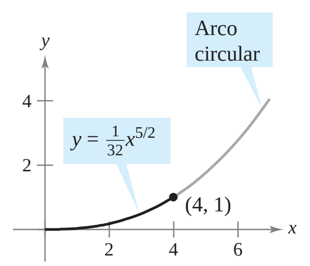
10. Hallar los vectores unitario tangente, unitario normal y binormal a la curva $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} - \mathbf{k}$ en $t = \frac{\pi}{4}$. Dibujar la hélice junto con estos tres vectores unitarios mutuamente ortogonales.

11. *a*) Demostrar que existe un escalar τ, llamado **torsión**, tal que $d\mathbf{B}/ds = -\tau\mathbf{N}$.

b) Demostrar que $\dfrac{d\mathbf{N}}{ds} = -K\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$.

(Las tres ecuaciones $d\mathbf{T}/ds = K\mathbf{N}$, $d\mathbf{N}/ds = -K\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$ y $d\mathbf{B}/ds = -\tau\mathbf{N}$ son llamadas las *fórmulas de Frenet-Serret.*)

12. Una autopista tiene una rampa de salida que empieza en el origen de un sistema coordenado y sigue la curva $y = \frac{1}{32}x^{5/2}$ hasta el punto (4, 1) (ver la figura). Después sigue una trayectoria circular cuya curvatura es la dada por la curva en (4, 1). ¿Cuál es el radio del arco circular? Explicar por qué la curva y el arco circular deben tener en (4, 1) la misma curvatura.





13. Considerar la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle t\cos\pi t, t\operatorname{sen}\pi t\rangle$, $0 \le t \le 2$.

a) Usar una herramienta de graficación para representar la función.

b) Hallar la longitud de arco en el inciso *a*).

c) Hallar la curvatura K como función de t. Hallar las curvaturas cuando t es 0, 1 y 2.

d) Usar una herramienta de graficación para representar la función K.

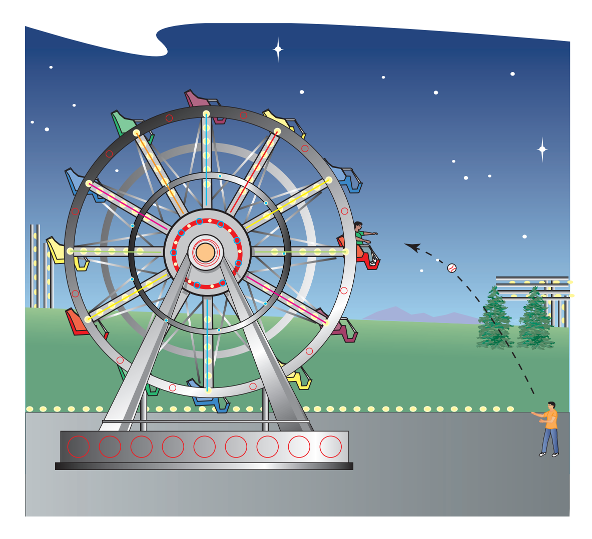
e) Hallar (si es posible) el $\lim_{t\to\infty} K$.

f) Con el resultado del inciso *e*), hacer conjeturas acerca de la gráfica de $\mathbf{r}$ cuando $t \to \infty$.

14. Se quiere lanzar un objeto a un amigo que está en una rueda de la fortuna (ver la figura). Las ecuaciones paramétricas siguientes dan la trayectoria del amigo $\mathbf{r}_1(t)$ y la trayectoria del objeto $\mathbf{r}_2(t)$. La distancia está dada en metros y el tiempo en segundos.

$$\mathbf{r}_1(t) = 15\left(\operatorname{sen}\frac{\pi t}{10}\right)\mathbf{i} + \left(16 - 15\cos\frac{\pi t}{10}\right)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_2(t) = [22 - 8.03(t - t_0)]\mathbf{i} + [1 + 11.47(t - t_0) - 4.9(t - t_0)^2]\mathbf{j}$$



a) Localizar la posición del amigo en la rueda en el instante $t = 0$.

b) Determinar el número de revoluciones por minuto de la rueda.

c) ¿Cuál es la rapidez y el ángulo de inclinación (en grados) al que el objeto es lanzado en el instante $t = t_0$?

d) Usar una herramienta de graficación para representar las funciones vectoriales usando un valor de t_0 que permite al amigo alcanzar el objeto. (Hacer esto por ensayo y error.) Explicar la importancia de t_0.

e) Hallar el instante aproximado en el que el amigo deberá poder atrapar el objeto. Aproximar las velocidades del amigo y del objeto en ese instante.

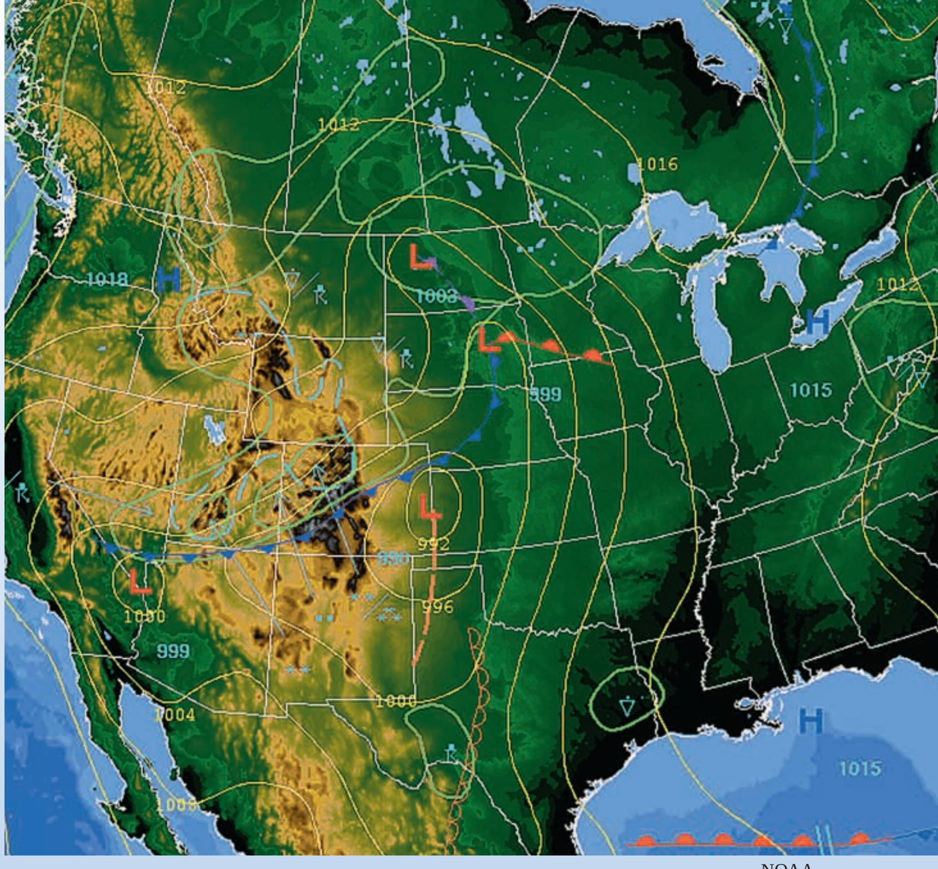


13 Funciones de varias variables

En este capítulo se estudiarán funciones de más de una variable independiente. Muchos de los conceptos presentados son extensiones de ideas familiares de capítulos recientes.

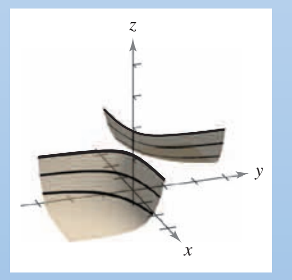
En este capítulo, se aprenderá:

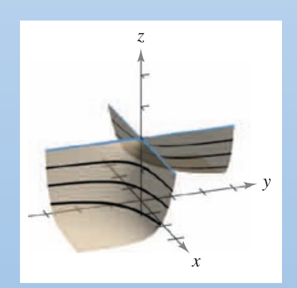
- Cómo trazar una gráfica, curvas de nivel y superficies de nivel. (13.1)
- Cómo encontrar un límite y determinar la continuidad. (13.2)
- Cómo encontrar y usar una derivada parcial. (13.3)
- Cómo encontrar y usar una diferencial total y determinar diferenciabilidad. (13.4)
- Cómo usar la regla de la cadena y encontrar una derivada parcial implícita. (13.5)
- Cómo encontrar y usar una derivada direccional y un gradiente. (13.6)
- Cómo encontrar una ecuación de un plano tangente y una ecuación de una recta normal a una superficie, y cómo encontrar el ángulo de inclinación de un plano. (13.7)
- Cómo encontrar los extremos absolutos y relativos. (13.8)
- Cómo resolver un problema de optimización, incluida optimización restringida usando un multiplicador de Lagrange, y cómo usar el método de mínimos cuadrados. (13.9, 13.10)

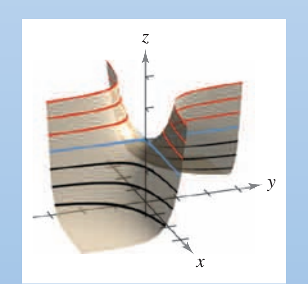


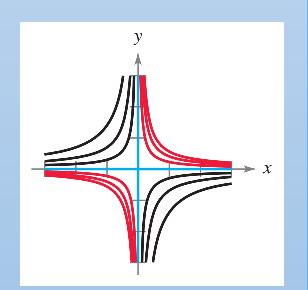
NOAA

Los meteorólogos usan mapas que muestran curvas de presión atmosférica igual, llamadas *isobaras*, para predecir los patrones del clima. ¿Cómo se pueden usar los gradientes de presión para determinar el área del país que tiene las mayores velocidades de viento? (Ver la sección 13.6, ejercicio 68.)









Muchas cantidades de la vida real son funciones de dos o más variables. En la sección 13.1 se aprenderá cómo graficar una función de dos variables, tal como la que se muestra arriba. Las primeras tres gráficas muestran vistas cortadas de la superficie en varios trazos. Otra forma de visualizar estas superficies es proyectar los trazos hacia el plano *xy*, tal como se muestra en la cuarta gráfica.

13.1 Introducción a las funciones de varias variables

- Entender la notación para una función de varias variables.
- Dibujar la gráfica de una función de dos variables.
- Dibujar las curvas de nivel de una función de dos variables.
- Dibujar las superficies de nivel de una función de tres variables.
- Utilizar gráficos por computadora para representar una función de dos variables.

Funciones de varias variables

> **EXPLORACIÓN**
>
> ***Comparación de dimensiones***
> Sin usar una herramienta de graficación, describir la gráfica de cada función de dos variables.
>
> ***a)*** $z = x^2 + y^2$
> ***b)*** $z = x + y$
> ***c)*** $z = x^2 + y$
> ***d)*** $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
> ***e)*** $z = \sqrt{1 - x^2 + y^2}$

Hasta ahora en este texto, sólo se han visto funciones de una sola variable (independiente). Sin embargo, muchos problemas comunes son funciones de dos o más variables. Por ejemplo, el trabajo realizado por una fuerza $(W = FD)$ y el volumen de un cilindro circular recto $(V = \pi r^2 h)$ son funciones de dos variables. El volumen de un sólido rectangular $(V = lwh)$ es una función de tres variables. La notación para una función de dos o más variables es similar a la utilizada para una función de una sola variable. Aquí se presentan dos ejemplos.

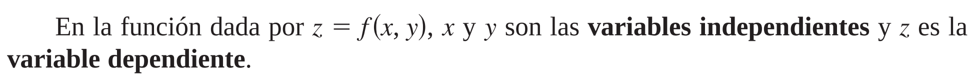
$$z = f(\underbrace{x, y}_{\text{2 variables}}) = x^2 + xy \qquad \text{Función de 2 variables.}$$

y

$$w = f(\underbrace{x, y, z}_{\text{3 variables}}) = x + 2y - 3z \qquad \text{Función de 3 variables.}$$

DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

Sea D un conjunto de pares ordenados de números reales. Si a cada par ordenado (x, y) de D le corresponde un único número real $f(x, y)$, entonces se dice que f es una **función de *x* y *y***. El conjunto D es el **dominio** de f, y el correspondiente conjunto de valores $f(x, y)$ es el **rango** de f.



En la función dada por $z = f(x, y)$, x y y son las **variables independientes** y z es la **variable dependiente**.

Pueden darse definiciones similares para las funciones de tres, cuatro o n variables donde los dominios consisten en tríadas (x_1, x_2, x_3), tétradas (x_1, x_2, x_3, x_4) y n-adas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. En todos los casos, rango es un conjunto de números reales. En este capítulo, sólo se estudian funciones de dos o tres variables.



MARY FAIRFAX SOMERVILLE (1780-1872)
Somerville se interesó por el problema de crear modelos geométricos de funciones de varias variables. Su libro más conocido, *The Mechanics of the Heavens*, se publicó en 1831.

Como ocurre con las funciones de una variable, la manera más común para describir una función de varias variables es por medio de una *ecuación*, y a menos que se diga explícitamente lo contrario, se puede suponer que el dominio es el conjunto de todos los puntos para los que la ecuación está definida. Por ejemplo, el dominio de la función dada por

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

se supone que es todo el plano xy. Similarmente, el dominio de

$$f(x, y) = \ln xy$$

es el conjunto de todos los puntos (x, y) en el plano para los que $xy > 0$. Esto consiste en todos los puntos del primer y tercer cuadrantes.

EJEMPLO 1 Dominios de funciones de varias variables

Hallar el dominio de cada función.

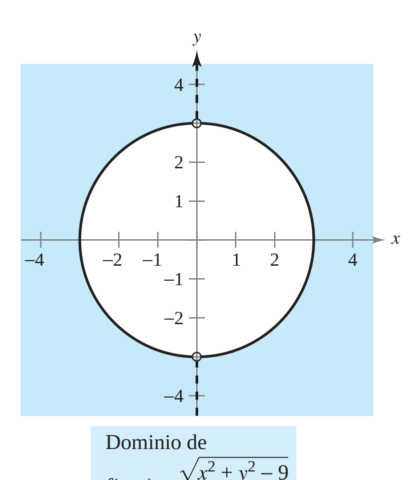
a) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}{x}$ **b)** $g(x, y, z) = \dfrac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}}$

Solución

a) La función f está definida para todos los puntos (x, y) tales que $x \neq 0$ y

$$x^2 + y^2 \geq 9.$$

Por tanto, el dominio es el conjunto de todos los puntos que están en el círculo $x^2 + y^2 = 9$, o en su exterior, con *excepción* de los puntos en el eje y, como se muestra en la figura 13.1.



Dominio de
$f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}{x}$

Figura 13.1

b) La función g está definida para todos los puntos (x, y, z) tales que

$$x^2 + y^2 + z^2 < 9.$$

Por consiguiente, el dominio es el conjunto de todos los puntos (x, y, z) que se encuentran en el interior de la esfera de radio 3 centrada en el origen.

Las funciones de varias variables pueden combinarse de la misma manera que las funciones de una sola variable. Por ejemplo, se puede formar la suma, la diferencia, el producto y el cociente de funciones de dos variables como sigue.

$$(f \pm g)(x, y) = f(x, y) \pm g(x, y)$$ Suma o diferencia.

$$(fg)(x, y) = f(x, y)g(x, y)$$ Producto.

$$\frac{f}{g}(x, y) = \frac{f(x, y)}{g(x, y)} \quad g(x, y) \neq 0$$ Cociente.

No se puede formar la composición de dos funciones de varias variables. Sin embargo, si h es una función de varias variables y g es una función de una sola variable, puede formarse la función **compuesta** $(g \circ h)(x, y)$ como sigue.

$$(g \circ h)(x, y) = g(h(x, y))$$ Composición.

El dominio de esta función compuesta consta de todo (x, y) en el dominio de h tal que $h(x, y)$ está en el dominio de g. Por ejemplo, la función dada por

$$f(x, y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$$

puede verse como la composición de la función de dos variables dadas por $h(x, y) = 16 - 4x^2 - y^2$ y la función de una sola variable dada por $g(u) = \sqrt{u}$. El dominio de esta función es el conjunto de todos los puntos que se encuentran en la elipse dada por $4x^2 + y^2 = 16$ o en su interior.

Una función que puede expresarse como suma de funciones de la forma $cx^m y^n$ (donde c es un número real y m y n son enteros no negativos) se llama una **función polinomial** de dos variables. Por ejemplo, las funciones dadas por

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + x + 2 \quad \text{y} \quad g(x, y) = 3xy^2 + x - 2$$

son funciones polinomiales de dos variables. Una **función racional** es el cociente de dos funciones polinomiales. Terminología similar se utiliza para las funciones de más de dos variables.

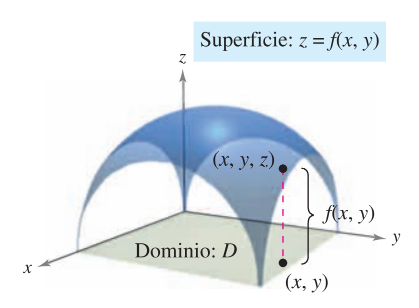


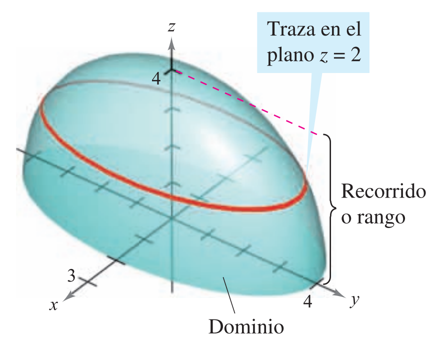
Figura 13.2

Gráfica de una función de dos variables

Como en el caso de las funciones de una sola variable, se puede saber mucho acerca del comportamiento de una función de dos variables dibujando su gráfica. La **gráfica** de una función f de dos variables es el conjunto de todos los puntos (x, y, z) para los que $z = f(x, y)$ y (x, y) está en el dominio de f. Esta gráfica puede interpretarse geométricamente como una *superficie en el espacio*, como se explicó en las secciones 11.5 y 11.6. En la figura 13.2 hay que observar que la gráfica de $z = f(x, y)$ es una superficie cuya proyección sobre el plano xy es D, el dominio de f. A cada punto (x, y) en D corresponde un punto (x, y, z) de la superficie y, viceversa, a cada punto (x, y, z) de la superficie le corresponde un punto (x, y) en D.

EJEMPLO 2 Descripción de la gráfica de una función de dos variables

¿Cuál es el rango de $f(x, y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$? Describir la gráfica de f.



La gráfica de $f(x, y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$ es la mitad superior de un elipsoide
Figura 13.3

Solución El dominio D dado por la ecuación de f es el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que $16 - 4x^2 - y^2 \geq 0$. Por tanto, D es el conjunto de todos los puntos que pertenecen o son interiores a la elipse dada por

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1. \qquad \text{Elipse en el plano } xy.$$

El rango de f está formado por todos los valores $z = f(x, y)$ tales que $0 \leq z \leq \sqrt{16}$ o sea

$$0 \leq z \leq 4. \qquad \text{Rango de } f.$$

Un punto (x, y, z) está en la gráfica de f si y sólo si

$$z = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$$
$$z^2 = 16 - 4x^2 - y^2$$
$$4x^2 + y^2 + z^2 = 16$$
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{16} = 1, \qquad 0 \leq z \leq 4.$$

De acuerdo con la sección 11.6, se sabe que la gráfica de f es la mitad superior de un elipsoide, como se muestra en la figura 13.3.

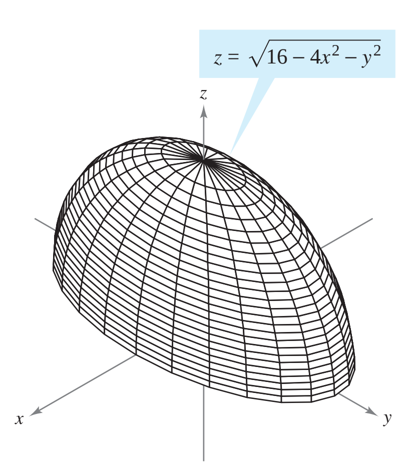


Figura 13.4

Para dibujar *a mano* una superficie en el espacio, es útil usar trazas en planos paralelos a los planos coordenados, como se muestra en la figura 13.3. Por ejemplo, para hallar la traza de la superficie en el plano $z = 2$, se sustituye $z = 2$ en la ecuación $z = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$ y se obtiene

$$2 = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

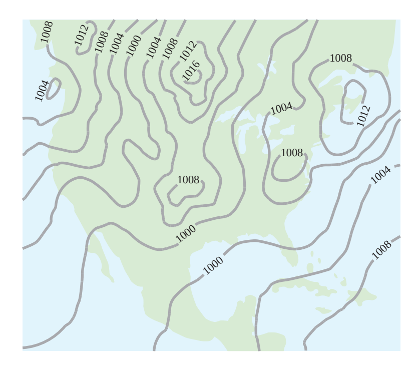
Por tanto, la traza es una elipse centrada en el punto $(0, 0, 2)$ con ejes mayor y menor de longitudes $4\sqrt{3}$ y $2\sqrt{3}$.

Las trazas también se usan en la mayor parte de las herramientas de graficación tridimensionales. Por ejemplo, la figura 13.4 muestra una versión generada por computadora de la superficie dada en el ejemplo 2. En esta gráfica la herramienta de graficación tomó 25 trazas paralelas al plano xy y 12 trazas en planos verticales.

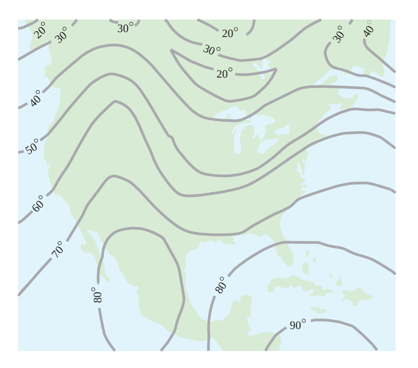
Si se dispone de una herramienta de graficación tridimensional, utilícese para representar varias superficies.

Curvas de nivel

Una segunda manera de visualizar una función de dos variables es usar un **campo escalar** en el que el escalar $z = f(x, y)$ se asigna al punto (x, y). Un campo escalar puede caracterizarse por sus **curvas de nivel** (o **líneas de contorno**) a lo largo de las cuales el valor de $f(x, y)$ es constante. Por ejemplo, el mapa climático en la figura 13.5 muestra las curvas de nivel de igual presión, llamadas **isobaras**. Las curvas de nivel que representan puntos de igual temperatura en mapas climáticos, se llaman **isotermas**, como se muestra en la figura 13.6. Otro uso común de curvas de nivel es la representación de campos de potencial eléctrico. En este tipo de mapa, las curvas de nivel se llaman **líneas equipotenciales**.



Las curvas de nivel muestran las líneas de igual presión (isobaras) medidas en milibares
Figura 13.5



Las curvas de nivel muestran líneas de igual temperatura (isotermas) medidas en grados Fahrenheit
Figura 13.6

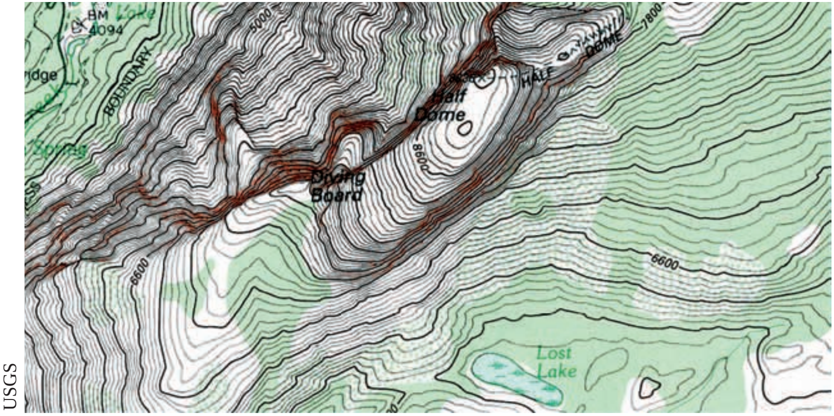
Los mapas de contorno suelen usarse para representar regiones de la superficie de la Tierra, donde las curvas de nivel representan la altura sobre el nivel del mar. Este tipo de mapas se llama **mapa topográfico**. Por ejemplo, la montaña mostrada en la figura 13.7 se representa por el mapa topográfico de la figura 13.8.

Un mapa de contorno representa la variación de z respecto a x y y mediante espacio entre las curvas de nivel. Una separación grande entre las curvas de nivel indica que z cambia lentamente, mientras que un espacio pequeño indica un cambio rápido en z. Además, en un mapa de contorno, es importante elegir valores de *c uniformemente espaciados*, para dar una mejor ilusión tridimensional.



Alfred B. Thomas/Earth Scenes

Figura 13.7



USGS

Figura 13.8

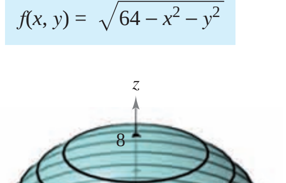
EJEMPLO 3 Dibujo de un mapa de contorno

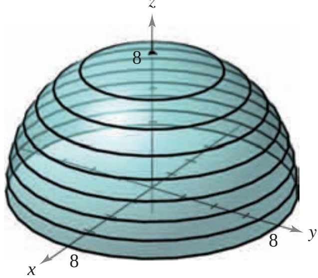
El hemisferio dado por $f(x, y) = \sqrt{64 - x^2 - y^2}$ se muestra en la figura 13.9. Dibujar un mapa de contorno de esta superficie utilizando curvas de nivel que correspondan a $c = 0, 1, 2, \ldots, 8$.

Solución Para cada c, la ecuación dada por $f(x, y) = c$ es un círculo (o un punto) en el plano xy. Por ejemplo, para $c_1 = 0$, la curva de nivel es

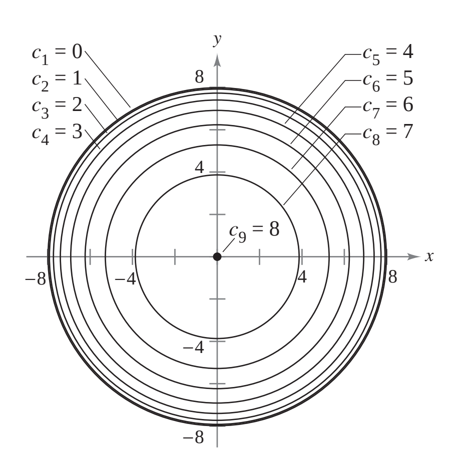
$$x^2 + y^2 = 64 \qquad \text{Círculo de radio 8.}$$

la cual es un círculo de radio 8. La figura 13.10 muestra las nueve curvas de nivel del hemisferio.

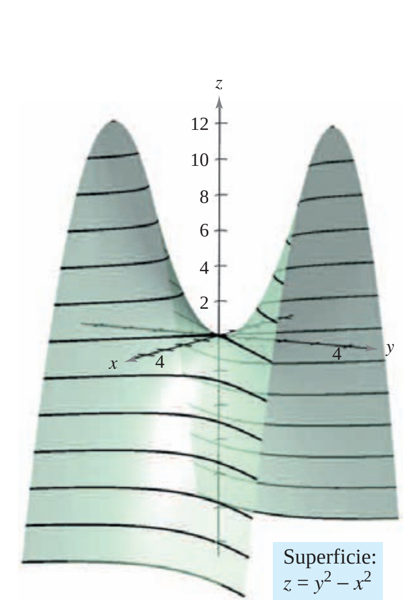




Hemisferio
Figura 13.9



Mapa de contorno
Figura 13.10



Paraboloide hiperbólico
Figura 13.11

EJEMPLO 4 Dibujo de un mapa de contorno

El paraboloide hiperbólico dado por

$$z = y^2 - x^2$$

se muestra en la figura 13.11. Dibujar un mapa de contorno de esta superficie.

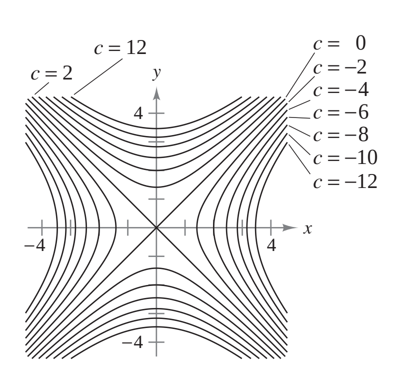
Solución Para cada valor de c, sea $f(x, y) = c$ y dibújese la curva de nivel resultante en el plano xy. Para esta función, cada una de las curvas de nivel $(c \neq 0)$ es una hipérbola cuyas asíntotas son las rectas $y = \pm x$. Si $c < 0$, el eje transversal es horizontal. Por ejemplo, la curva de nivel para $c = -4$ está dada por

$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1. \qquad \text{Hipérbola con eje transversal horizontal.}$$

Si $c > 0$, el eje transversal es vertical. Por ejemplo, la curva de nivel para $c = 4$ está dada por

$$\frac{y^2}{2^2} - \frac{x^2}{2^2} = 1. \qquad \text{Hipérbola con eje transversal vertical.}$$

Si $c = 0$, la curva de nivel es la cónica degenerada representada por las asíntotas que se cortan, como se muestra en la figura 13.12.



Curvas de nivel hiperbólicas
(con incrementos de 2)
Figura 13.12

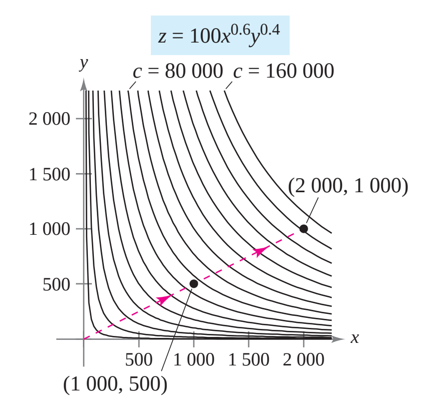
Un ejemplo de función de dos variables utilizada en economía es la **función de producción de Cobb-Douglas**. Esta función se utiliza como un modelo para representar el número de unidades producidas al variar las cantidades de trabajo y capital. Si x mide las unidades de trabajo y y mide las unidades de capital, el número de unidades producidas está dado por

$$f(x, y) = Cx^a y^{1-a}$$

donde C y a son constantes, con $0 < a < 1$.

EJEMPLO 5 La función de producción de Cobb-Douglas

Un fabricante de juguetes estima que su función de producción es $f(x, y) = 100x^{0.6}y^{0.4}$, donde x es el número de unidades de trabajo y y es el número de unidades de capital. Comparar el nivel de producción cuando $x = 1\,000$ y $y = 500$ con el nivel de producción cuando $x = 2\,000$ y $y = 1\,000$.



Curvas de nivel (con incrementos de 10 000)
Figura 13.13

Solución Cuando $x = 1\,000$ y $y = 500$, el nivel de producción es

$$f(1\,000, 500) = 100(1\,000^{0.6})(500^{0.4}) \approx 75\,786.$$

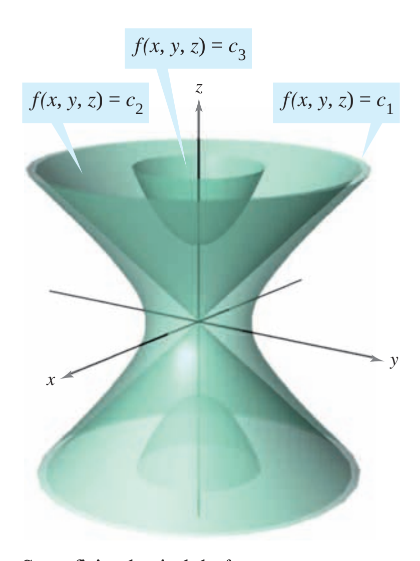
Cuando $x = 2\,000$ y $y = 1\,000$, el nivel de producción es

$$f(2\,000, 1\,000) = 100(2\,000^{0.6})(1\,000^{0.4}) = 151\,572.$$

Las curvas de nivel de $z = f(x, y)$ se muestran en la figura 13.13. Nótese que al doblar ambas x y y, se duplica el nivel de producción (ver ejercicio 79).

Superficies de nivel

El concepto de curva de nivel puede extenderse una dimensión para definir una **superficie de nivel**. Si f es una función de tres variables y c es una constante, la gráfica de la ecuación $f(x, y, z) = c$ es una **superficie de nivel** de la función f, como se muestra en la figura 13.14.



Superficies de nivel de f
Figura 13.14

Ingenieros y científicos han desarrollado mediante computadoras otras formas de ver funciones de tres variables. Por ejemplo, la figura 13.15 muestra una simulación computacional que usa colores para representar la distribución de temperaturas del fluido que entra en el tubo.

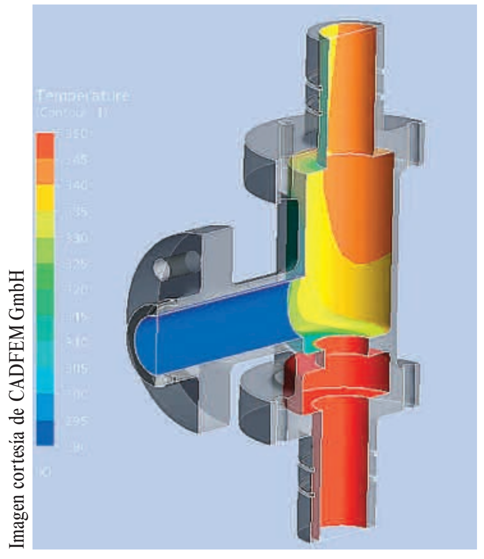


Imagen cortesía de CADFEM GmbH

Una forma común de ANSYS CFX™ y ANSYS Mechanical™ para análisis de esfuerzos térmicos.
Figura 13.15

EJEMPLO 6 Superficies de nivel

Describir las superficies de nivel de la función

$$f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + z^2.$$

Solución Cada superficie de nivel tiene una ecuación de la forma

$$4x^2 + y^2 + z^2 = c. \qquad \text{Ecuación de una superficie de nivel.}$$

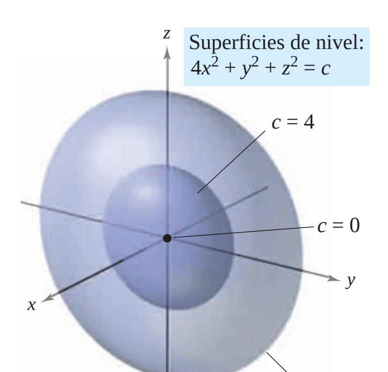


Figura 13.16

Por tanto, las superficies de nivel son elipsoides (cuyas secciones transversales paralelas al plano yz son círculos). A medida que c aumenta, los radios de las secciones transversales circulares aumentan según la raíz cuadrada de c. Por ejemplo, las superficies de nivel correspondientes a los valores $c = 0$, $c = 4$ y $c = 16$ son como sigue.

$$4x^2 + y^2 + z^2 = 0 \qquad \text{Superficie de nivel para } c = 0 \text{ (un solo punto).}$$

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1 \qquad \text{Superficie de nivel para } c = 4 \text{ (elipsoide).}$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{16} = 1 \qquad \text{Superficie de nivel para } c = 16 \text{ (elipsoide).}$$

Estas superficies de nivel se muestran en la figura 13.16.

NOTA Si la función del ejemplo 6 representara la *temperatura* en el punto (x, y, z), las superficies de nivel mostradas en la figura 13.16 se llamarían **superficies isotermas**.

Gráficas por computadora

El problema de dibujar la gráfica de una superficie en el espacio puede simplificarse usando una computadora. Aunque hay varios tipos de herramientas de graficación tridimensionales, la mayoría utiliza alguna forma de análisis de trazas para dar la impresión de tres dimensiones. Para usar tales herramientas de graficación, por lo general se necesita dar la ecuación de la superficie, la región del plano xy sobre la cual la superficie ha de visualizarse y el número de trazas a considerar. Por ejemplo, para representar gráficamente la superficie dada por

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{1 - x^2 - y^2}$$

se podrían elegir los límites siguientes para x, y y z.

$$-3 \le x \le 3 \qquad \text{Límites para } x.$$

$$-3 \le y \le 3 \qquad \text{Límites para } y.$$

$$0 \le z \le 3 \qquad \text{Límites para } z.$$

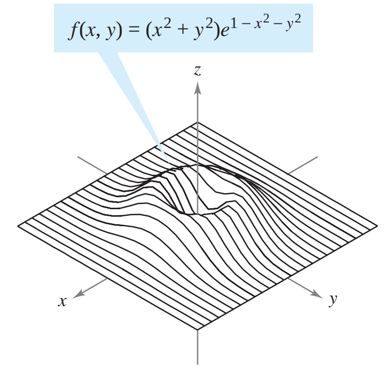
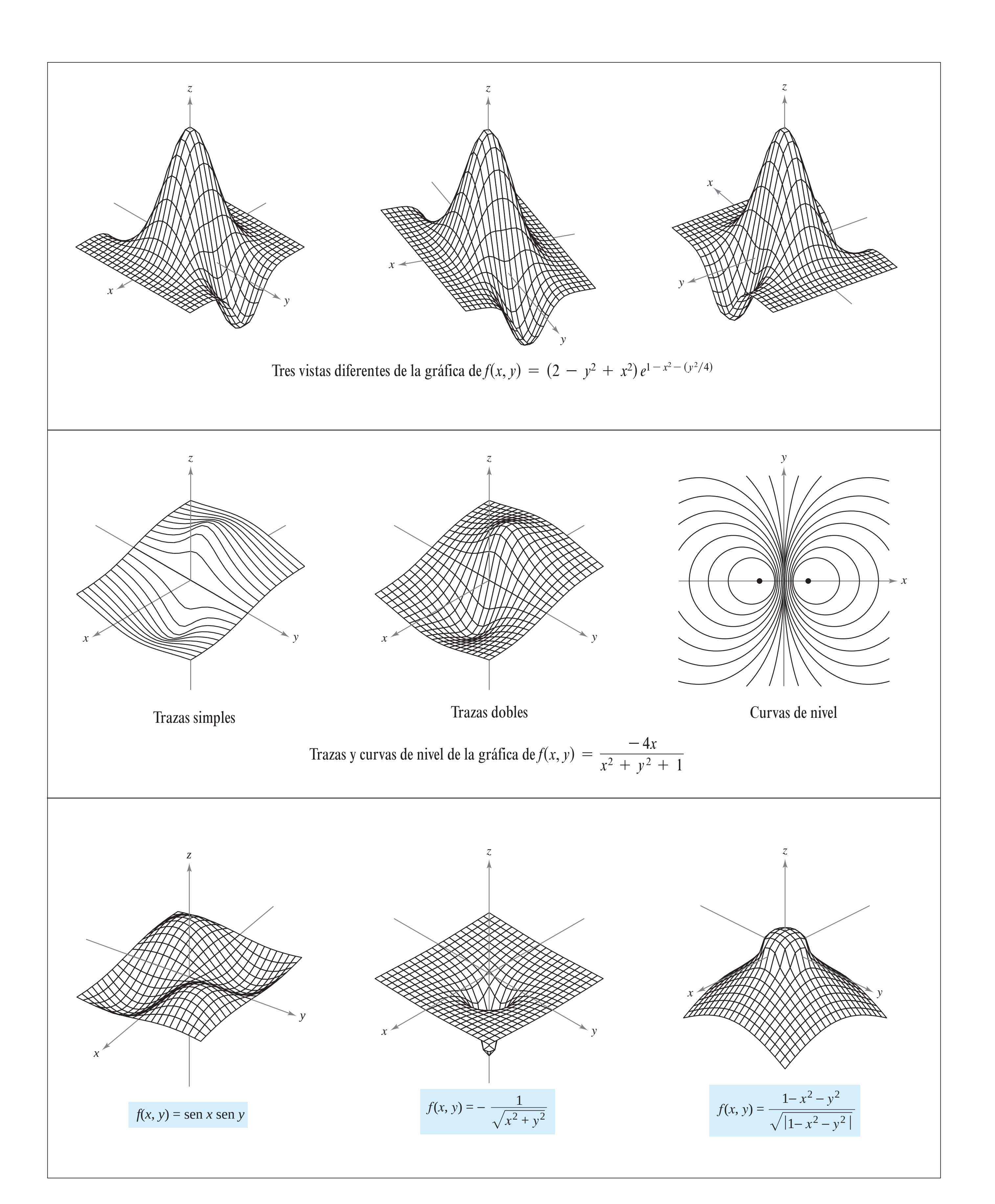


Figura 13.17

La figura 13.17 muestra una gráfica de esta superficie generada por computadora utilizando 26 trazas paralelas al plano yz. Para realizar el efecto tridimensional, el programa utiliza una rutina de "línea oculta". Es decir, comienza dibujando las trazas en primer plano (las correspondientes a los valores mayores de x), y después, a medida que se dibuja una nueva traza, el programa determina si mostrará toda o sólo parte de la traza siguiente.

Las gráficas en la página siguiente muestran una variedad de superficies que fueron dibujadas por una computadora. Si se dispone de un programa de computadora para dibujo, podrán reproducirse estas superficies.

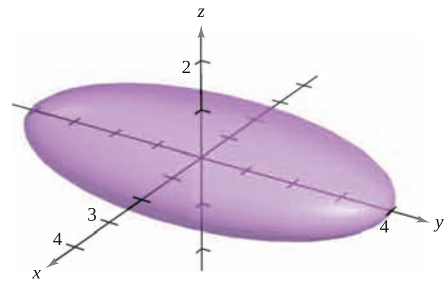

z
x
y
Tres vistas diferentes de la gráfica de $f(x, y) = (2 - y^2 + x^2)e^{1 - x^2 - (y^2/4)}$
Trazas simples
Trazas dobles
Curvas de nivel
Trazas y curvas de nivel de la gráfica de $f(x, y) = \dfrac{-4x}{x^2 + y^2 + 1}$
$f(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$
$f(x, y) = -\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
$f(x, y) = \dfrac{1 - x^2 - y^2}{\sqrt{|1 - x^2 - y^2|}}$

13.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 y 2, usar la gráfica para determinar si z es una función de x y y. Explicar.

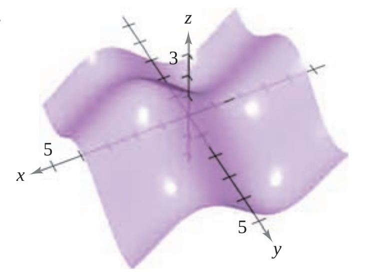


1.





2.



En los ejercicios 3 a 6, determinar si z es una función de x y y.

3. $x^2z + 3y^2 - xy = 10$

4. $xz^2 + 2xy - y^2 = 4$

5. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + z^2 = 1$

6. $z + x \ln y - 8yz = 0$

En los ejercicios 7 a 18, hallar y simplificar los valores de la función.

7. $f(x, y) = xy$

a) $(3, 2)$ *b)* $(-1, 4)$ *c)* $(30, 5)$

d) $(5, y)$ *e)* $(x, 2)$ *f)* $(5, t)$

8. $f(x, y) = 4 - x^2 - 4y^2$

a) $(0, 0)$ *b)* $(0, 1)$ *c)* $(2, 3)$

d) $(1, y)$ *e)* $(x, 0)$ *f)* $(t, 1)$

9. $f(x, y) = xe^y$

a) $(5, 0)$ *b)* $(3, 2)$ *c)* $(2, -1)$

d) $(5, y)$ *e)* $(x, 2)$ *f)* (t, t)

10. $g(x, y) = \ln|x + y|$

a) $(1, 0)$ *b)* $(0, -1)$ *c)* $(0, e)$

d) $(1, 1)$ *e)* $(e, e/2)$ *f)* $(2, 5)$

11. $h(x, y, z) = \dfrac{xy}{z}$

a) $(2, 3, 9)$ *b)* $(1, 0, 1)$ *c)* $(-2, 3, 4)$ *d)* $(5, 4, -6)$

12. $f(x, y, z) = \sqrt{x + y + z}$

a) $(0, 5, 4)$ *b)* $(6, 8, -3)$

c) $(4, 6, 2)$ *d)* $(10, -4, -3)$

13. $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$

a) $(2, \pi/4)$ *b)* $(3, 1)$ *c)* $(-3, \pi/3)$ *d)* $(4, \pi/2)$

14. $V(r, h) = \pi r^2 h$

a) $(3, 10)$ *b)* $(5, 2)$ *c)* $(4, 8)$ *d)* $(6, 4)$

15. $g(x, y) = \displaystyle\int_x^y (2t - 3)\, dt$

a) $(4, 0)$ *b)* $(4, 1)$ *c)* $\left(4, \frac{3}{2}\right)$ *d)* $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

16. $g(x, y) = \displaystyle\int_x^y \frac{1}{t}\, dt$

a) $(4, 1)$ *b)* $(6, 3)$ *c)* $(2, 5)$ *d)* $\left(\frac{1}{2}, 7\right)$

17. $f(x, y) = 2x + y^2$

a) $\dfrac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$

b) $\dfrac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$

18. $f(x, y) = 3x^2 - 2y$

a) $\dfrac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$

b) $\dfrac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$

En los ejercicios 19 a 30, describir el dominio y rango de la función.

19. $f(x, y) = x^2 + y^2$

20. $f(x, y) = e^{xy}$

21. $g(x, y) = x\sqrt{y}$

22. $g(x, y) = \dfrac{y}{\sqrt{x}}$

23. $z = \dfrac{x + y}{xy}$

24. $z = \dfrac{xy}{x - y}$

25. $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

26. $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$

27. $f(x, y) = \arccos(x + y)$

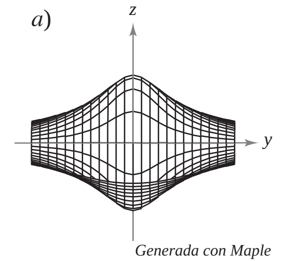
28. $f(x, y) = \operatorname{arcsen}(y/x)$

29. $f(x, y) = \ln(4 - x - y)$

30. $f(x, y) = \ln(xy - 6)$

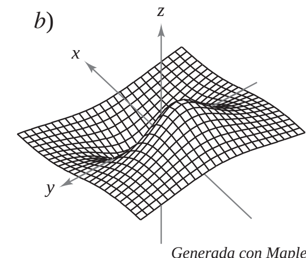
31. ***Para pensar*** Las gráficas marcadas *a*), *b*), *c*) y *d*) son gráficas de la función $f(x, y) = -4x/(x^2 + y^2 + 1)$. Asociar cada gráfica con el punto en el espacio desde el que la superficie es visualizada. Los cuatro puntos son $(20, 15, 25)$, $(-15, 10, 20)$, $(20, 20, 0)$ y $(20, 0, 0)$

a)



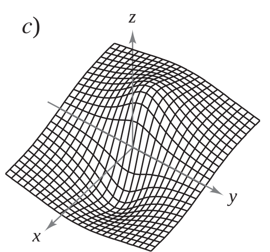
Generada con Maple

b)



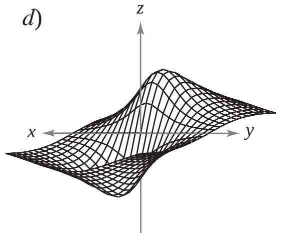
Generada con Maple

c)



Generada con Maple

d)



Generada con Maple



32. ***Para pensar*** Usar la función dada en el ejercicio 31.

a) Hallar el dominio y rango de la función.

b) Identificar los puntos en el plano *xy* donde el valor de la función es 0.

c) ¿Pasa la superficie por todos los octantes del sistema de coordenadas rectangular? Dar las razones de la respuesta.

En los ejercicios 33 a 40, dibujar la superficie dada por la función.

33. $f(x, y) = 4$

34. $f(x, y) = 6 - 2x - 3y$

35. $f(x, y) = y^2$

36. $g(x, y) = \frac{1}{2}y$

37. $z = -x^2 - y^2$

38. $z = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$

39. $f(x, y) = e^{-x}$

40. $f(x, y) = \begin{cases} xy, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & x < 0 \text{ o } y < 0 \end{cases}$



En los ejercicios 41 a 44, utilizar un sistema algebraico por computadora para álgebra y representar gráficamente la función.

41. $z = y^2 - x^2 + 1$

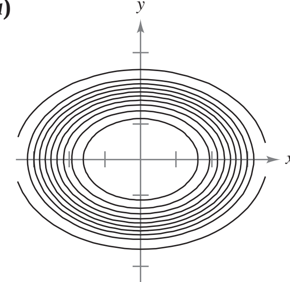
42. $z = \frac{1}{12}\sqrt{144 - 16x^2 - 9y^2}$

43. $f(x, y) = x^2 e^{(-xy/2)}$

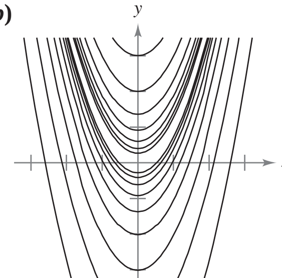
44. $f(x, y) = x \text{ sen } y$

En los ejercicios 45 a 48, asociar la gráfica de la superficie con uno de los mapas de contorno. [Los mapas de contorno están marcados *a*), *b*), *c*) y *d*).]

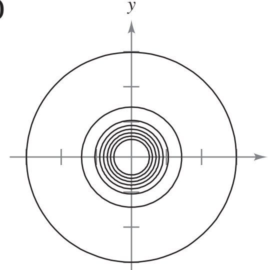
***a*)**



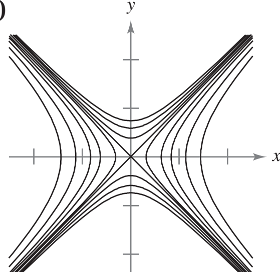
***b*)**



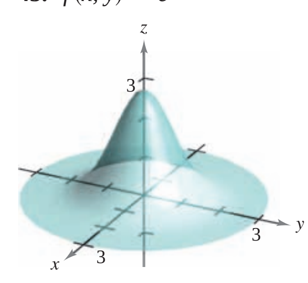
***c*)**



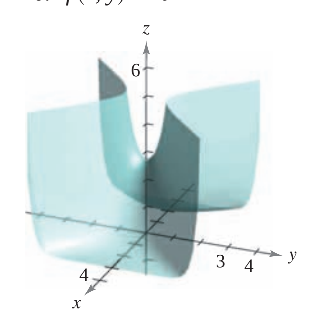
***d*)**



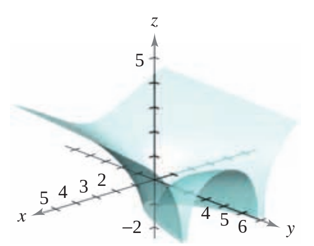
45. $f(x, y) = e^{1 - x^2 - y^2}$



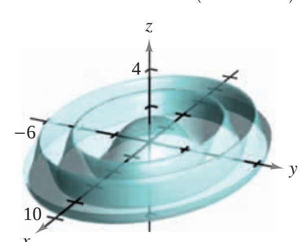
46. $f(x, y) = e^{1 - x^2 + y^2}$



47. $f(x, y) = \ln|y - x^2|$



48. $f(x, y) = \cos\left(\frac{x^2 + 2y^2}{4}\right)$



En los ejercicios 49 a 56, describir las curvas de nivel de la función. Dibujar las curvas de nivel para los valores dados de *c*.

49. $z = x + y, \quad c = -1, 0, 2, 4$

50. $z = 6 - 2x - 3y, \quad c = 0, 2, 4, 6, 8, 10$

51. $z = x^2 + 4y^2, \quad c = 0, 1, 2, 3, 4$

52. $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \quad c = 0, 1, 2, 3$

53. $f(x, y) = xy, \quad c = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 6$

54. $f(x, y) = e^{xy/2}, \quad c = 2, 3, 4, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$

55. $f(x, y) = x/(x^2 + y^2), \quad c = \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \pm 2$

56. $f(x, y) = \ln(x - y), \quad c = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \pm 2$



En los ejercicios 57 a 60, utilizar una herramienta de graficación para representar seis curvas de nivel de la función.

57. $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$

58. $f(x, y) = |xy|$

59. $g(x, y) = \dfrac{8}{1 + x^2 + y^2}$

60. $h(x, y) = 3 \text{ sen}(|x| + |y|)$

Desarrollo de conceptos

61. ¿Qué es una gráfica de una función de dos variables? ¿Cómo se interpreta geométricamente? Describir las curvas de nivel.

62. Todas las curvas de nivel de la superficie dada por $z = f(x, y)$ son círculos concéntricos. ¿Implica esto que la gráfica de *f* es un hemisferio? Ilustrar la respuesta con un ejemplo.

63. Construir una función cuyas curvas de nivel sean rectas que pasen por el origen.

Para discusión

64. Considerar la función $f(x, y) = xy$, para $x \geq 0$ y $y \geq 0$.

a) Trazar la gráfica de la superficie dada por *f*.

b) Conjeturar acerca de la relación entre las gráficas de *f* y $g(x, y) = f(x, y) - 3$. Explicar el razonamiento.

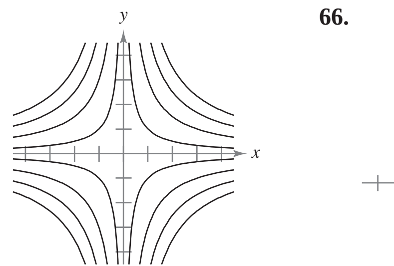
c) Conjeturar acerca de la relación entre las gráficas de *f* y $g(x, y) = -f(x, y)$. Explicar el razonamiento.

d) Conjeturar acerca de la relación entre las gráficas de *f* y $g(x, y) = \frac{1}{2}f(x, y)$. Explicar el razonamiento.

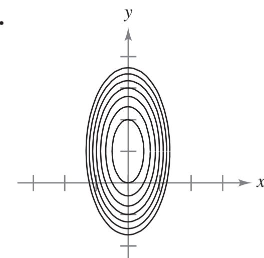
e) Sobre la superficie en el inciso *a*), trazar la gráfica de $z = f(x, x)$.

Redacción **En los ejercicios 65 y 66, utilizar las gráficas de las curvas de nivel (valores de c uniformemente espaciados) de la función f para dar una descripción de una posible gráfica de f. ¿Es única la gráfica de f? Explicar la respuesta.**

65.



66.



67. ***Inversión*** En el 2009 se efectuó una inversión de \$1 000 al 6% de interés compuesto anual. Suponemos que el inversor paga una tasa de impuesto R y que la tasa de inflación anual es I. En el año 2019, el valor V de la inversión en dólares constantes de 2009 es

$$V(I, R) = 1\,000\left[\frac{1 + 0.06(1 - R)}{1 + I}\right]^{10}.$$

Utilizar esta función de dos variables para completar la tabla.

Tasa de impuestos	Tasa de inflación		
	0	0.03	0.05
0			
0.28			
0.35			

68. ***Inversión*** Se depositan \$5 000 en una cuenta de ahorro a una tasa de interés compuesto continuo r (expresado en forma decimal). La cantidad $A(r, t)$ después de t años es $A(r, t) = 5\,000e^{rt}$. Utilizar esta función de dos variables para completar la tabla.

	Número de años			
Tasa	5	10	15	20
0.02				
0.03				
0.04				
0.05				

En los ejercicios 69 a 74, dibujar la gráfica de la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ para el valor de c que se especifica.

69. $f(x, y, z) = x - y + z, \quad c = 1$

70. $f(x, y, z) = 4x + y + 2z, \quad c = 4$

71. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad c = 9$

72. $f(x, y, z) = x^2 + \frac{1}{4}y^2 - z, \quad c = 1$

73. $f(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 - z^2, \quad c = 0$

74. $f(x, y, z) = \operatorname{sen} x - z, \quad c = 0$

75. ***Explotación forestal*** La **regla de los troncos de Doyle** es uno de varios métodos para determinar el rendimiento en madera aserrada (en tablones-pie) en términos de su diámetro d (en pulgadas) y su longitud L (en pies). El número de tablones-pie es

$$N(d, L) = \left(\frac{d - 4}{4}\right)^2 L.$$

a) Hallar el número de tablones-pie de madera aserrada producida por un tronco de 22 pulgadas de diámetro y 12 pies de longitud.

b) Evaluar $N(30, 12)$.

76. ***Modelo de filas*** La cantidad de tiempo promedio que un cliente espera en una fila para recibir un servicio es

$$W(x, y) = \frac{1}{x - y}, \quad x > y$$

donde y es el ritmo o tasa media de llegadas, expresada como número de clientes por unidad de tiempo, y x es el ritmo o tasa media de servicio, expresada en las mismas unidades. Evaluar cada una de las siguientes cantidades.

a) $W(15, 9)$ *b*) $W(15, 13)$ *c*) $W(12, 7)$ *d*) $W(5, 2)$

77. ***Distribución de temperaturas*** La temperatura T (en grados Celsius) en cualquier punto (x, y) de una placa circular de acero de 10 metros de radio es $T = 600 - 0.75x^2 - 0.75y^2$, donde x y y se miden en metros. Dibujar algunas de las curvas isotermas.

78. ***Potencial eléctrico*** El potencial eléctrico V en cualquier punto (x, y) es

$$V(x, y) = \frac{5}{\sqrt{25 + x^2 + y^2}}.$$

Dibujar las curvas equipotenciales de $V = \frac{1}{2}$, $V = \frac{1}{3}$ y $V = \frac{1}{4}$.

79. ***Función de producción de Cobb-Douglas*** Utilizar la función de producción de Cobb-Douglas (ver ejemplo 5) para mostrar que si el número de unidades de trabajo y el número de unidades de capital se duplican, el nivel de producción también se duplica.

80. ***Función de producción de Cobb-Douglas*** Mostrar que la función de producción de Cobb-Douglas $z = Cx^a y^{1-a}$ puede reescribirse como $\ln \frac{z}{y} = \ln C + a \ln \frac{x}{y}$.

81. ***Costo* de construcción*** Una caja rectangular abierta por arriba tiene x pies de longitud, y pies de ancho y z pies de alto. Construir la base cuesta \$1.20 por pie cuadrado y construir los lados \$0.75 por pie cuadrado. Expresar el costo C de construcción de la caja en función de x, y y z.

82. ***Volumen*** Un tanque de propano se construye soldando hemisferios a los extremos de un cilindro circular recto. Expresar el volumen V del tanque en función de r y l, donde r es el radio del cilindro y de los hemisferios, y l es la longitud del cilindro.

83. ***Ley de los gases ideales*** De acuerdo con la ley de los gases ideales, $PV = kT$, donde P es la presión, V es el volumen, T es la temperatura (en kelvins) y k es una constante de proporcionalidad. Un tanque contiene 2 000 pulgadas cúbicas de nitrógeno a una presión de 26 libras por pulgada cuadrada y una temperatura de 300 K.

a) Determinar k.

b) Expresar P como función de V y T y describir las curvas de nivel.

* En España se le denomina coste.

84. ***Modelo matemático*** La tabla muestra las ventas netas x (en miles de millones de dólares), los activos totales y (en miles de millones de dólares) y los derechos de los accionistas z (en miles de millones de dólares) de Wal-Mart desde 2002 hasta el 2007. (*Fuente: 2007 Annual Report for Wal-Mart*)

Año	2002	2003	2004	2005	2006	2007
x	201.2	226.5	252.8	281.5	208.9	345.0
y	79.3	90.2	102.5	117.1	135.6	151.2
z	35.2	39.5	43.6	49.4	53.2	61.6

Un modelo para estos datos es

$$z = f(x, y) = 0.026x + 0.316y + 5.04.$$

a) Utilizar una herramienta de graficación y el modelo para aproximar z para los valores dados de x y y.

b) ¿Cuál de las dos variables en este modelo tiene mayor influencia sobre los derechos de los accionistas?

c) Simplificar la expresión de $f(x, 95)$ e interpretar su significado en el contexto del problema.

85. ***Meteorología*** Los meteorólogos miden la presión atmosférica en milibares. A partir de estas observaciones elaboran mapas climáticos en los que se muestran las curvas de presión atmosférica constante (isobaras) (ver la figura). En el mapa, cuanto más juntas están las isobaras mayor es la velocidad del viento. Asociar los puntos A, B y C con *a*) la mayor presión, *b*) la menor presión y *c*) la mayor velocidad del viento.

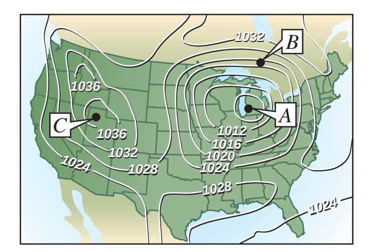


Figura para 85

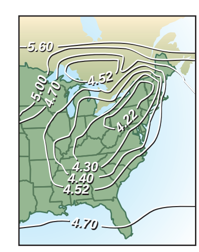
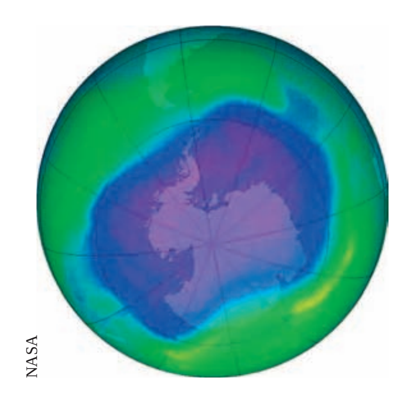


Figura para 86

86. ***Lluvia ácida*** La acidez del agua de lluvia se mide en unidades llamadas pH. Un pH de 7 es neutro, valores menores corresponden a acidez creciente, y valores mayores a alcalinidad creciente. El mapa muestra las curvas de pH constante y da evidencia de que en la dirección en la que sopla el viento de áreas muy industrializadas la acidez ha ido aumentando. Utilizar las curvas de nivel en el mapa, para determinar la dirección de los vientos dominantes en el noreste de Estados Unidos.

87. ***Atmósfera*** El contorno del mapa mostrado en la figura fue generado por computadora usando una colección de datos mediante instrumentación del satélite. El color se usa para mostrar el "agujero de ozono" en la atmósfera de la Tierra. Las áreas púrpura y azul representan los más bajos niveles de ozono y las áreas verdes representan los niveles más altos. *(Fuente: National Aeronautics and Space Administration)*



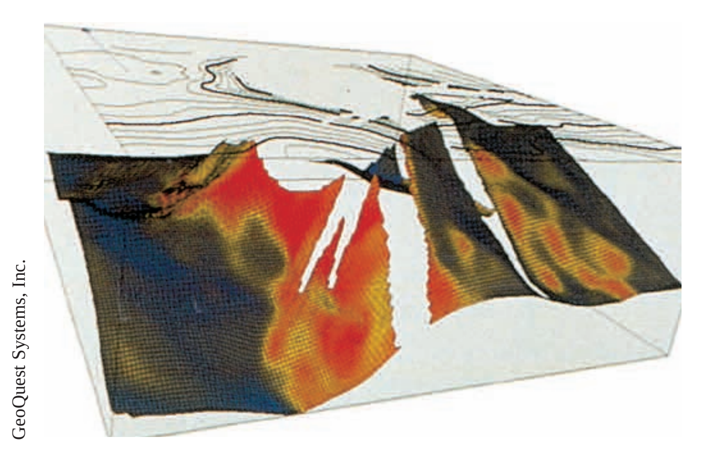
NASA

Figura para 87

a) ¿Corresponden las curvas de nivel a los mismos niveles de ozono espaciados? Explicar.

b) Describir cómo obtener un contorno de mapa más detallado.

88. ***Geología*** El mapa de contorno de la figura representa amplitudes sísmicas en código de color de una falla horizontal y un mapa de contorno proyectado que se usa en los estudios de terremotos. (*Fuente:* Adaptado de Shipman/Wilson/Todd, *An Introduction to Physical Science*, 10a. ed.)



GeoQuest Systems, Inc.

a) Analizar el uso de colores para representar las curvas de nivel.

b) ¿Corresponden las curvas de nivel a amplitudes uniformemente espaciadas? Explicar.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 89 a 92, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.**

89. Si $f(x_0, y_0) = f(x_1, y_1)$, entonces $x_0 = x_1$ y $y_0 = y_1$.

90. Si f es una función, entonces $f(ax, ay) = a^2 f(x, y)$.

91. Una recta vertical puede cortar la gráfica de $z = f(x, y)$ a lo sumo una vez.

92. Dos diferentes curvas de nivel de la gráfica de $z = f(x, y)$ pueden intersecarse.



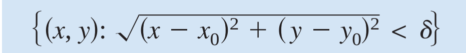
13.2 Límites y continuidad

- **Entender la definición de un entorno en el plano.**
- **Entender y utilizar la definición de límite de una función de dos variables.**
- **Extender el concepto de continuidad a una función de dos variables.**
- **Extender el concepto de continuidad a una función de tres variables.**

Entornos en el plano

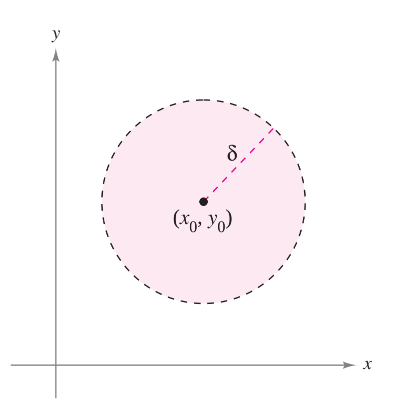
En esta sección se estudiarán límites y continuidad de funciones de dos o tres variables. La sección comienza con funciones de dos variables. Al final de la sección, los conceptos se extienden a funciones de tres variables.

El estudio del límite de una función de dos variables inicia definiendo el análogo bidimensional de un intervalo en la recta real. Utilizando la fórmula para la distancia entre dos puntos (x, y) y (x_0, y_0) en el plano, se puede definir el **entorno δ** de (x_0, y_0) como el **disco** con radio $\delta > 0$ centrado en (x_0, y_0)

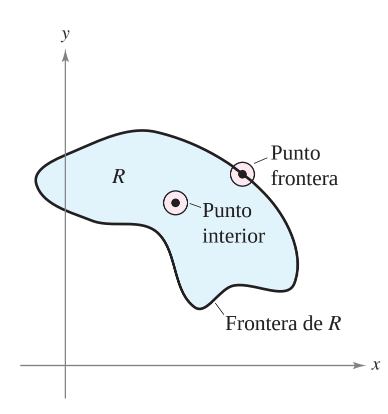


$$\left\{(x, y): \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\right\}$$ Disco abierto.

como se muestra en la figura 13.18. Cuando esta fórmula contiene el signo de desigualdad *menor que*, <, al disco se le llama **abierto**, y cuando contiene el signo de desigualdad *menor o igual que*, ≤, al disco se le llama **cerrado**. Esto corresponde al uso del < y del ≤ al definir intervalos abiertos y cerrados.



Un disco abierto
Figura 13.18



La frontera y los puntos interiores de una región R
Figura 13.19

Un punto (x_0, y_0) en una región R del plano es un **punto interior** de R si existe un entorno δ de (x_0, y_0) que esté contenido completamente en R, como se muestra en la figura 13.19. Si todo punto de R es un punto interior, entonces R es una **región abierta**. Un punto (x_0, y_0) es un **punto frontera** de R si todo disco abierto centrado en (x_0, y_0) contiene puntos dentro de R y puntos fuera de R. Por definición, una región debe contener sus puntos interiores, pero no necesita contener sus puntos frontera. Si una región contiene todos sus puntos frontera, la región es **cerrada**. Una región que contiene algunos pero no todos sus puntos frontera no es ni abierta ni cerrada.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información acerca de Sonya Kovalevsky, ver el artículo "S. Kovalevsky: A Mathematical Lesson" de Karen D. Rappaport en *The American Mathematical Monthly*.



SONYA KOVALEVSKY (1850-1891)

Gran parte de la terminología usada para definir límites y continuidad de una función de dos o tres variables la introdujo el matemático alemán Karl Weierstrass (1815-1897). El enfoque riguroso de Weierstrass a los límites y a otros temas en cálculo le valió la reputación de "padre del análisis moderno". Weierstrass era un maestro excelente. Una de sus alumnas más conocidas fue la matemática rusa Sonya Kovalevsky, quien aplicó muchas de las técnicas de Weierstrass a problemas de la física matemática y se convirtió en una de las primeras mujeres aceptada como investigadora matemática.

Límite de una función de dos variables

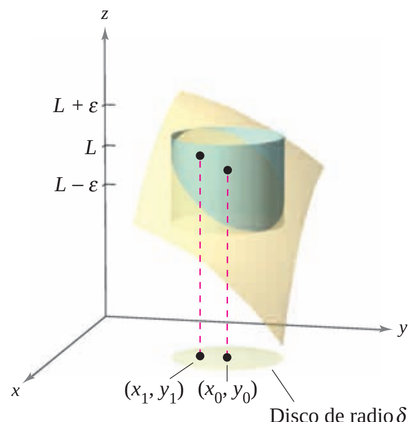
DEFINICIÓN DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

Sea f una función de dos variables definida en un disco abierto centrado en (x_0, y_0), excepto posiblemente en (x_0, y_0), y sea L un número real. Entonces

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y) = L$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta.$$



Para todo (x, y) en el círculo de radio δ, el valor de $f(x, y)$ se encuentra entre $L + \varepsilon$ y $L - \varepsilon$.
Figura 13.20

NOTA Gráficamente, esta definición del límite implica que para todo punto $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ en el disco de radio δ, el valor $f(x, y)$ está entre $L + \varepsilon$ y $L - \varepsilon$, como se muestra en la figura 13.20. ■

La definición del límite de una función en dos variables es similar a la definición del límite de una función en una sola variable, pero existe una diferencia importante. Para determinar si una función en una sola variable tiene límite, sólo se necesita ver que se aproxime al límite por ambas direcciones: por la derecha y por la izquierda. Si la función se aproxima al mismo límite por la derecha y por la izquierda, se puede concluir que el límite existe. Sin embargo, en el caso de una función de dos variables, la expresión

$$(x, y) \to (x_0, y_0)$$

significa que el punto (x, y) puede aproximarse al punto (x_0, y_0) por cualquier dirección. Si el valor de

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y)$$

no es el mismo al aproximarse por cualquier dirección, o trayectoria o **camino** a (x_0, y_0), el límite no existe.

EJEMPLO 1 Verificar un límite a partir de la definición

Mostrar que

$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} x = a.$$

Solución Sea $f(x, y) = x$ y $L = a$. Se necesita mostrar que para cada $\varepsilon > 0$, existe un entorno δ de (a, b) tal que

$$|f(x, y) - L| = |x - a| < \varepsilon$$

siempre que $(x, y) \neq (a, b)$ se encuentre en el entorno. Primero se puede observar que

$$0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta$$

implica que

$$\begin{aligned} |f(x, y) - a| &= |x - a| \\ &= \sqrt{(x - a)^2} \\ &\leq \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} \\ &< \delta. \end{aligned}$$

Así que se puede elegir $\delta = \varepsilon$ y el límite queda verificado.

Los límites de funciones de varias variables tienen las mismas propiedades respecto a la suma, diferencia, producto y cociente que los límites de funciones de una sola variable. (Ver teorema 1.2 en la sección 1.3.) Algunas de estas propiedades se utilizan en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 Cálculo de un límite

Calcular $\displaystyle\lim_{(x,\, y)\to(1,\, 2)} \frac{5x^2y}{x^2 + y^2}$.

Solución Usando las propiedades de los límites de productos y de sumas, se obtiene

$$\begin{aligned}\lim_{(x,\, y)\to(1,\, 2)} 5x^2y &= 5(1^2)(2)\\ &= 10\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\lim_{(x,\, y)\to(1,\, 2)} (x^2 + y^2) &= (1^2 + 2^2)\\ &= 5.\end{aligned}$$

Como el límite de un cociente es igual al cociente de los límites (y el denominador no es 0), se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{(x,\, y)\to(1,\, 2)} \frac{5x^2y}{x^2 + y^2} &= \frac{10}{5}\\ &= 2.\end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Verificar un límite

Calcular $\displaystyle\lim_{(x,\, y)\to(0,\, 0)} \frac{5x^2y}{x^2 + y^2}$.

Solución En este caso, los límites del numerador y del denominador son ambos 0, por tanto no se puede determinar la existencia (o inexistencia) del límite tomando los límites del numerador y del denominador por separado y dividiendo después. Sin embargo, por la gráfica de f (figura 13.21), parece razonable pensar que el límite pueda ser 0. En consecuencia, se puede intentar aplicar la definición de límite a $L = 0$. Primero, hay que observar que

$$|y| \le \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{y} \qquad \frac{x^2}{x^2 + y^2} \le 1.$$

Entonces, en un entorno δ de (0, 0), se tiene $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, lo que, para $(x, y) \neq (0, 0)$ implica

$$\begin{aligned}|f(x, y) - 0| &= \left|\frac{5x^2y}{x^2 + y^2}\right|\\ &= 5|y|\left(\frac{x^2}{x^2 + y^2}\right)\\ &\le 5|y|\\ &\le 5\sqrt{x^2 + y^2}\\ &< 5\delta.\end{aligned}$$

Por tanto, se puede elegir $\delta = \varepsilon/5$ y concluir que

$$\lim_{(x,\, y)\to(0,\, 0)} \frac{5x^2y}{x^2 + y^2} = 0.$$

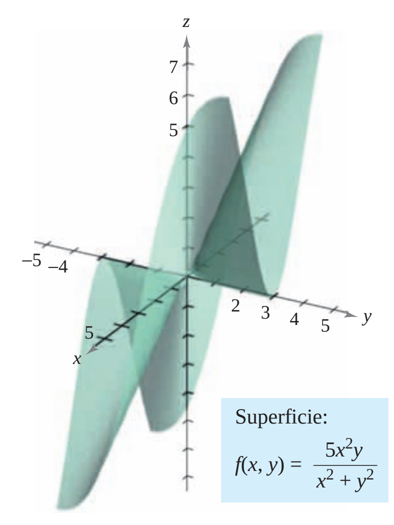
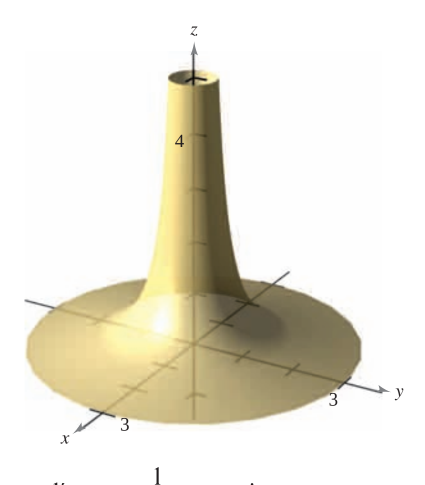


Figura 13.21



$\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{1}{x^2 + y^2}$ no existe

Figura 13.22

Con algunas funciones es fácil reconocer que el límite no existe. Por ejemplo, está claro que el límite

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{1}{x^2 + y^2}$$

no existe porque el valor de $f(x, y)$ crece sin tope cuando (x, y) se aproxima a $(0, 0)$ a lo largo de *cualquier* trayectoria (ver la figura 13.22).

Con otras funciones no es tan fácil reconocer que un límite no existe. Así, el siguiente ejemplo describe un caso en el que el límite no existe ya que la función se aproxima a valores diferentes a lo largo de trayectorias diferentes.

EJEMPLO 4 Un límite que no existe

Mostrar que el siguiente límite no existe.

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)^2$$

Solución El dominio de la función

$$f(x, y) = \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)^2$$

consta de todos los puntos en el plano *xy* con excepción del punto (0, 0). Para mostrar que el límite no existe cuando (x, y) se aproxima a (0, 0), considérense aproximaciones a (0, 0) a lo largo de dos "trayectorias" diferentes, como se muestra en la figura 13.23. A lo largo del eje x, todo punto es de la forma $(x, 0)$ y el límite a lo largo de esta trayectoria es

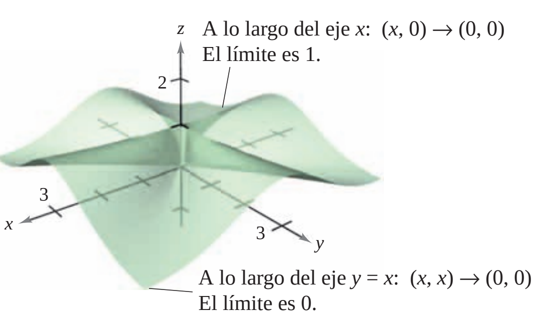
$$\lim_{(x, 0)\to(0, 0)} \left(\frac{x^2 - 0^2}{x^2 + 0^2}\right)^2 = \lim_{(x, 0)\to(0, 0)} 1^2 = 1. \qquad \text{Límite a lo largo del eje } x.$$

Sin embargo, si (x, y) se aproxima a (0, 0) a lo largo de la recta $y = x$, se obtiene

$$\lim_{(x, x)\to(0, 0)} \left(\frac{x^2 - x^2}{x^2 + x^2}\right)^2 = \lim_{(x, x)\to(0, 0)} \left(\frac{0}{2x^2}\right)^2 = 0. \qquad \text{Límite a lo largo de la recta } y = x.$$

Esto significa que en cualquier disco abierto centrado en (0, 0) existen puntos (x, y) en los que f toma el valor 1 y otros puntos en los que f asume el valor 0. Por ejemplo, $f(x, y) = 1$ en los puntos (1, 0), (0.1, 0), (0.01, 0), y (0.001, 0) y $f(x, y) = 0$ en los puntos (1, 1), (0.1, 0.1), (0.01, 0.01) y (0.001, 0.001). Por tanto, f no tiene límite cuando $(x, y) \to (0, 0)$.

NOTA En el ejemplo 4 se puede concluir que el límite no existe ya que se encuentran dos trayectorias que dan límites diferentes. Sin embargo, si dos trayectorias hubieran dado el mismo límite, no se podría concluir que el límite existe. Para llegar a tal conclusión, se debe mostrar que el límite es el mismo para *todas* las aproximaciones posibles. ■



$\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)^2$ no existe

Figura 13.23

Continuidad de una función de dos variables

En el ejemplo 2 hay que observar que el límite de $f(x, y) = 5x^2y/(x^2 + y^2)$ cuando $(x, y) \to (1, 2)$ puede calcularse por sustitución directa. Es decir, el límite es $f(1, 2) = 2$. En tales casos se dice que la función f es **continua** en el punto $(1, 2)$.

NOTA Esta definición de continuidad puede extenderse a *puntos frontera* de la región abierta R considerando un tipo especial de límite en el que sólo se permite a (x, y) tender hacia (x_0, y_0) a lo largo de trayectorias que están en la región R. Esta noción es similar a la de límites unilaterales, tratada en el capítulo 1. ■

DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

Una función f de dos variables es **continua en un punto** (x_0, y_0) de una región abierta R si $f(x_0, y_0)$ es igual al límite de $f(x, y)$ cuando $(x, y) \to (x_0, y_0)$. Es decir,

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

La función f es **continua en la región abierta R** si es continua en todo punto de R.

En el ejemplo 3 se mostró que la función

$$f(x, y) = \frac{5x^2y}{x^2 + y^2}$$

no es continua en $(0, 0)$. Sin embargo, como el límite en este punto existe, se puede eliminar la discontinuidad definiendo el valor de f en $(0, 0)$ igual a su límite. Tales discontinuidades se llaman **removibles** o **evitables**. En el ejemplo 4 se mostró que la función

$$f(x, y) = \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)^2$$

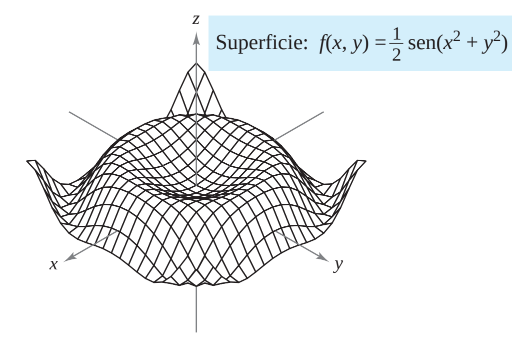
tampoco es continua en $(0, 0)$, pero esta discontinuidad es **inevitable** o **no removible**.

TEOREMA 13.1 FUNCIONES CONTINUAS DE DOS VARIABLES

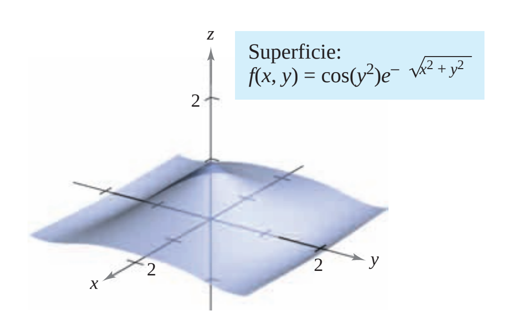
Si k es un número real y f y g son funciones continuas en (x_0, y_0), entonces las funciones siguientes son continuas en (x_0, y_0).

1. Múltiplo escalar: kf
2. Suma y diferencia: $f \pm g$
3. Producto: fg
4. Cociente: f/g, si $g(x_0, y_0) \neq 0$

El teorema 13.1 establece la continuidad de las funciones *polinomiales* y *racionales* en todo punto de su dominio. La continuidad de otros tipos de funciones puede extenderse de manera natural de una a dos variables. Por ejemplo, las funciones cuyas gráficas se muestran en las figuras 13.24 y 13.25 son continuas en todo punto del plano.



La función f es continua en todo punto del plano
Figura 13.24



La función f es continua en todo punto en el plano
Figura 13.25

EXPLORACIÓN

Sostener una cuchara a un palmo de distancia y mirar la propia imagen en la cuchara. La imagen estará invertida. Ahora, mover la cuchara más y más cerca a uno de los ojos. En algún punto, la imagen dejará de estar invertida. ¿Podría ser que la imagen ha sido deformada continuamente? Hablar sobre esta cuestión y sobre el significado general de continuidad con otros miembros de la clase. (Esta exploración la sugirió Irvin Roy Hentzel, Iowa State University.)

El siguiente teorema establece las condiciones bajo las cuales una función compuesta es continua.

TEOREMA 13.2 CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA

Si h es continua en (x_0, y_0) y g es continua en $h(x_0, y_0)$, entonces la función compuesta $(g \circ h)(x, y) = g(h(x, y))$ es continua en (x_0, y_0). Es decir,

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} g(h(x, y)) = g(h(x_0, y_0)).$$

NOTA En el teorema 13.2 hay que observar que h es una función de dos variables mientras que g es una función de una variable. ■

EJEMPLO 5 Análisis de la continuidad

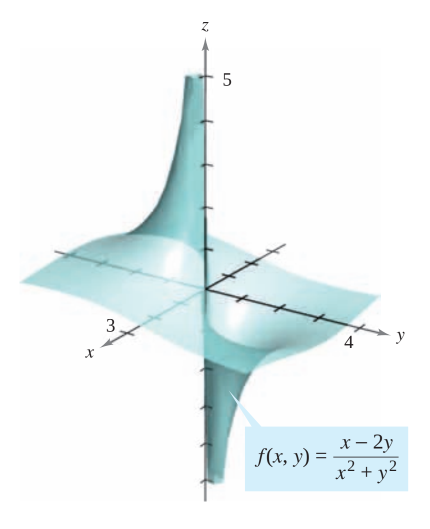
Analizar la continuidad de cada función.

a) $f(x, y) = \dfrac{x - 2y}{x^2 + y^2}$ ***b***) $g(x, y) = \dfrac{2}{y - x^2}$

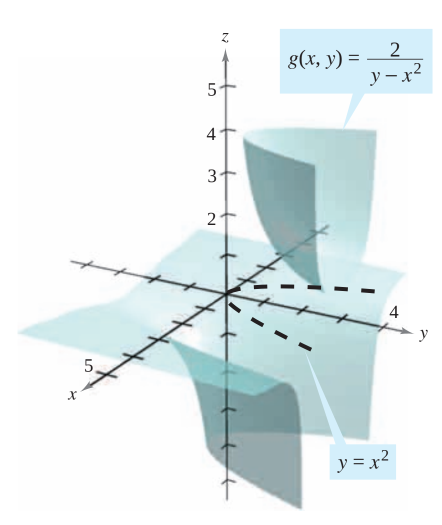
Solución

a) Como una función racional es continua en todo punto de su dominio, se puede concluir que f es continua en todo punto del plano xy excepto en (0, 0), como se muestra en la figura 13.26.

b) La función dada por $g(x, y) = 2/(y - x^2)$ es continua excepto en los puntos en los cuales el denominador es 0, $y - x^2 = 0$. Por tanto, se puede concluir que la función es continua en todos los puntos excepto en los puntos en que se encuentra la parábola $y = x^2$. En el interior de esta parábola se tiene $y > x^2$, y la superficie representada por la función se encuentra sobre el plano xy, como se muestra en la figura 13.27. En el exterior de la parábola, $y < x^2$, y la superficie se encuentra debajo del plano xy.



La función f no es continua en (0, 0)
Figura 13.26



La función g no es continua en la parábola $y = x^2$
Figura 13.27

Continuidad de una función de tres variables

Las definiciones anteriores de límites y continuidad pueden extenderse a funciones de tres variables considerando los puntos (x, y, z) dentro de la *esfera abierta*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < \delta^2. \qquad \text{Esfera abierta.}$$

El radio de esta esfera es δ, y la esfera está centrada en (x_0, y_0, z_0), como se muestra en la figura 13.28. Un punto (x_0, y_0, z_0) en una región R en el espacio es un **punto interior** de R si existe una δ-esfera centrada en (x_0, y_0, z_0) que está contenida completamente en R. Si todo punto de R es un punto interior, entonces se dice que R es una región **abierta**.

Esfera abierta en el espacio
Figura 13.28

DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN DE TRES VARIABLES

Una función f de tres variables es **continua en un punto** $(\mathbf{x_0, y_0, z_0})$ de una región abierta R si $f(x_0, y_0, z_0)$ está definido y es igual al límite de $f(x, y, z)$ cuando (x, y, z) se aproxima a (x_0, y_0, z_0). Es decir,

$$\lim_{(x, y, z)\to(x_0, y_0, z_0)} f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0).$$

La función f es **continua en una región abierta R** si es continua en todo punto de R.

EJEMPLO 6 Continuidad de una función de tres variables

La función

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 - z}$$

es continua en todo punto en el espacio excepto en los puntos sobre el paraboloide dado por $z = x^2 + y^2$.

13.2 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, utilizar la definición de límite de una función de dos variables para verificar el límite.

1. $\lim_{(x, y)\to(1, 0)} x = 1$

2. $\lim_{(x, y)\to(4, -1)} x = 4$

3. $\lim_{(x, y)\to(1, -3)} y = -3$

4. $\lim_{(x, y)\to(a, b)} y = b$

En los ejercicios 5 a 8, hallar el límite indicado utilizando los límites

$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) = 4 \quad \text{y} \quad \lim_{(x, y)\to(a, b)} g(x, y) = 3.$$

5. $\lim_{(x, y)\to(a, b)} [f(x, y) - g(x, y)]$

6. $\lim_{(x, y)\to(a, b)} \left[\frac{5f(x, y)}{g(x, y)}\right]$

7. $\lim_{(x, y)\to(a, b)} [f(x, y)g(x, y)]$

8. $\lim_{(x, y)\to(a, b)} \left[\frac{f(x, y) + g(x, y)}{f(x, y)}\right]$

En los ejercicios 9 a 22, calcular el límite y analizar la continuidad de la función.

9. $\lim_{(x, y)\to(2, 1)} (2x^2 + y)$

10. $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} (x + 4y + 1)$

11. $\lim_{(x, y)\to(1, 2)} e^{xy}$

12. $\lim_{(x, y)\to(2, 4)} \frac{x + y}{x^2 + 1}$

13. $\lim_{(x, y)\to(0, 2)} \frac{x}{y}$

14. $\lim_{(x, y)\to(-1, 2)} \frac{x + y}{x - y}$

15. $\lim_{(x, y)\to(1, 1)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

16. $\lim_{(x, y)\to(1, 1)} \frac{x}{\sqrt{x + y}}$

17. $\lim_{(x, y)\to(\pi/4, 2)} y \cos xy$

18. $\lim_{(x, y)\to(2\pi, 4)} \operatorname{sen} \frac{x}{y}$

19. $\lim_{(x, y)\to(0, 1)} \frac{\operatorname{arcsen} xy}{1 - xy}$

20. $\lim_{(x, y)\to(0, 1)} \frac{\arccos (x/y)}{1 + xy}$

21. $\lim_{(x, y, z)\to(1, 3, 4)} \sqrt{x + y + z}$

22. $\lim_{(x, y, z)\to(-2, 1, 0)} xe^{yz}$

En los ejercicios 23 a 36, hallar el límite (si existe). Si el límite no existe, explicar por qué.

23. $\lim_{(x, y)\to(1, 1)} \frac{xy - 1}{1 + xy}$

24. $\lim_{(x, y)\to(1, -1)} \frac{x^2y}{1 + xy^2}$

25. $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{1}{x + y}$

26. $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{1}{x^2y^2}$

27. $\lim_{(x, y)\to(2, 2)} \frac{x^2 - y^2}{x - y}$

28. $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x^4 - 4y^4}{x^2 + 2y^2}$

29. $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

30. $\lim_{(x, y)\to(2, 1)} \frac{x - y - 1}{\sqrt{x - y} - 1}$

31. $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x + y}{x^2 + y}$

32. $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x}{x^2 - y^2}$

33. $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x^2}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)}$

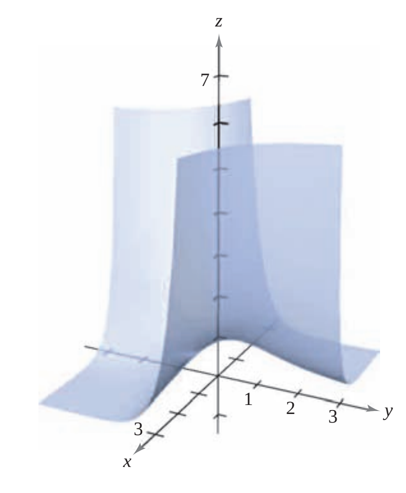
34. $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \ln(x^2 + y^2)$

35. $\lim_{(x, y, z)\to(0, 0, 0)} \frac{xy + yz + xz}{x^2 + y^2 + z^2}$

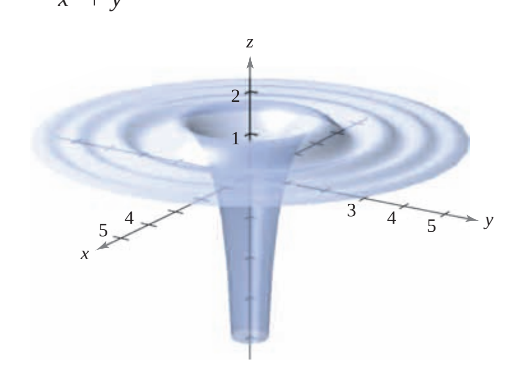
36. $\lim_{(x, y, z)\to(0, 0, 0)} \frac{xy + yz^2 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^2}$

En los ejercicios 37 y 38, analizar la continuidad de la función y evaluar el límite de $f(x, y)$ (si existe) cuando $(x, y) \to (0, 0)$.

37. $f(x, y) = e^{xy}$

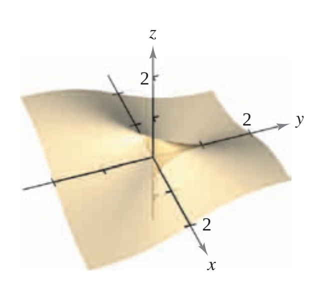


38. $f(x, y) = 1 - \frac{\cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$



En los ejercicios 39 a 42, utilizar una herramienta de graficación para elaborar una tabla que muestre los valores de $f(x, y)$ en los puntos que se especifican. Utilizar el resultado para formular una conjetura sobre el límite de $f(x, y)$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$. Determinar analíticamente si el límite existe y discutir la continuidad de la función.

39. $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$



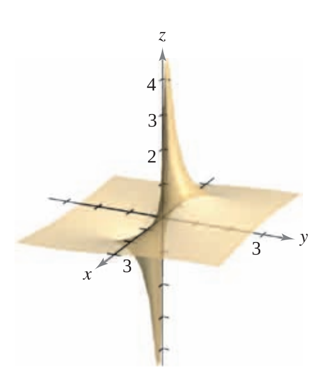
Trayectoria: $y = 0$

Puntos: (1, 0), (0.5, 0), (0.1, 0), (0.01, 0), (0.001, 0)

Trayectoria: $y = x$

Puntos: (1, 1), (0.5, 0.5), (0.1, 0.1), (0.01, 0.01), (0.001, 0.001)

40. $f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$



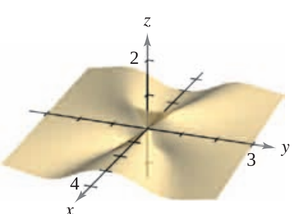
Trayectoria: $y = 0$

Puntos: (1, 0), (0.5, 0), (0.1, 0), (0.01, 0), (0.001, 0)

Trayectoria: $y = x$

Puntos: (1, 1), (0.5, 0.5), (0.1, 0.1), (0.01, 0.01), (0.001, 0.001)

41. $f(x, y) = -\frac{xy^2}{x^2 + y^4}$



Trayectoria: $x = y^2$

Puntos: (1, 1), (0.25, 0.5), (0.01, 0.1), (0.0001, 0.01), (0.000001, 0.001)

Trayectoria: $x = -y^2$

Puntos: (−1, 1), (−0.25, 0.5), (−0.01, 0.1), (−0.0001, 0.01), (−0.000001, 0.001)

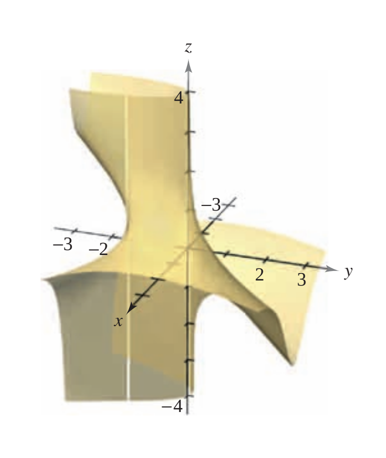
42. $f(x, y) = \dfrac{2x - y^2}{2x^2 + y}$

Trayectoria: $y = 0$

Puntos: $(1, 0)$,
$(0.25, 0)$, $(0.01, 0)$,
$(0.001, 0)$,
$(0.000001, 0)$

Trayectoria: $y = x$

Puntos: $(1, 1)$,
$(0.25, 0.25)$, $(0.01, 0.01)$,
$(0.001, 0.001)$,
$(0.0001, 0.0001)$



En los ejercicios 43 a 46, analizar la continuidad de las funciones f y g. Explicar cualquier diferencia.

43. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

44. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{4x^4 - y^4}{2x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ -1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{4x^4 - y^4}{2x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

45. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{4x^2y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{4x^2y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

46. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2xy^2 + y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2xy^2 + y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

CAS **En los ejercicios 47 a 52, utilizar un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente la función y hallar $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y)$ (si existe).**

47. $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$

48. $f(x, y) = \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} + \cos\dfrac{1}{x}$

49. $f(x, y) = \dfrac{x^2y}{x^4 + 2y^2}$

50. $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2y}$

51. $f(x, y) = \dfrac{5xy}{x^2 + 2y^2}$

52. $f(x, y) = \dfrac{6xy}{x^2 + y^2 + 1}$

En los ejercicios 53 a 58, utilizar las coordenadas polares para hallar el límite. [*Sugerencia:* Tomar $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$, y observar que $(x, y)\to(0, 0)$ implica $r\to 0$.]

53. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$

54. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

55. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2}$

56. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

57. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \cos(x^2 + y^2)$

58. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \operatorname{sen}\sqrt{x^2 + y^2}$

En los ejercicios 59 a 62, usar las coordenadas polares y la regla de L'Hôpital para encontrar el límite.

59. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

60. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

61. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

62. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} (x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2)$

En los ejercicios 63 a 68, analizar la continuidad de la función.

63. $f(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

64. $f(x, y, z) = \dfrac{z}{x^2 + y^2 - 4}$

65. $f(x, y, z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{e^x + e^y}$

66. $f(x, y, z) = xy \operatorname{sen} z$

67. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} xy}{xy}, & xy \neq 0 \\ 1, & xy = 0 \end{cases}$

68. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2 - y^2)}{x^2 - y^2}, & x^2 \neq y^2 \\ 1, & x^2 = y^2 \end{cases}$

En los ejercicios 69 a 72, analizar la continuidad de la función compuesta $f \circ g$.

69. $f(t) = t^2$

$g(x, y) = 2x - 3y$

70. $f(t) = \dfrac{1}{t}$

$g(x, y) = x^2 + y^2$

71. $f(t) = \dfrac{1}{t}$

$g(x, y) = 2x - 3y$

72. $f(t) = \dfrac{1}{1 - t}$

$g(x, y) = x^2 + y^2$

En los ejercicios 73 a 78, hallar cada límite.

a) $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$

b) $\displaystyle\lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$

73. $f(x, y) = x^2 - 4y$

74. $f(x, y) = x^2 + y^2$

75. $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$

76. $f(x, y) = \dfrac{1}{x + y}$

77. $f(x, y) = 3x + xy - 2y$

78. $f(x, y) = \sqrt{y}\,(y + 1)$

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 79 a 82, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.**

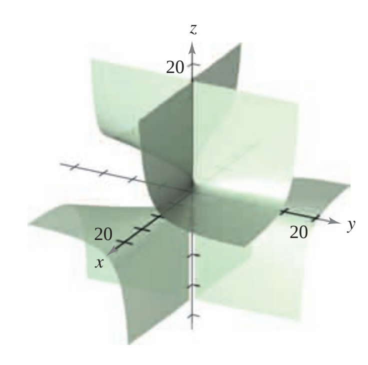
79. Si $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y) = 0$, entonces $\lim_{x\to 0} f(x, 0) = 0$.

80. Si $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(0, y) = 0$, entonces $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y) = 0$.

81. Si f es continua para todo x y para todo y distintos de cero, y $f(0, 0) = 0$, entonces $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y) = 0$.

82. Si g y h son funciones continuas de x y y, y $f(x, y) = g(x) + h(y)$, entonces f es continua.

83. Considerar $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$ (ver la figura).

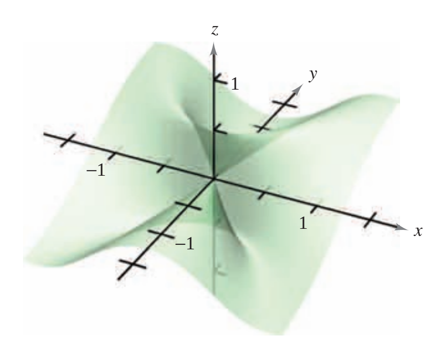


a) Determinar el límite (si es posible) a lo largo de toda recta de la forma $y = ax$.

b) Determinar el límite (si es posible) a lo largo de la parábola $y = x^2$.

c) ¿Existe el límite? Explicar la respuesta.

84. Considerar $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ (ver la figura).



a) Determinar el límite (si es posible) a lo largo de toda recta de la forma $y = ax$.

b) Determinar el límite (si es posible) a lo largo de la parábola $y = x^2$.

c) ¿Existe el límite? Explicar la respuesta.

En los ejercicios 85 y 86, utilizar las coordenadas esféricas para encontrar el límite. [*Sugerencia:* Tomar $x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta$, $y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$ y $z = \rho \cos \phi$, y observar que $(x, y, z) \to (0, 0, 0)$ es equivalente a $\rho \to 0^+$.]

85. $\lim_{(x, y, z)\to(0, 0, 0)} \dfrac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$

86. $\lim_{(x, y, z)\to(0, 0, 0)} \tan^{-1}\left[\dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\right]$

87. Hallar el límite siguiente.

$$\lim_{(x, y)\to(0, 1)} \tan^{-1}\left[\frac{x^2 + 1}{x^2 + (y - 1)^2}\right]$$

88. Dada la función

$$f(x, y) = xy\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)$$

definir $f(0, 0)$ de manera que f sea continua en el origen.

89. Demostrar que

$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} [f(x, y) + g(x, y)] = L_1 + L_2$$

donde $f(x, y)$ tiende a L_1 y $g(x, y)$ se aproxima a L_2 cuando $(x, y) \to (a, b)$.

90. Demostrar que si f es continua y $f(a, b) < 0$, existe un δ-entorno de (a, b) tal que $f(x, y) < 0$ para todo punto (x, y) en la vecindad o el entorno.

Desarrollo de conceptos

91. Definir el límite de una función de dos variables. Describir un método para probar que

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y)$$

no existe.

92. Dar la definición de continuidad de una función de dos variables.

93. Determinar si cada una de las siguientes declaraciones es verdadera o falsa. Explicar el razonamiento.

a) Si $\lim_{(x, y)\to(2, 3)} f(x, y) = 4$, entonces $\lim_{x\to 2} f(x, 3) = 4$.

b) Si $\lim_{x\to 2} f(x, 3) = 4$, entonces $\lim_{(x, y)\to(2, 3)} f(x, y) = 4$.

c) Si $\lim_{x\to 2} f(x, 3) = \lim_{y\to 3} f(2, y) = 4$, entonces $\lim_{(x, y)\to(2, 3)} f(x, y) = 4$.

d) Si $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y) = 0$, entonces para cualquier número real k, $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(kx, y) = 0$.

Para discusión

94. *a*) Si $f(2, 3) = 4$, ¿se puede concluir algo acerca de $\lim_{(x, y)\to(2, 3)} f(x, y)$? Dar razones que justifiquen la respuesta.

b) Si $\lim_{(x, y)\to(2, 3)} f(x, y) = 4$, ¿se puede concluir algo acerca de $f(2, 3)$? Dar razones que justifiquen la respuesta.

13.3 Derivadas parciales

- **Hallar y utilizar las derivadas parciales de una función de dos variables.**
- **Hallar y utilizar las derivadas parciales de una función de tres o más variables.**
- **Hallar derivadas parciales de orden superior de una función de dos o tres variables.**

Derivadas parciales de una función de dos variables



Mary Evans Picture Library

JEAN LE ROND D'ALEMBERT (1717-1783)

La introducción de las derivadas parciales ocurrió años después del trabajo sobre el cálculo de Newton y Leibniz. Entre 1730 y 1760, Leonhard Euler y Jean Le Rond d'Alembert publicaron por separado varios artículos sobre dinámica en los cuales establecieron gran parte de la teoría de las derivadas parciales. Estos artículos utilizaban funciones de dos o más variables para estudiar problemas de equilibrio, movimiento de fluidos y cuerdas vibrantes.

En aplicaciones de funciones de varias variables suele surgir la pregunta: ¿"Cómo afectaría al valor de una función un cambio en una de sus variables independientes"? Se puede contestar esta pregunta considerando cada una de las variables independientes por separado. Por ejemplo, para determinar el efecto de un catalizador en un experimento, un químico podría repetir el experimento varias veces usando cantidades distintas de catalizador, mientras mantiene constantes las otras variables como temperatura y presión. Para determinar la velocidad o la razón de cambio de una función f respecto a una de sus variables independientes se puede utilizar un procedimiento similar. A este proceso se le llama **derivación parcial** y el resultado se llama **derivada parcial** de f con respecto a la variable independiente elegida.

DEFINICIÓN DE LAS DERIVADAS PARCIALES DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

Si $z = f(x, y)$, las **primeras derivadas parciales** de f con respecto a x y y son las funciones f_x y f_y definidas por

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

siempre y cuando el límite exista.

Esta definición indica que si $z = f(x, y)$, entonces para hallar f_x *se considera y constante* y se deriva con respecto a x. De manera similar, para calcular f_y, *se considera x constante* y se deriva con respecto a y.

EJEMPLO 1 Hallar las derivadas parciales

Hallar las derivadas parciales f_x y f_y de la función

$$f(x, y) = 3x - x^2y^2 + 2x^3y.$$

Solución Si se considera y como constante y se deriva con respecto a x se obtiene

$$f(x, y) = 3x - x^2y^2 + 2x^3y \qquad \text{Escribir la función original.}$$

$$f_x(x, y) = 3 - 2xy^2 + 6x^2y. \qquad \text{Derivada parcial con respecto a } x.$$

Si se considera x constante y se deriva con respecto a y obtenemos

$$f(x, y) = 3x - x^2y^2 + 2x^3y \qquad \text{Escribir la función original.}$$

$$f_y(x, y) = -2x^2y + 2x^3. \qquad \text{Derivada parcial con respecto a } y.$$

NOTACIÓN PARA LAS PRIMERAS DERIVADAS PARCIALES

Si $z = f(x, y)$, las derivadas parciales f_x y f_y se denotan por

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = f_x(x, y) = z_x = \frac{\partial z}{\partial x}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = f_y(x, y) = z_y = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Las primeras derivadas parciales evaluadas en el punto (a, b) se denotan por

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a,\, b)} = f_x(a, b) \qquad \text{y} \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(a,\, b)} = f_y(a, b).$$

EJEMPLO 2 Hallar y evaluar las derivadas parciales

Dada $f(x, y) = xe^{x^2y}$, hallar f_x y f_y, y evaluar cada una en el punto $(1, \ln 2)$.

Solución Como

$$f_x(x, y) = xe^{x^2y}(2xy) + e^{x^2y}$$ Derivada parcial con respecto a x.

la derivada parcial de f con respecto a x en $(1, \ln 2)$ es

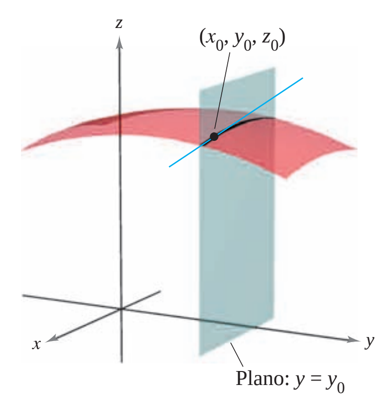
$$f_x(1, \ln 2) = e^{\ln 2}(2 \ln 2) + e^{\ln 2}$$
$$= 4 \ln 2 + 2.$$

Como

$$f_y(x, y) = xe^{x^2y}(x^2)$$
$$= x^3e^{x^2y}$$ Derivada parcial con respecto a y.

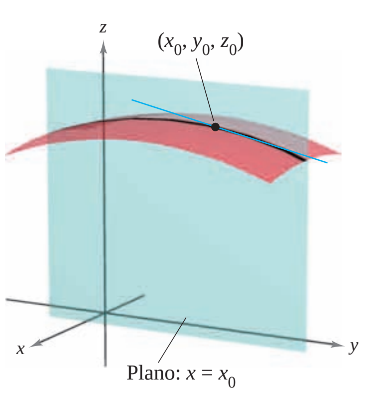
la derivada parcial de f con respecto a y en $(1, \ln 2)$ es

$$f_y(1, \ln 2) = e^{\ln 2}$$
$$= 2.$$



$\frac{\partial f}{\partial x}$ = pendiente en la dirección x

Figura 13.29



$\frac{\partial f}{\partial y}$ = pendiente en la dirección y

Figura 13.30

Las derivadas parciales de una función de dos variables, $z = f(x, y)$, tienen una interpretación geométrica útil. Si $y = y_0$, entonces $z = f(x, y_0)$ representan la curva intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $y = y_0$, como se muestra en la figura 13.29. Por consiguiente,

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

representa la pendiente de esta curva en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Nótese que tanto la curva como la recta tangente se encuentran en el plano $y = y_0$. Análogamente,

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

representa la pendiente de la curva dada por la intersección de $z = f(x, y)$ y el plano $x = x_0$ en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, como se muestra en la figura 13.30.

Informalmente, los valores $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ en (x_0, y_0, z_0) denotan las **pendientes de la superficie en las direcciones de x y y**, respectivamente.

EJEMPLO 3 Hallar las pendientes de una superficie en las direcciones de *x* y de *y*

Hallar las pendientes en las direcciones de x y de y de la superficie dada por

$$f(x, y) = -\frac{x^2}{2} - y^2 + \frac{25}{8}$$

en el punto $\left(\frac{1}{2}, 1, 2\right)$.

Solución Las derivadas parciales de f con respecto a x y a y son

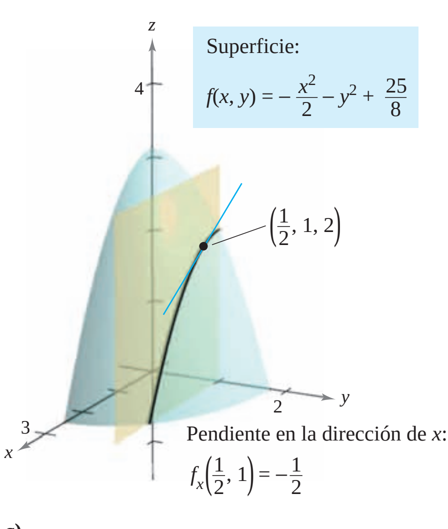
$$f_x(x, y) = -x \qquad \text{y} \qquad f_y(x, y) = -2y.$$ Derivadas parciales.

Por tanto, en la dirección de x, la pendiente es

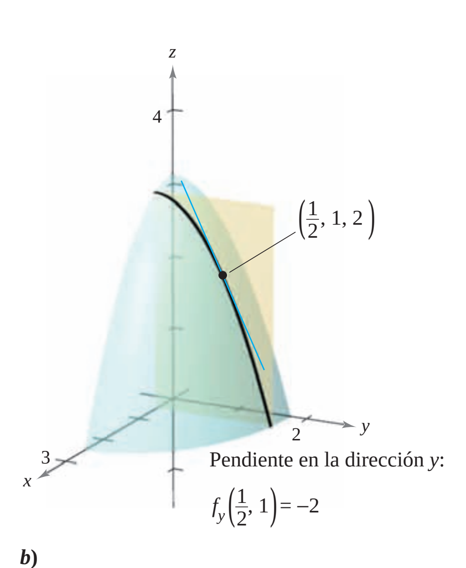
$$f_x\left(\frac{1}{2}, 1\right) = -\frac{1}{2}$$ Figura 13.31*a*.

y en la dirección de y, la pendiente es

$$f_y\left(\frac{1}{2}, 1\right) = -2.$$ Figura 13.31*b*.



a)



b)

Figura 13.31

EJEMPLO 4 Hallar las pendientes de una superficie en las direcciones de *x* y de *y*

Hallar las pendientes de la superficie dada por

$$f(x, y) = 1 - (x - 1)^2 - (y - 2)^2$$

en el punto (1, 2, 1), en las direcciones de x y de y.

Solución Las derivadas parciales de f con respecto a x y y son

$$f_x(x, y) = -2(x - 1) \qquad \text{y} \qquad f_y(x, y) = -2(y - 2).$$ Derivadas parciales.

Por tanto, en el punto (1, 2, 1), las pendientes en las direcciones de x y de y son

$$f_x(1, 2) = -2(1 - 1) = 0 \qquad \text{y} \qquad f_y(1, 2) = -2(2 - 2) = 0$$

como se muestra en la figura 13.32.

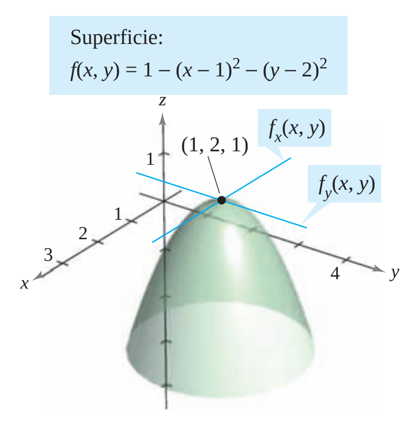


Figura 13.32

Sin importar cuántas variables haya, las derivadas parciales se pueden interpretar como *tasas*, *velocidades* o *razones de cambio*.

EJEMPLO 5 Derivadas parciales como velocidades o razones de cambio

El área de un paralelogramo con lados adyacentes a y b entre los que se forma un ángulo θ está dada por $A = ab \operatorname{sen} \theta$, como se muestra en la figura 13.33.

El área del paralelogramo es $ab \operatorname{sen} \theta$
Figura 13.33

a) Hallar la tasa o la razón de cambio de A respecto de a si $a = 10$, $b = 20$ y $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

b) Calcular la tasa o la razón de cambio de A respecto de θ si $a = 10$, $b = 20$ y $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

Solución

a) Para hallar la tasa o la razón de cambio del área respecto de a, se mantienen b y θ constantes y se deriva respecto de a para obtener

$$\frac{\partial A}{\partial a} = b \operatorname{sen} \theta \qquad \text{Derivada parcial respecto a } a.$$

$$\frac{\partial A}{\partial a} = 20 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = 10. \qquad \text{Sustituir a } b \text{ y } \theta.$$

b) Para hallar la tasa o la razón de cambio del área respecto de θ, se mantiene a y b constantes y se deriva respecto de θ para obtener

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = ab \cos \theta \qquad \text{Derivada parcial respecto de } \theta.$$

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = 200 \cos \frac{\pi}{6} = 100\sqrt{3}. \qquad \text{Sustituir } a, b \text{ y } \theta.$$

Derivadas parciales de una función de tres o más variables

El concepto de derivada parcial puede extenderse de manera natural a funciones de tres o más variables. Por ejemplo, si $w = f(x, y, z)$, existen tres derivadas parciales cada una de las cuales se forma manteniendo constantes las otras dos variables. Es decir, para definir la derivada parcial de w con respecto a x, se consideran y y z constantes y se deriva con respecto a x. Para hallar las derivadas parciales de w con respecto a y y con respecto a z se emplea un proceso similar.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = f_y(x, y, z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = f_z(x, y, z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$

En general, si $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, hay n derivadas parciales denotadas por

$$\frac{\partial w}{\partial x_k} = f_{x_k}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Para hallar la derivada parcial con respecto a una de las variables, se mantienen constantes las otras variables y se deriva con respecto a la variable dada.

EJEMPLO 6 Hallar las derivadas parciales

a) Para hallar la derivada parcial de $f(x, y, z) = xy + yz^2 + xz$ con respecto a z, se consideran x y y constantes y se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial z}[xy + yz^2 + xz] = 2yz + x.$$

b) Para hallar la derivada parcial de $f(x, y, z) = z \operatorname{sen}(xy^2 + 2z)$ con respecto a z, se consideran x y y constantes. Entonces, usando la regla del producto, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}[z \operatorname{sen}(xy^2 + 2z)] &= (z)\frac{\partial}{\partial z}[\operatorname{sen}(xy^2 + 2z)] + \operatorname{sen}(xy^2 + 2z)\frac{\partial}{\partial z}[z]\\ &= (z)[\cos(xy^2 + 2z)](2) + \operatorname{sen}(xy^2 + 2z)\\ &= 2z\cos(xy^2 + 2z) + \operatorname{sen}(xy^2 + 2z).\end{aligned}$$

c) Para calcular la derivada parcial de $f(x, y, z, w) = (x + y + z)/w$ con respecto a w, se consideran x, y y z constantes y se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial w}\left[\frac{x + y + z}{w}\right] = -\frac{x + y + z}{w^2}.$$

Derivadas parciales de orden superior

Como sucede con las derivadas ordinarias, es posible hallar las segundas, terceras, etc., derivadas parciales de una función de varias variables, siempre que tales derivadas existan. Las derivadas de orden superior se denotan por el orden al que se hace la derivación. Por ejemplo, la función $z = f(x, y)$ tiene las siguientes derivadas parciales de segundo orden.

1. Derivar dos veces con respecto a x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}.$$

2. Derivar dos veces con respecto a y:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}.$$

3. Derivar primero con respecto a x y luego con respecto a y:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}.$$

4. Derivar primero con respecto a y y luego con respecto a x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}.$$

Los casos tercero y cuarto se llaman **derivadas parciales mixtas (cruzadas)**.

NOTA Observar que los dos tipos de notación para las derivadas parciales mixtas tienen convenciones diferentes para indicar el orden de derivación.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$ Orden de derecha a izquierda.

$$(f_x)_y = f_{xy}$$ Orden de izquierda a derecha.

Se puede recordar el orden de ambas notaciones observando que primero se deriva con respecto a la variable más "cercana" a f.

EJEMPLO 7 Hallar derivadas parciales de segundo orden

Hallar las derivadas parciales de segundo orden de $f(x, y) = 3xy^2 - 2y + 5x^2y^2$, y determinar el valor de $f_{xy}(-1, 2)$.

Solución Empezar por hallar las derivadas parciales de primer orden con respecto a x y y.

$$f_x(x, y) = 3y^2 + 10xy^2 \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = 6xy - 2 + 10x^2y$$

Después, se deriva cada una de éstas con respecto a x y con respecto a y.

$$f_{xx}(x, y) = 10y^2 \quad \text{y} \quad f_{yy}(x, y) = 6x + 10x^2$$

$$f_{xy}(x, y) = 6y + 20xy \quad \text{y} \quad f_{yx}(x, y) = 6y + 20xy$$

En $(-1, 2)$, el valor de f_{xy} es $f_{xy}(-1, 2) = 12 - 40 = -28$.

NOTA En el ejemplo 7 las dos derivadas parciales mixtas son iguales. En el teorema 13.3 se dan condiciones suficientes para que esto ocurra. ■

TEOREMA 13.3 IGUALDAD DE LAS DERIVADAS PARCIALES MIXTAS

Si f es una función de x y y tal que f_{xy} y f_{yx} son continuas en un disco abierto R, entonces, para todo (x, y) en R,

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y).$$

El teorema 13.3 también se aplica a una función f de *tres o más variables* siempre y cuando las derivadas parciales de segundo orden sean continuas. Por ejemplo, si $w = f(x, y, z)$ y todas sus derivadas parciales de segundo orden son continuas en una región abierta R, entonces en todo punto en R el orden de derivación para obtener las derivadas parciales mixtas de segundo orden es irrelevante. Si las derivadas parciales de tercer orden de f también son continuas, el orden de derivación para obtener las derivadas parciales mixtas de tercer orden es irrelevante.

EJEMPLO 8 Hallar derivadas parciales de orden superior

Mostrar que $f_{xz} = f_{zx}$ y $f_{xzz} = f_{zxz} = f_{zzx}$ para la función dada por

$$f(x, y, z) = ye^x + x \ln z.$$

Solución

Derivadas parciales de primer orden:

$$f_x(x, y, z) = ye^x + \ln z, \qquad f_z(x, y, z) = \frac{x}{z}$$

Derivadas parciales de segundo orden (nótese que las dos primeras son iguales):

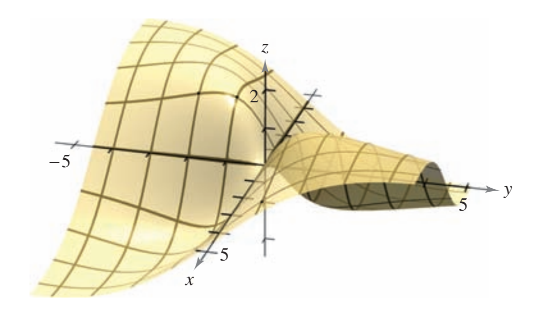
$$f_{xz}(x, y, z) = \frac{1}{z}, \qquad f_{zx}(x, y, z) = \frac{1}{z}, \qquad f_{zz}(x, y, z) = -\frac{x}{z^2}$$

Derivadas parciales de tercer orden (nótese que las tres son iguales):

$$f_{xzz}(x, y, z) = -\frac{1}{z^2}, \qquad f_{zxz}(x, y, z) = -\frac{1}{z^2}, \qquad f_{zzx}(x, y, z) = -\frac{1}{z^2}$$

13.3 Ejercicios

Para pensar **En los ejercicios 1 a 4, utilizar la gráfica de la superficie para determinar el signo de la derivada parcial indicada.**



1. $f_x(4, 1)$ **2.** $f_y(-1, -2)$

3. $f_y(4, 1)$ **4.** $f_x(-1, -1)$

En los ejercicios 5 a 8, explicar si se debe usar o no la regla del cociente para encontrar la derivada parcial. No derivar.

5. $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{x-y}{x^2+1}\right)$ **6.** $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x-y}{x^2+1}\right)$

7. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{xy}{x^2+1}\right)$ **8.** $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{xy}{x^2+1}\right)$

En los ejercicios 9 a 40, hallar las dos derivadas parciales de primer orden.

9. $f(x, y) = 2x - 5y + 3$ **10.** $f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 4$

11. $f(x, y) = x^2y^3$ **12.** $f(x, y) = 4x^3y^{-2}$

13. $z = x\sqrt{y}$ **14.** $z = 2y^2\sqrt{x}$

15. $z = x^2 - 4xy + 3y^2$ **16.** $z = y^3 - 2xy^2 - 1$

17. $z = e^{xy}$ **18.** $z = e^{x/y}$

19. $z = x^2e^{2y}$ **20.** $z = ye^{y/x}$

21. $z = \ln\dfrac{x}{y}$ **22.** $z = \ln\sqrt{xy}$

23. $z = \ln(x^2 + y^2)$ **24.** $z = \ln\dfrac{x+y}{x-y}$

25. $z = \dfrac{x^2}{2y} + \dfrac{3y^2}{x}$ **26.** $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

27. $h(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ **28.** $g(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$

29. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ **30.** $f(x, y) = \sqrt{2x + y^3}$

31. $z = \cos xy$ **32.** $z = \operatorname{sen}(x + 2y)$

33. $z = \tan(2x - y)$ **34.** $z = \operatorname{sen} 5x \cos 5y$

35. $z = e^y \operatorname{sen} xy$ **36.** $z = \cos(x^2 + y^2)$

37. $z = \operatorname{senh}(2x + 3y)$ **38.** $z = \cosh xy^2$

39. $f(x, y) = \displaystyle\int_x^y (t^2 - 1)\, dt$

40. $f(x, y) = \displaystyle\int_x^y (2t + 1)\, dt + \int_y^x (2t - 1)\, dt$

En los ejercicios 41 a 44, utilizar la definición de derivadas parciales empleando límites para calcular $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$.

41. $f(x, y) = 3x + 2y$ **42.** $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$

43. $f(x, y) = \sqrt{x + y}$ **44.** $f(x, y) = \dfrac{1}{x + y}$

En los ejercicios 45 a 52, evaluar f_x y f_y en el punto dado.

45. $f(x, y) = e^y \operatorname{sen} x$, $(\pi, 0)$

46. $f(x, y) = e^{-x}\cos y$, $(0, 0)$

47. $f(x, y) = \cos(2x - y)$, $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right)$

48. $f(x, y) = \operatorname{sen} xy$, $\left(2, \dfrac{\pi}{4}\right)$

49. $f(x, y) = \arctan\dfrac{y}{x}$, $(2, -2)$

50. $f(x, y) = \arccos xy$, $(1, 1)$

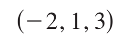
51. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x - y}$, $(2, -2)$

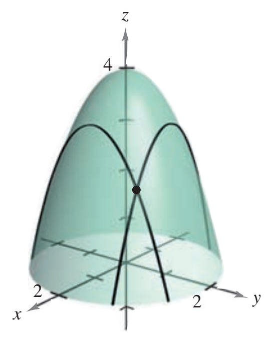
52. $f(x, y) = \dfrac{2xy}{\sqrt{4x^2 + 5y^2}}$, $(1, 1)$

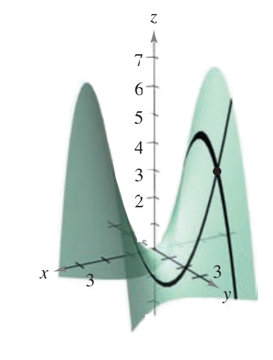
En los ejercicios 53 y 54, calcular las pendientes de la superficie en las direcciones de x y de y en el punto dado.

53. $g(x, y) = 4 - x^2 - y^2$
$(1, 1, 2)$

54. $h(x, y) = x^2 - y^2$
$(-2, 1, 3)$







CAS **En los ejercicios 55 a 58, utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la curva en la intersección de la superficie con el plano. Hallar la pendiente de la curva en el punto dado.**

	Superficie	*Plano*	*Punto*
55.	$z = \sqrt{49 - x^2 - y^2}$	$x = 2$	$(2, 3, 6)$
56.	$z = x^2 + 4y^2$	$y = 1$	$(2, 1, 8)$
57.	$z = 9x^2 - y^2$	$y = 3$	$(1, 3, 0)$
58.	$z = 9x^2 - y^2$	$x = 1$	$(1, 3, 0)$

En los ejercicios 59 a 64, calcular las derivadas parciales de primer orden con respecto a *x*, *y* y *z*.

59. $H(x, y, z) = \operatorname{sen}(x + 2y + 3z)$

60. $f(x, y, z) = 3x^2y - 5xyz + 10yz^2$

61. $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

62. $w = \dfrac{7xz}{x + y}$

63. $F(x, y, z) = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

64. $G(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}}$

En los ejercicios 65 a 70, evaluar f_x, f_y y f_z en el punto dado.

65. $f(x, y, z) = x^3yz^2, \quad (1, 1, 1)$

66. $f(x, y, z) = x^2y^3 + 2xyz - 3yz, \quad (-2, 1, 2)$

67. $f(x, y, z) = \dfrac{x}{yz}, \quad (1, -1, -1)$

68. $f(x, y, z) = \dfrac{xy}{x + y + z}, \quad (3, 1, -1)$

69. $f(x, y, z) = z\operatorname{sen}(x + y), \quad \left(0, \dfrac{\pi}{2}, -4\right)$

70. $f(x, y, z) = \sqrt{3x^2 + y^2 - 2z^2}, \quad (1, -2, 1)$

En los ejercicios 71 a 80, calcular las cuatro derivadas parciales de segundo orden. Observar que las derivadas parciales mixtas de segundo orden son iguales.

71. $z = 3xy^2$

72. $z = x^2 + 3y^2$

73. $z = x^2 - 2xy + 3y^2$

74. $z = x^4 - 3x^2y^2 + y^4$

75. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

76. $z = \ln(x - y)$

77. $z = e^x \tan y$

78. $z = 2xe^y - 3ye^{-x}$

79. $z = \cos xy$

80. $z = \arctan \dfrac{y}{x}$

En los ejercicios 81 a 88, para $f(x, y)$, encontrar todos los valores de *x* y *y*, tal que $f_x(x, y) = 0$ y $f_y(x, y) = 0$ simultáneamente.

81. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x + 2y$

82. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 5x + y$

83. $f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2 - 4x + 16y + 3$

84. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$

85. $f(x, y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + xy$

86. $f(x, y) = 3x^3 - 12xy + y^3$

87. $f(x, y) = e^{x^2 + xy + y^2}$

88. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$

CAS **En los ejercicios 89 a 92, utilizar un sistema algebraico por computadora y hallar las derivadas parciales de primero y segundo orden de la función. Determinar si existen valores de *x* y *y* tales que $f_x(x, y) = 0$ y $f_y(x, y) = 0$ simultáneamente.**

89. $f(x, y) = x\sec y$

90. $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

91. $f(x, y) = \ln\dfrac{x}{x^2 + y^2}$

92. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x - y}$

En los ejercicios 93 a 96, mostrar que las derivadas parciales mixtas f_{xyy}, f_{yxy} y f_{yyx} son iguales.

93. $f(x, y, z) = xyz$

94. $f(x, y, z) = x^2 - 3xy + 4yz + z^3$

95. $f(x, y, z) = e^{-x}\operatorname{sen} yz$

96. $f(x, y, z) = \dfrac{2z}{x + y}$

Ecuación de Laplace **En los ejercicios 97 a 100, mostrar que la función satisface la ecuación de Laplace $\partial^2z/\partial x^2 + \partial^2z/\partial y^2 = 0$.**

97. $z = 5xy$

98. $z = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})\operatorname{sen} x$

99. $z = e^x\operatorname{sen} y$

100. $z = \arctan\dfrac{y}{x}$

Ecuación de ondas **En los ejercicios 101 a 104, mostrar que la función satisface la ecuación de ondas $\partial^2z/\partial t^2 = c^2(\partial^2z/\partial x^2)$.**

101. $z = \operatorname{sen}(x - ct)$

102. $z = \cos(4x + 4ct)$

103. $z = \ln(x + ct)$

104. $z = \operatorname{sen}\omega ct\operatorname{sen}\omega x$

Ecuación del calor **En los ejercicios 105 y 106, mostrar que la función satisface la ecuación del calor $\partial z/\partial t = c^2(\partial^2z/\partial x^2)$.**

105. $z = e^{-t}\cos\dfrac{x}{c}$

106. $z = e^{-t}\operatorname{sen}\dfrac{x}{c}$

En los ejercicios 107 y 108, determinar si existe o no una función $f(x, y)$ con las derivadas parciales dadas. Explicar el razonamiento. Si tal función existe, dar un ejemplo.

107. $f_x(x, y) = -3\operatorname{sen}(3x - 2y), f_y(x, y) = 2\operatorname{sen}(3x - 2y)$

108. $f_x(x, y) = 2x + y, f_y(x, y) = x - 4y$

En los ejercicios 109 y 110, encontrar la primera derivada parcial con respecto a *x*.

109. $f(x, y, z) = (\tan y^2z)e^{z^2 + y^{-2}\sqrt{z}}$

110. $f(x, y, z) = x\left(\operatorname{senh}\dfrac{y}{z}\right)^{(y^2 - 2\sqrt{y-1})z}$

Desarrollo de conceptos

111. Sea *f* una función de dos variables *x* y *y*. Describir el procedimiento para hallar las derivadas parciales de primer orden.

112. Dibujar una superficie que represente una función *f* de dos variables *x* y *y*. Utilizar la gráfica para dar una interpretación geométrica de $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$.

113. Dibujar la gráfica de una función $z = f(x, y)$ cuya derivada f_x sea siempre negativa y cuya derivada f_y sea siempre positiva.

114. Dibujar la gráfica de una función $z = f(x, y)$ cuyas derivadas f_x y f_y sean siempre positivas.

115. Si *f* es una función de *x* y *y* tal que f_{xy} y f_{yx} son continuas, ¿qué relación existe entre las derivadas parciales mixtas? Explicar.

Para discusión

116. Encontrar las cuatro segundas derivadas parciales de la función dada por $f(x, y) = \operatorname{sen}(x - 2y)$. Mostrar que las segundas derivadas parciales mixtas f_{xy} y f_{yx} son iguales.

117. ***Ingreso marginal*** Una corporación farmacéutica tiene dos plantas que producen la misma medicina. Si x_1 y x_2 son los números de unidades producidos en la planta 1 y en la planta 2, respectivamente, entonces el ingreso total del producto está dado por $R = 200x_1 + 200x_2 - 4x_1^2 - 8x_1x_2 - 4x_2^2$. Cuando $x_1 = 4$ y $x_2 = 12$, encontrar *a*) el ingreso marginal para la planta 1, $\partial R/\partial x_1$, y *b*) el ingreso marginal para la planta 2, $\partial R/\partial x_2$.

118. ***Costo marginal*** Una empresa fabrica dos tipos de estufas de combustión de madera: el modelo autoestable y el modelo para inserción en una chimenea. La función de costo para producir x estufas autoestables y y de inserción en una chimenea es

$$C = 32\sqrt{xy} + 175x + 205y + 1\,050.$$

a) Calcular los costos marginales ($\partial C/\partial x$ y $\partial C/\partial y$) cuando $x = 80$ y $y = 20$.

b) Cuando se requiera producción adicional, ¿qué modelo de estufa hará incrementar el costo con una tasa más alta? ¿Cómo puede determinarse esto a partir del modelo del costo?

119. ***Psicología*** Recientemente en el siglo xx se desarrolló una prueba de inteligencia llamada la *Prueba de Stanford-Binet* (más conocida como la *prueba IQ*). En esta prueba, una edad mental individual M es dividida entre la edad cronológica individual C, y el cociente es multiplicado por 100. El resultado es el IQ individual.

$$IQ(M, C) = \frac{M}{C} \times 100$$

Encontrar las derivadas parciales de IQ con respecto a M y con respecto a C. Evaluar las derivadas parciales en el punto (12, 10) e interpretar el resultado. (*Fuente:* Adaptado de Bernstein/Clark-Steward/Roy/Wickens, *Psicología*, 4a. ed.)

120. ***Productividad marginal*** Considerar la función de producción de Cobb-Douglas $f(x, y) = 200x^{0.7}y^{0.3}$. Si $x = 1\,000$ y $y = 500$, hallar *a*) la productividad marginal del trabajo, $\partial f/\partial x$, y *b*) la productividad marginal del capital, $\partial f/\partial y$.

121. ***Para pensar*** Sea N el número de aspirantes a una universidad, p el costo por alimentación y alojamiento en la universidad, y t el costo de la matrícula. N es una función de p y t tal que $\partial N/\partial p < 0$ y $\partial N/\partial t < 0$. ¿Qué información se obtiene al saber que ambas derivadas parciales son negativas?

122. ***Inversión*** El valor de una inversión de \$1 000 al 6% de interés compuesto anual es

$$V(I, R) = 1\,000\left[\frac{1 + 0.06(1 - R)}{1 + I}\right]^{10}$$

donde I es la tasa anual de inflación y R es la tasa de impuesto para el inversor. Calcular $V_I(0.03, 0.28)$ y $V_R(0.03, 0.28)$. Determinar si la tasa de impuesto o la tasa de inflación es el mayor factor "negativo" sobre el crecimiento de la inversión.

123. ***Distribución de temperatura*** La temperatura en cualquier punto (x, y) de una placa de acero es $T = 500 - 0.6x^2 - 1.5y^2$, donde x y y son medidos en metros. En el punto (2, 3), hallar el ritmo de cambio de la temperatura respecto a la distancia recorrida en la placa en las direcciones del eje x y y.

124. ***Temperatura aparente*** Una medida de la percepción del calor ambiental por unas personas promedio es el Índice de temperatura aparente. Un modelo para este índice es

$$A = 0.885t - 22.4h + 1.20th - 0.544$$

donde A es la temperatura aparente en grados Celsius, t es la temperatura del aire y h es la humedad relativa dada en forma decimal. (*Fuente: The UMAP Journal*)

a) Hallar $\partial A/\partial t$ y $\partial A/\partial h$ si $t = 30°$ y $h = 0.80$.

b) ¿Qué influye más sobre A, la temperatura del aire o la humedad? Explicar.

125. ***Ley de los gases ideales*** La ley de los gases ideales establece que $PV = nRT$, donde P es la presión, V es el volumen, n es el número de moles de gas, R es una constante (la constante de los gases) y T es temperatura absoluta. Mostrar que

$$\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T} = -1.$$

126. ***Utilidad marginal*** La función de utilidad $U = f(x, y)$ es una medida de la utilidad (o satisfacción) que obtiene una persona por el consumo de dos productos x y y. Suponer que la función de utilidad es $U = -5x^2 + xy - 3y^2$.

a) Determinar la utilidad marginal del producto x.

b) Determinar la utilidad marginal del producto y.

c) Si $x = 2$ y $y = 3$, ¿se debe consumir una unidad más de producto x o una unidad más de producto y? Explicar el razonamiento.

CAS *d*) Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la función. Interpretar las utilidades marginales de productos x y y con una gráfica.

127. ***Modelo matemático*** En la tabla se muestran los consumos per cápita (en galones) de diferentes tipos de leche en Estados Unidos desde 1999 hasta 2005. El consumo de leche light y descremada, leche baja en grasa y leche entera se representa por las variables x, y y z, respectivamente. *(Fuente: U.S. Department of Agriculture)*

Año	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
x	1.4	1.4	1.4	1.6	1.6	1.7	1.7
y	7.3	7.1	7.0	7.0	6.9	6.9	6.9
z	6.2	6.1	5.9	5.8	5.6	5.5	5.6

Un modelo para los datos está dado por

$$z = -0.92x + 1.03y + 0.02.$$

a) Hallar $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

b) Interpretar las derivadas parciales en el contexto del problema.

128. ***Modelo matemático*** La tabla muestra el gasto en atención pública médica (en miles de millones de dólares) en compensación a trabajadores x, asistencia pública y y seguro médico del Estado z, del año 2000 al 2005. *(Fuente: Centers for Medicare and Medicaid Services)*

Año	2000	2001	2002	2003	2004	2005
x	24.9	28.1	30.1	31.4	32.1	33.5
y	207.5	233.2	258.4	281.9	303.2	324.9
z	224.3	247.7	265.7	283.5	312.8	342.0

Un modelo para los datos está dado por

$$z = -1.2225x^2 + 0.0096y^2 + 71.381x - 4.121y - 354.65.$$

a) Hallar $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ y $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

b) Determinar la concavidad de las trazas paralelas al plano xz. Interpretar el resultado en el contexto del problema.

c) Determinar la concavidad de las trazas paralelas al plano yz. Interpretar el resultado en el contexto del problema.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 129 a 132, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.**

129. Si $z = f(x, y)$ y $\partial z/\partial x = \partial z/\partial y$, entonces $z = c(x + y)$.

130. Si $z = f(x)g(y)$, entonces

$$(\partial z/\partial x) + (\partial z/\partial y) = f'(x)g(y) + f(x)g'(y).$$

131. Si $z = e^{xy}$, entonces $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (xy + 1)e^{xy}$.

132. Si una superficie cilíndrica $z = f(x, y)$ tiene rectas generatrices paralelas al eje y, entonces $\partial z/\partial y = 0$.

133. Considerar la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

a) Hallar $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ para $(x, y) \neq (0, 0)$.

b) Utilizar la definición de derivadas parciales para hallar $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$.

$$\left[\textit{Sugerencia: } f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x}.\right]$$

c) Utilizar la definición de derivadas parciales para hallar $f_{xy}(0, 0)$ y $f_{yx}(0, 0)$.

d) Utilizando el teorema 13.3 y el resultado del inciso *c*), indicar qué puede decirse acerca de f_{xy} o f_{yx}.

134. Sea $f(x, y) = \displaystyle\int_x^y \sqrt{1 + t^3}\, dt$. Hallar $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$.

135. Mostrar la función $f(x, y) = (x^3 + y^3)^{1/3}$.

a) Hallar $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$.

b) Determinar los puntos (si los hay) en los que $f_x(x, y)$ o $f_y(x, y)$ no existe.

136. Considerar la función $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{2/3}$. Mostrar que

$$f_x(x, y) = \begin{cases} \dfrac{4x}{3(x^2 + y^2)^{1/3}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre este problema, ver el artículo "A Classroom Note on a Naturally Occurring Piecewise Defined Function" de Don Cohen en *Mathematics and Computer Education.*

PROYECTO DE TRABAJO

Franjas de Moiré

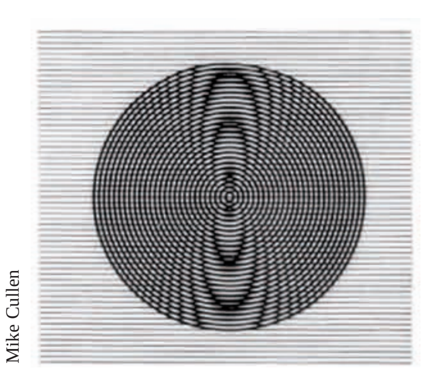
Léase el artículo "Moiré Fringes and the Conic Sections" de Mike Cullen en *The College Mathematics Journal*. El artículo describe cómo dos familias de curvas de nivel dadas por

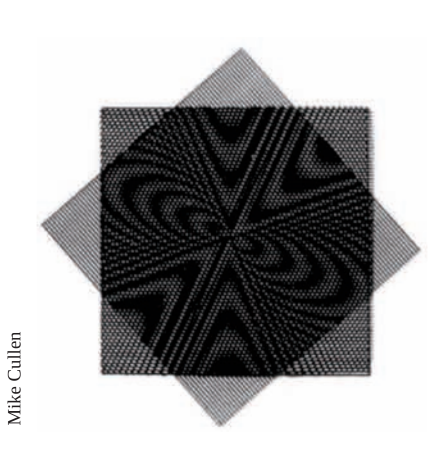
$$f(x, y) = a \qquad \text{y} \qquad g(x, y) = b$$

pueden formar franjas de Moiré. Después de leer el artículo, escribir un documento que explique cómo se relaciona la expresión

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial y}$$

con las franjas de Moiré formadas por la intersección de las dos familias de curvas de nivel. Utilizar como ejemplo uno de los modelos siguientes.


Mike Cullen


Mike Cullen

13.4 Diferenciales

- **Entender los conceptos de incrementos y diferenciales.**
- **Extender el concepto de diferenciabilidad a funciones de dos variables.**
- **Utilizar una diferencial como aproximación.**

Incrementos y diferenciales

En esta sección se generalizan los conceptos de incrementos y diferenciales a funciones de dos o más variables. Recuérdese que en la sección 3.9, dada $y = f(x)$, se definió la diferencial de y como

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Terminología similar se usa para una función de dos variables, $z = f(x, y)$. Es decir, Δx y Δy son los **incrementos en x y en y**, y el **incremento en z** está dado por

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Incremento en z.

DEFINICIÓN DE DIFERENCIAL TOTAL

Si $z = f(x, y)$ y Δx y Δy son los incrementos en x y en y, entonces las **diferenciales** de las variables independientes x y y son

$$dx = \Delta x \qquad \text{y} \qquad dy = \Delta y$$

y la **diferencial total** de la variable dependiente z es

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = f_x(x, y)\,dx + f_y(x, y)\,dy.$$

Esta definición puede extenderse a una función de tres o más variables. Por ejemplo, si $w = f(x, y, z, u)$, entonces $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, $dz = \Delta z$, $du = \Delta u$, y la diferencial total de w es

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz + \frac{\partial w}{\partial u}du.$$

EJEMPLO 1 Hallar la diferencial total

Hallar la diferencial total de cada función.

a) $z = 2x \operatorname{sen} y - 3x^2y^2$ ***b)*** $w = x^2 + y^2 + z^2$

Solución

a) La diferencial total dz de $z = 2x \operatorname{sen} y - 3x^2y^2$ es

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Diferencial total dz.

$$= (2 \operatorname{sen} y - 6xy^2)\,dx + (2x \cos y - 6x^2y)\,dy.$$

b) La diferencial total dw de $w = x^2 + y^2 + z^2$ es

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$

Diferencial total dw.

$$= 2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz.$$

Diferenciabilidad

En la sección 3.9 se vio que si una función dada por $y = f(x)$ es *diferenciable*, se puede utilizar la diferencial $dy = f'(x)\,dx$ como una aproximación (para Δx pequeños) al valor $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Cuando es válida una aproximación similar para una función de dos variables, se dice que la función es **diferenciable**. Esto se expresa explícitamente en la definición siguiente.

DEFINICIÓN DE DIFERENCIABILIDAD

Una función f dada por $z = f(x, y)$ es **diferenciable** en (x_0, y_0) si Δz puede expresarse en la forma

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

donde ε_1 y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$. La función f es **diferenciable en una región *R*** si es diferenciable en todo punto de R.

EJEMPLO 2 Mostrar que una función es diferenciable

Mostrar que la función dada por

$$f(x, y) = x^2 + 3y$$

es diferenciable en todo punto del plano.

Solución Haciendo $z = f(x, y)$, el incremento de z en un punto arbitrario (x, y) en el plano es

$$\begin{aligned}
\Delta z &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) && \text{Incremento de } z.\\
&= (x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) + 3(y + \Delta y) - (x^2 + 3y)\\
&= 2x\Delta x + \Delta x^2 + 3\Delta y\\
&= 2x(\Delta x) + 3(\Delta y) + \Delta x(\Delta x) + 0(\Delta y)\\
&= f_x(x, y)\,\Delta x + f_y(x, y)\,\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y
\end{aligned}$$

Figura 13.34

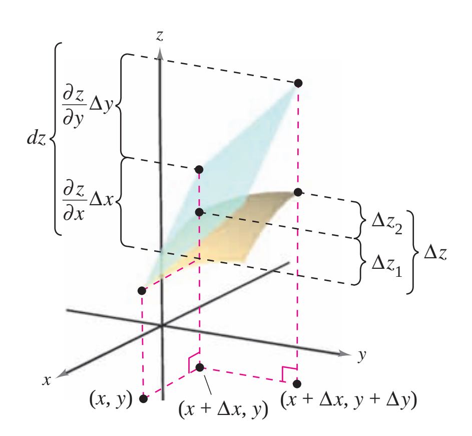
donde $\varepsilon_1 = \Delta x$ y $\varepsilon_2 = 0$. Como $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$, se sigue que f es diferenciable en todo punto en el plano. La gráfica de f se muestra en la figura 13.34.

Debe tenerse en cuenta que el término "diferenciable" se usa de manera diferente para funciones de dos variables y para funciones de una variable. Una función de una variable es diferenciable en un punto si su derivada existe en el punto. Sin embargo, en el caso de una función de dos variables, la existencia de las derivadas parciales f_x y f_y no garantiza que la función sea diferenciable (ver ejemplo 5). El teorema siguiente proporciona una condición *suficiente* para la diferenciabilidad de una función de dos variables. En el apéndice A se da una demostración del teorema 13.4.

TEOREMA 13.4 CONDICIONES SUFICIENTES PARA LA DIFERENCIABILIDAD

Si f es una función de x y y, para la que f_x y f_y son continuas en una región abierta R, entonces f es diferenciable en R.

Aproximación mediante diferenciales



El cambio exacto en z es Δz.
Este cambio puede aproximarse mediante la diferencial dz.
Figura 13.35

El teorema 13.4 dice que se puede elegir $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ suficientemente cerca de (x, y) para hacer que $\varepsilon_1 \Delta x$ y $\varepsilon_2 \Delta y$ sean insignificantes. En otros términos, para Δx y Δy pequeños, se puede usar la aproximación

$$\Delta z \approx dz.$$

Esta aproximación se ilustra gráficamente en la figura 13.35. Hay que recordar que las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ pueden interpretarse como las pendientes de la superficie en las direcciones de x y de y. Esto significa que

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

representa el cambio en altura de un plano tangente a la superficie en el punto $(x, y, f(x, y))$. Como un plano en el espacio se representa mediante una ecuación lineal en las variables x, y y z, la aproximación de Δz mediante dz se llama **aproximación lineal**. Se verá más acerca de esta interpretación geométrica en la sección 13.7.

EJEMPLO 3 Uso de la diferencial como una aproximación

Utilizar la diferencial dz para aproximar el cambio en $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ cuando (x, y) se desplaza del punto (1, 1) al punto (1.01, 0.97). Comparar esta aproximación con el cambio exacto en z.

Solución Se hace $(x, y) = (1, 1)$ y $(x + \Delta x, y + \Delta y) = (1.01, 0.97)$ y se obtiene $dx = \Delta x = 0.01$ y $dy = \Delta y = -0.03$. Por tanto, el cambio en z puede aproximarse mediante

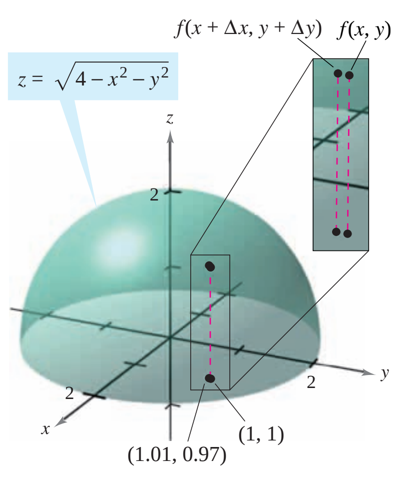
$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\Delta x + \frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\Delta y.$$

Cuando $x = 1$ y $y = 1$, se tiene

$$\Delta z \approx -\frac{1}{\sqrt{2}}(0.01) - \frac{1}{\sqrt{2}}(-0.03) = \frac{0.02}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,(0.01) \approx 0.0141.$$

En la figura 13.36 se puede ver que el cambio exacto corresponde a la diferencia entre las alturas de dos puntos sobre la superficie de un hemisferio. Esta diferencia está dada por

$$\Delta z = f(1.01, 0.97) - f(1, 1)$$
$$= \sqrt{4 - (1.01)^2 - (0.97)^2} - \sqrt{4 - 1^2 - 1^2} \approx 0.0137.$$



Cuando (x, y) se desplaza de $(1, 1)$ al punto $(1.01, 0.97)$, el valor de $f(x, y)$ cambia aproximadamente en 0.0137
Figura 13.36

Una función de tres variables $w = f(x, y, z)$ se dice que es **diferenciable** en (x, y, z) si

$$\Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

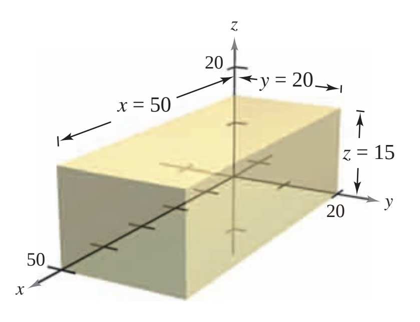
puede expresarse en la forma

$$\Delta w = f_x\Delta x + f_y\Delta y + f_z\Delta z + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z$$

donde $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, y $\varepsilon_3 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \to (0, 0, 0)$. Con esta definición de diferenciabilidad, el teorema 13.4 puede extenderse de la siguiente manera a funciones de tres variables: si f es una función de x, y y z, donde f, f_x, f_y y f_z son continuas en una región abierta R, entonces f es diferenciable en R.

En la sección 3.9 se utilizaron las diferenciales para aproximar el error de propagación introducido por un error en la medida. Esta aplicación de las diferenciales se ilustra en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Análisis de errores



Volumen $= xyz$
Figura 13.37

El error producido al medir cada una de las dimensiones de una caja rectangular es ± 0.1 milímetros. Las dimensiones de la caja son $x = 50$ centímetros, $y = 20$ centímetros y $z = 15$ centímetros, como se muestra en la figura 13.37. Utilizar dV para estimar el error propagado y el error relativo en el volumen calculado de la caja.

Solución El volumen de la caja está dado por $V = xyz$, y por tanto

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz \\ &= yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz. \end{aligned}$$

Utilizando 0.1 milímetros $=$ 0.01 centímetros, se tiene $dx = dy = dz = \pm 0.01$, y el error propagado es aproximadamente

$$\begin{aligned} dV &= (20)(15)(\pm 0.01) + (50)(15)(\pm 0.01) + (50)(20)(\pm 0.01) \\ &= 300(\pm 0.01) + 750(\pm 0.01) + 1\,000(\pm 0.01) \\ &= 2\,050(\pm 0.01) = \pm 20.5 \text{ centímetros cúbicos.} \end{aligned}$$

Como el volumen medido es

$$V = (50)(20)(15) = 15\,000 \text{ centímetros cúbicos,}$$

el error relativo, $\Delta V/V$, es aproximadamente

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{20.5}{15\,000} \approx 0.14\%.$$

Como ocurre con una función de una sola variable, si una función de dos o más variables es diferenciable en un punto, también es continua en él.

TEOREMA 13.5 DIFERENCIABILIDAD IMPLICA CONTINUIDAD

Si una función de x y y es diferenciable en (x_0, y_0), entonces es continua en (x_0, y_0).

DEMOSTRACIÓN Sea f diferenciable en (x_0, y_0), donde $z = f(x, y)$. Entonces

$$\Delta z = [f_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1]\,\Delta x + [f_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2]\,\Delta y$$

donde ε_1 y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$. Sin embargo, por definición, se sabe que Δz está dada por

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Haciendo $x = x_0 + \Delta x$ y $y = y_0 + \Delta y$ se obtiene

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &= [f_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1]\,\Delta x + [f_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2]\,\Delta y \\ &= [f_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1](x - x_0) + [f_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2](y - y_0). \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando $(x, y) \to (x_0, y_0)$, se obtiene

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

lo cual significa que f es continua en (x_0, y_0).

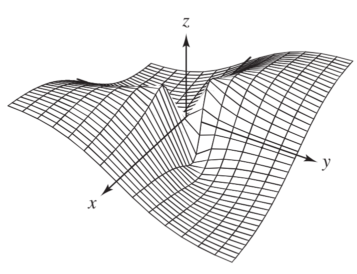
Hay que recordar que la existencia de f_x y f_y no es suficiente para garantizar la diferenciabilidad, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 Una función que no es diferenciable

Mostrar que $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$ existen, pero f no es diferenciable en $(0, 0)$, donde f está definida como

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{-3xy}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

TECNOLOGÍA Utilizar una herramienta de graficación para representar la función del ejemplo 5. La gráfica mostrada abajo fue generada con *Mathematica*.



Generada con Mathematica

Solución Para mostrar que f no es diferenciable en $(0, 0)$ basta mostrar que no es continua en este punto. Para ver que f no es continua en $(0, 0)$, se observan los valores de $f(x, y)$ a lo largo de dos trayectorias diferentes que se aproximan a $(0, 0)$, como se muestra en la figura 13.38. A lo largo de la recta $y = x$, el límite es

$$\lim_{(x, x)\to(0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, x)\to(0, 0)} \frac{-3x^2}{2x^2} = -\frac{3}{2}$$

mientras que a lo largo de $y = -x$ se tiene

$$\lim_{(x, -x)\to(0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, -x)\to(0, 0)} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}.$$

Así, el límite de $f(x, y)$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$ no existe, y se puede concluir que f no es continua en $(0, 0)$. Por tanto, de acuerdo con el teorema 13.5, f no es diferenciable en $(0, 0)$. Por otro lado, de acuerdo con la definición de las derivadas parciales f_x y f_y, se tiene

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0$$

y

$$f_y(0, 0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{0 - 0}{\Delta y} = 0.$$

Por tanto, las derivadas parciales en $(0, 0)$ existen.

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{-3xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

A lo largo de la recta $y = -x$, $f(x, y)$ se aproxima o tiende a 3/2.

(0, 0, 0)

A lo largo de la recta $y = x$, $f(x, y)$ se aproxima o tiende a −3/2.

Figura 13.38

13.4 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 10, hallar la diferencial total.

1. $z = 2x^2y^3$
2. $z = \dfrac{x^2}{y}$
3. $z = \dfrac{-1}{x^2 + y^2}$
4. $w = \dfrac{x + y}{z - 3y}$
5. $z = x \cos y - y \cos x$
6. $z = \frac{1}{2}(e^{x^2+y^2} - e^{-x^2-y^2})$
7. $z = e^x \operatorname{sen} y$
8. $w = e^y \cos x + z^2$
9. $w = 2z^3 y \operatorname{sen} x$
10. $w = x^2yz^2 + \operatorname{sen} yz$

En los ejercicios 11 a 16, *a*) evaluar *f*(2, 1) y *f*(2.1, 1.05) y calcular Δz, y *b*) usar el diferencial total *dz* para aproximar Δz.

11. $f(x, y) = 2x - 3y$
12. $f(x, y) = x^2 + y^2$
13. $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$
14. $f(x, y) = \dfrac{y}{x}$
15. $f(x, y) = ye^x$
16. $f(x, y) = x \cos y$

En los ejercicios 17 a 20, hallar $z = f(x, y)$ y utilizar la diferencial total para aproximar la cantidad.

17. $(2.01)^2(9.02) - 2^2 \cdot 9$
18. $\sqrt{(5.05)^2 + (3.1)^2} - \sqrt{5^2 + 3^2}$
19. $\dfrac{1 - (3.05)^2}{(5.95)^2} - \dfrac{1 - 3^2}{6^2}$
20. $\operatorname{sen}[(1.05)^2 + (0.95)^2] - \operatorname{sen}(1^2 + 1^2)$

Desarrollo de conceptos

21. Definir la diferencial total de una función de dos variables.
22. Describir el cambio en la exactitud de *dz* como aproximación a Δz cuando Δx y Δy aumentan.
23. ¿Qué se quiere decir con una aproximación lineal a $z = f(x, y)$ en el punto $P(x_0, y_0)$?
24. Cuando se usan diferenciales, ¿qué significan los términos de *propagación* y *error relativo*?

25. ***Área*** El área del rectángulo sombreada en la figura es $A = lh$. Los posibles errores en la longitud y la altura son Δl y Δh, respectivamente. Hallar *dA* e identificar las regiones de la figura cuyas áreas están dadas por los términos de *dA*. ¿Qué región representa la diferencia entre ΔA y *dA*?

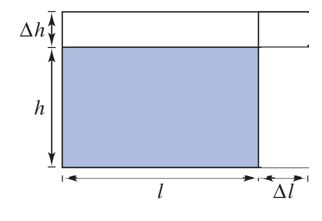


Figura para 25

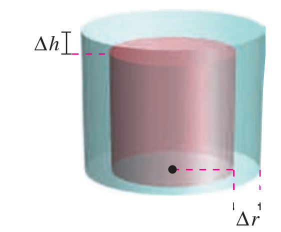


Figura para 26

26. ***Volumen*** El volumen del cilindro circular recto de color rojo en la figura es $V = \pi r^2 h$. Los posibles errores son Δr y Δh, en el radio y en la altura, respectivamente. Hallar *dV* e identificar los sólidos de la figura cuyos volúmenes están dados por los términos de *dV*. ¿Qué sólido representa la diferencia entre ΔV y *dV*?

27. ***Análisis numérico*** Se construye un cono circular recto de altura $h = 8$ y radio $r = 4$ y durante la medición se cometieron errores en el radio Δr y en la altura Δh. Completar la tabla para mostrar la relación entre ΔV y *dV* para los errores indicados.

Δr	Δh	*dV* o *dS*	ΔV o ΔS	$\Delta V - dV$ o $\Delta S - dS$
0.1	0.1			
0.1	−0.1			
0.001	0.002			
−0.0001	0.0002			

28. ***Análisis numérico*** La altura y radio de un cono circular recto midieron $h = 16$ metros y $r = 6$ metros. En la medición, se cometieron errores Δr y Δh. *S* es el área de la superficie lateral de un cono. Completar la tabla anterior para mostrar la relación entre ΔS y *dS* para los errores indicados.

29. ***Modelo matemático*** Los consumos per cápita (en galones) de diferentes tipos de leche en Estados Unidos de 1999 a 2005 se muestran en la tabla. El consumo de leche light y descremada, leche baja en grasas y leche entera se representa por las variables *x*, *y* y *z*, respectivamente. *(Fuente: U.S. Department of Agriculture)*

Año	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
x	1.4	1.4	1.4	1.6	1.6	1.7	1.7
y	7.3	7.1	7.0	7.0	6.9	6.9	6.9
z	6.2	6.1	5.9	5.8	5.6	5.5	5.6

Un modelo para los datos está dado por $z = -0.92x + 1.03y + 0.02$.

a) Hallar la diferencial total del modelo.

b) Se prevé en la industria lechera que en años futuros el consumo per cápita de leche light y descremada será de 1.9 ± 0.25 galones y que el consumo per cápita de leche baja en grasas será 7.5 ± 0.25 galones. Utilizar *dz* para estimar los máximos errores de propagación y relativo en el pronóstico de consumo de leche entera.

30. ***Coordenadas rectangulares a polares*** Un sistema de coordenadas rectangular se coloca sobre un mapa y las coordenadas de un punto de interés son (7.2, 2.5). Existe un posible error de 0.05 en cada coordenada. Aproximar el máximo error posible al medir las coordenadas polares del punto.

31. ***Volumen*** El radio r y la altura h de un cilindro circular recto se miden con posibles errores de 4 y 2%, respectivamente. Aproximar el máximo error porcentual posible al medir el volumen.

32. ***Área*** En un triángulo, dos lados adyacentes miden 3 y 4 pulgadas de longitud, y entre ellos forman un ángulo de $\pi/4$. Los posibles errores de medición son $\frac{1}{16}$ pulgadas en los lados y 0.02 radianes en el ángulo. Aproximar el máximo error posible al calcular el área.

33. ***Viento*** La fórmula para la frialdad producida por el viento C (en grados Fahrenheit) es

$$C = 35.74 + 0.6215T - 35.75v^{0.16} + 0.4275Tv^{0.16}$$

donde v es la velocidad del viento en millas por hora y T es la temperatura en grados Fahrenheit. La velocidad del viento es 23 ± 3 millas por hora y la temperatura es $8° \pm 1°$. Utilizar dC para estimar el posible error propagado y el error relativo máximos al calcular la frialdad producida por el viento. *(Fuente: National Oceanic and Atmospheric Administration)*

34. ***Aceleración*** La aceleración centrípeta de una partícula que se mueve en un círculo es $a = v^2/r$, donde v es la velocidad y r es el radio del círculo. Aproximar el error porcentual máximo al medir la aceleración debida a errores de 3% en v y 2% en r.

35. ***Volumen*** Un abrevadero tiene 16 pies de largo (ver la figura). Sus secciones transversales son triángulos isósceles en los que los dos lados iguales miden 18 pulgadas. El ángulo entre los dos lados iguales es θ.

a) Expresar el volumen del abrevadero en función de θ y determinar el valor de θ para el que el volumen es máximo.

b) El error máximo en las mediciones lineales es de media pulgada y el error máximo en la medida del ángulo es 2°. Aproximar el cambio a partir del volumen máximo.

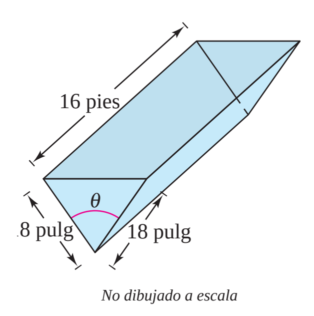


Figura para 35

Figura para 36

36. ***Deportes*** Un jugador de béisbol en el jardín central se encuentra aproximadamente a 330 pies de una cámara de televisión que está en la base. Un bateador golpea una pelota que sale hacia una valla situada a una distancia de 420 pies de la cámara (ver la figura).

a) La cámara gira 9° para seguir la carrera. Aproximar el número de pies que el jugador central tiene que correr para atrapar la pelota.

b) La posición del jugador central podría tener un error hasta de 6 pies y el error máximo al medir la rotación de la cámara de 1°. Aproximar el máximo error posible en el resultado del inciso *a*).

37. ***Potencia*** La potencia eléctrica P está dada por $P = E^2/R$, donde E es el voltaje y R es la resistencia. Aproximar el máximo error porcentual al calcular la potencia si se aplican 120 volts a una resistencia de 2 000 ohms y los posibles errores porcentuales al medir E y R son 3 y 4%, respectivamente.

38. ***Resistencia*** La resistencia total R de dos resistencias conectadas en paralelo es

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Aproximar el cambio en R cuando R_1 incrementa de 10 ohms a 10.5 ohms y R_2 decrece de 15 ohms a 13 ohms.

39. ***Inductancia*** La inductancia L (en microhenrys) de un hilo recto no magnético en el vacío es

$$L = 0.00021\left(\ln\frac{2h}{r} - 0.75\right)$$

donde h es la longitud del hilo en milímetros y r es el radio de una sección transversal circular. Aproximar L cuando $r = 2 \pm \frac{1}{16}$ milímetros y $h = 100 \pm \frac{1}{100}$ milímetros.

40. ***Péndulo*** El periodo T de un péndulo de longitud L es $T = 2\pi\sqrt{L/g}$, donde g es la aceleración de la gravedad. Un péndulo se lleva de la zona del canal, donde $g = 32.09$ pies/s², a Groenlandia, donde $g = 32.23$ pies/s². Debido al cambio en la temperatura, la longitud del péndulo cambia de 2.5 pies a 2.48 pies. Aproximar el cambio en el periodo del péndulo.

En los ejercicios 41 a 44, mostrar que la función es diferenciable, hallando los valores de ε_1 y ε_2 que se dan en la definición de diferenciabilidad y verificar que ε_1 y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

41. $f(x, y) = x^2 - 2x + y$

42. $f(x, y) = x^2 + y^2$

43. $f(x, y) = x^2y$

44. $f(x, y) = 5x - 10y + y^3$

En los ejercicios 45 y 46, utilizar la función para demostrar que *a*) $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$ existen, y *b*) f no es diferenciable en $(0, 0)$.

45. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

46. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{5x^2y}{x^3 + y^3}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

47. Mostrar que si $f(x, y)$ es diferenciable en (x_0, y_0), entonces $f(x, y_0)$ es diferenciable en $x = x_0$. Usar este resultado para probar que $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ no es diferenciable en $(0, 0)$.

Para discusión

48. Considerar la función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

a) Evaluar $f(3, 1)$ y $f(3.05, 1.1)$.

b) Usar los resultados del inciso *a*) para calcular Δz.

c) Usar la diferencial total dz para aproximar Δz. Comparar los resultados con los del inciso *b*).

13.5 Regla de la cadena para funciones de varias variables

- **Utilizar la regla de la cadena para funciones de varias variables.**
- **Hallar las derivadas parciales implícitamente.**

Regla de la cadena para funciones de varias variables

El trabajo con diferenciales de la sección anterior proporciona las bases para la extensión de la regla de la cadena a funciones de dos variables. Hay dos casos: el primer caso cuando w es una función de x y y, donde x y y son funciones de una sola variable independiente t. (La demostración de este teorema se da en el apéndice A.)

Regla de la cadena: una variable dependiente w, es función de x y y las que a su vez son funciones de t. Este diagrama representa la derivada de w con respecto a t
Figura 13.39

TEOREMA 13.6 REGLA DE LA CADENA: UNA VARIABLE INDEPENDIENTE

Sea $w = f(x, y)$, donde f es una función derivable de x y y. Si $x = g(t)$ y $y = h(t)$, donde g y h son funciones derivables de t, entonces w es una función diferenciable de t, y

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Ver figura 13.39.

EJEMPLO 1 Regla de la cadena con una variable independiente

Sea $w = x^2y - y^2$, donde $x = \text{sen } t$ y $y = e^t$. Hallar dw/dt cuando $t = 0$.

Solución De acuerdo con la regla de la cadena para una variable independiente, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}\\ &= 2xy(\cos t) + (x^2 - 2y)e^t\\ &= 2(\text{sen } t)(e^t)(\cos t) + (\text{sen}^2 t - 2e^t)e^t\\ &= 2e^t \text{ sen } t \cos t + e^t \text{ sen}^2 t - 2e^{2t}.\end{aligned}$$

Cuando $t = 0$, se sigue que

$$\frac{dw}{dt} = -2.$$

La regla de la cadena presentada en esta sección proporciona técnicas alternativas para resolver muchos problemas del cálculo de una sola variable. Así, en el ejemplo 1, se podrían haber usado técnicas para una sola variable para encontrar dw/dt expresando primero w como función de t,

$$\begin{aligned}w &= x^2y - y^2\\ &= (\text{sen } t)^2(e^t) - (e^t)^2\\ &= e^t \text{ sen}^2 t - e^{2t}\end{aligned}$$

y derivando después como de costumbre.

$$\frac{dw}{dt} = 2e^t \text{ sen } t \cos t + e^t \text{ sen}^2 t - 2e^{2t}$$

La regla de la cadena en el teorema 13.6 puede extenderse a cualquier número de variables. Por ejemplo, si cada x_i es una función derivable de una sola variable t, entonces para

$$w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

se tiene

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}.$$

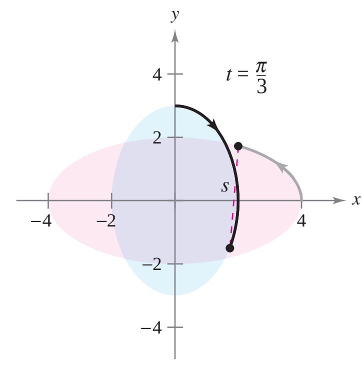
EJEMPLO 2 Aplicación de la regla de la cadena a velocidades o ritmos de cambio relacionados

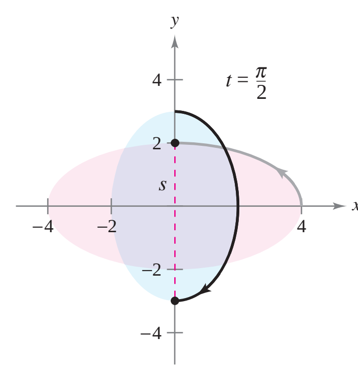
Dos objetos recorren trayectorias elípticas dadas por las ecuaciones paramétricas siguientes.

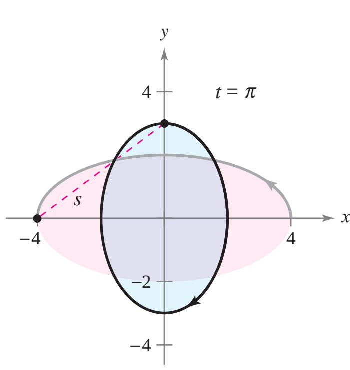
$x_1 = 4\cos t$ y $y_1 = 2\,\text{sen}\,t$ Primer objeto.

$x_2 = 2\,\text{sen}\,2t$ y $y_2 = 3\cos 2t$ Segundo objeto.

¿A qué velocidad o ritmo cambia la distancia entre los dos objetos cuando $t = \pi$?







Trayectorias de dos objetos que recorren órbitas elípticas
Figura 13.40

Solución En la figura 13.40 se puede ver que la distancia s entre los dos objetos está dada por

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

y que cuando $t = \pi$, se tiene $x_1 = -4$, $y_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_2 = 3$ y

$$s = \sqrt{(0 + 4)^2 + (3 - 0)^2} = 5.$$

Cuando $t = \pi$, las derivadas parciales de s son las siguientes.

$$\frac{\partial s}{\partial x_1} = \frac{-(x_2 - x_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = -\frac{1}{5}(0 + 4) = -\frac{4}{5}$$

$$\frac{\partial s}{\partial y_1} = \frac{-(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = -\frac{1}{5}(3 - 0) = -\frac{3}{5}$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_2} = \frac{(x_2 - x_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = \frac{1}{5}(0 + 4) = \frac{4}{5}$$

$$\frac{\partial s}{\partial y_2} = \frac{(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = \frac{1}{5}(3 - 0) = \frac{3}{5}$$

Cuando $t = \pi$, las derivadas de x_1, y_1, x_2 y y_2 son

$$\frac{dx_1}{dt} = -4\,\text{sen}\,t = 0 \qquad \frac{dy_1}{dt} = 2\cos t = -2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 4\cos 2t = 4 \qquad \frac{dy_2}{dt} = -6\,\text{sen}\,2t = 0.$$

Por tanto, usando la regla de la cadena apropiada, se sabe que la distancia cambia a una velocidad o ritmo

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial s}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dt} + \frac{\partial s}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial s}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dt}$$

$$= \left(-\frac{4}{5}\right)(0) + \left(-\frac{3}{5}\right)(-2) + \left(\frac{4}{5}\right)(4) + \left(\frac{3}{5}\right)(0)$$

$$= \frac{22}{5}.$$

En el ejemplo 2, obsérvese que s es función de cuatro variables *intermedias*, x_1, y_1, x_2 y y_2, cada una de las cuales es a su vez función de una sola variable t. Otro tipo de función compuesta es aquella en la que las variables intermedias son, a su vez, funciones de más de una variable. Por ejemplo, si $w = f(x, y)$, donde $x = g(s, t)$ y $y = h(s, t)$, se sigue que w es función de s y t, y se pueden considerar las derivadas parciales de w con respecto a s y t. Una manera de encontrar estas derivadas parciales es expresar w explícitamente como función de s y t sustituyendo las ecuaciones $x = g(s, t)$ y $y = h(s, t)$ en la ecuación $w = f(x, y)$. Así se pueden encontrar las derivadas parciales de la manera usual, como se muestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 Hallar derivadas parciales por sustitución

Hallar $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$ para $w = 2xy$, donde $x = s^2 + t^2$ y $y = s/t$.

Solución Se comienza por sustituir $x = s^2 + t^2$ y $y = s/t$ en la ecuación $w = 2xy$ para obtener

$$w = 2xy = 2(s^2 + t^2)\left(\frac{s}{t}\right) = 2\left(\frac{s^3}{t} + st\right).$$

Después, para encontrar $\partial w/\partial s$, se mantiene t constante y se deriva con respecto a s.

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial s} &= 2\left(\frac{3s^2}{t} + t\right)\\ &= \frac{6s^2 + 2t^2}{t}\end{aligned}$$

De manera similar, para hallar $\partial w/\partial t$, se mantiene s constante y se deriva con respecto a t para obtener

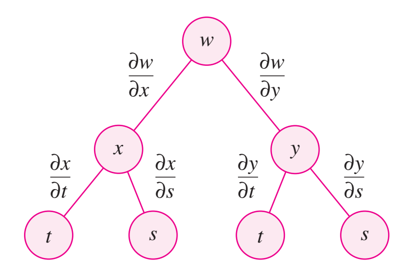
$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} &= 2\left(-\frac{s^3}{t^2} + s\right)\\ &= 2\left(\frac{-s^3 + st^2}{t^2}\right)\\ &= \frac{2st^2 - 2s^3}{t^2}.\end{aligned}$$

El teorema 13.7 proporciona un método alternativo para hallar las derivadas parciales del ejemplo 3, sin expresar w explícitamente como función de s y t.

TEOREMA 13.7 REGLA DE LA CADENA: DOS VARIABLES INDEPENDIENTES

Sea $w = f(x, y)$, donde f es una función diferenciable de x y y. Si $x = g(s, t)$ y $y = h(s, t)$ son tales que las derivadas parciales de primer orden $\partial x/\partial s$, $\partial x/\partial t$, $\partial y/\partial s$ y $\partial y/\partial t$ existen, entonces $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$ existen y están dadas por

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{y} \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$



La regla de la cadena: dos variables independientes
Figura 13.41

DEMOSTRACIÓN Para obtener $\partial w/\partial s$, se mantiene constante t y se aplica el teorema 13.6 para obtener el resultado deseado. De manera similar, para obtener $\partial w/\partial t$ se mantiene constante s y se aplica el teorema 13.6.

NOTA La regla de la cadena en este teorema se muestra esquemáticamente en la figura 13.41. ■

EJEMPLO 4 Regla de la cadena con dos variables independientes

Utilizar la regla de la cadena para encontrar $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$, dada

$$w = 2xy$$

donde $x = s^2 + t^2$ y $y = s/t$.

Solución Nótese que estas mismas derivadas parciales fueron calculadas en el ejemplo 3. Esta vez, usando el teorema 13.7, se puede mantener constante t y derivar con respecto a s para obtener

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\\ &= 2y(2s) + 2x\left(\frac{1}{t}\right)\\ &= 2\left(\frac{s}{t}\right)(2s) + 2(s^2 + t^2)\left(\frac{1}{t}\right) && \text{Sustituir } y \text{ por } (s/t) \text{ y } x \text{ por } s^2 + t^2.\\ &= \frac{4s^2}{t} + \frac{2s^2 + 2t^2}{t}\\ &= \frac{6s^2 + 2t^2}{t}.\end{aligned}$$

De manera similar, manteniendo s constante se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\\ &= 2y(2t) + 2x\left(\frac{-s}{t^2}\right)\\ &= 2\left(\frac{s}{t}\right)(2t) + 2(s^2 + t^2)\left(\frac{-s}{t^2}\right) && \text{Sustituir } y \text{ por } (s/t) \text{ y } x \text{ por } s^2 + t^2.\\ &= 4s - \frac{2s^3 + 2st^2}{t^2}\\ &= \frac{4st^2 - 2s^3 - 2st^2}{t^2}\\ &= \frac{2st^2 - 2s^3}{t^2}.\end{aligned}$$

La regla de la cadena del teorema 13.7 también puede extenderse a cualquier número de variables. Por ejemplo, si w es una función diferenciable de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, donde cada x_i es una función diferenciable de m variables $t_1, t_2, \ldots, t_m$, entonces para

$$w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t_1} &= \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \cdots + \frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1}\\ \frac{\partial w}{\partial t_2} &= \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \cdots + \frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_2}\\ &\vdots\\ \frac{\partial w}{\partial t_m} &= \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_m} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_m} + \cdots + \frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_m}\end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Regla de la cadena para una función de tres variables

Hallar $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$ si $s = 1$ y $t = 2\pi$, dada la función

$$w = xy + yz + xz$$

donde $x = s \cos t$, $y = s \operatorname{sen} t$ y $z = t$.

Solución Por extensión del teorema 13.7, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}\\ &= (y + z)(\cos t) + (x + z)(\operatorname{sen} t) + (y + x)(0)\\ &= (y + z)(\cos t) + (x + z)(\operatorname{sen} t).\end{aligned}$$

Cuando $s = 1$ y $t = 2\pi$, se tiene $x = 1$, $y = 0$ y $z = 2\pi$. Así, $\partial w/\partial s = (0 + 2\pi)(1) + (1 + 2\pi)(0) = 2\pi$. Y

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}\\ &= (y + z)(-s \operatorname{sen} t) + (x + z)(s \cos t) + (y + x)(1)\end{aligned}$$

y si $s = 1$ y $t = 2\pi$, se sigue que

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} &= (0 + 2\pi)(0) + (1 + 2\pi)(1) + (0 + 1)(1)\\ &= 2 + 2\pi.\end{aligned}$$

Derivación o diferenciación parcial implícita

Esta sección concluye con una aplicación de la regla de la cadena para determinar la derivada de una función definida *implícitamente*. Supóngase que x y y están relacionadas por la ecuación $F(x, y) = 0$, donde se supone que $y = f(x)$ es función derivable de x. Para hallar dy/dx, se podría recurrir a las técnicas vistas de la sección 2.5. Sin embargo, se verá que la regla de la cadena proporciona una útil alternativa. Si se considera la función dada por

$$w = F(x, y) = F(x, f(x))$$

se puede aplicar el teorema 13.6 para obtener

$$\frac{dw}{dx} = F_x(x, y)\frac{dx}{dx} + F_y(x, y)\frac{dy}{dx}.$$

Como $w = F(x, y) = 0$ para toda x en el dominio de f, se sabe que $dw/dx = 0$ y se tiene

$$F_x(x, y)\frac{dx}{dx} + F_y(x, y)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Ahora, si $F_y(x, y) \neq 0$, se puede usar el hecho de que $dx/dx = 1$ para concluir que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}.$$

Un procedimiento similar puede usarse para encontrar las derivadas parciales de funciones de varias variables definidas implícitamente.

TEOREMA 13.8 REGLA DE LA CADENA: DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Si la ecuación $F(x, y) = 0$ define a y implícitamente como función derivable de x, entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}, \qquad F_y(x, y) \neq 0.$$

Si la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define a z implícitamente como función diferenciable de x y y, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}, \quad F_z(x, y, z) \neq 0.$$

Este teorema puede extenderse a funciones diferenciables definidas implícitamente de cualquier número de variables.

EJEMPLO 6 Hallar una derivada implícitamente

Hallar dy/dx, dada la ecuación $y^3 + y^2 - 5y - x^2 + 4 = 0$.

Solución Se comienza por definir una función F

$$F(x, y) = y^3 + y^2 - 5y - x^2 + 4.$$

Después, usando el teorema 13.8, se tiene

$$F_x(x, y) = -2x \quad \text{y} \quad F_y(x, y) = 3y^2 + 2y - 5$$

por lo que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = \frac{-(-2x)}{3y^2 + 2y - 5} = \frac{2x}{3y^2 + 2y - 5}.$$

NOTA Comparar la solución del ejemplo 6 con la solución del ejemplo 2 en la sección 2.5.

EJEMPLO 7 Hallar derivadas parciales implícitamente

Encontrar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$, dada la ecuación $3x^2z - x^2y^2 + 2z^3 + 3yz - 5 = 0$.

Solución Para aplicar el teorema 13.8, sea

$$F(x, y, z) = 3x^2z - x^2y^2 + 2z^3 + 3yz - 5.$$

Entonces

$$F_x(x, y, z) = 6xz - 2xy^2$$
$$F_y(x, y, z) = -2x^2y + 3z$$
$$F_z(x, y, z) = 3x^2 + 6z^2 + 3y$$

con lo que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = \frac{2xy^2 - 6xz}{3x^2 + 6z^2 + 3y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = \frac{2x^2y - 3z}{3x^2 + 6z^2 + 3y}.$$

13.5 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, hallar *dw/dt* utilizando la regla de la cadena apropiada.

1. $w = x^2 + y^2$
   $x = 2t,\ \ y = 3t$
2. $w = \sqrt{x^2 + y^2}$
   $x = \cos t,\ \ y = e^t$
3. $w = x \operatorname{sen} y$
   $x = e^t,\ \ y = \pi - t$
4. $w = \ln \dfrac{y}{x}$
   $x = \cos t,\ \ y = \operatorname{sen} t$

En los ejercicios 5 a 10, hallar *dw/dt* *a*) utilizando la regla de la cadena apropiada y *b*) convirtiendo *w* en función de *t* antes de derivar.

5. $w = xy,\quad x = e^t,\quad y = e^{-2t}$
6. $w = \cos(x - y),\quad x = t^2,\quad y = 1$
7. $w = x^2 + y^2 + z^2,\quad x = \cos t,\quad y = \operatorname{sen} t,\quad z = e^t$
8. $w = xy \cos z,\quad x = t,\quad y = t^2,\quad z = \arccos t$
9. $w = xy + xz + yz,\quad x = t - 1,\quad y = t^2 - 1,\quad z = t$
10. $w = xy^2 + x^2z + yz^2,\quad x = t^2,\quad y = 2t,\quad z = 2$

Movimiento de un proyectil **En los ejercicios 11 y 12 se dan las ecuaciones paramétricas de las trayectorias de dos proyectiles. ¿A qué velocidad o ritmo cambia la distancia entre los dos objetos en el valor de *t* dado?**

11. $x_1 = 10 \cos 2t,\ \ y_1 = 6 \operatorname{sen} 2t$ Primer objeto.
    $x_2 = 7 \cos t,\ \ y_2 = 4 \operatorname{sen} t$ Segundo objeto.
    $t = \pi/2$
12. $x_1 = 48\sqrt{2}\,t,\ \ y_1 = 48\sqrt{2}\,t - 16t^2$ Primer objeto.
    $x_2 = 48\sqrt{3}\,t,\ \ y_2 = 48t - 16t^2$ Segundo objeto.
    $t = 1$

En los ejercicios 13 y 14, hallar d^2w/dt^2 utilizando la regla de la cadena apropiada. Evaluar d^2w/dt^2 en el valor de *t* dado.

13. $w = \ln(x + y),\quad x = e^t,\quad y = e^{-t},\quad t = 0$
14. $w = \dfrac{x^2}{y},\quad x = t^2,\quad y = t + 1,\quad t = 1$

En los ejercicios 15 a 18, hallar $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$ utilizando la regla de la cadena apropiada y evaluar cada derivada parcial en los valores de *s* y *t* dados.

	Función	*Punto*
15.	$w = x^2 + y^2$; $x = s + t,\quad y = s - t$	$s = 1,\quad t = 0$
16.	$w = y^3 - 3x^2y$; $x = e^s,\quad y = e^t$	$s = -1,\quad t = 2$
17.	$w = \operatorname{sen}(2x + 3y)$; $x = s + t,\quad y = s - t$	$s = 0,\quad t = \dfrac{\pi}{2}$
18.	$w = x^2 - y^2$; $x = s \cos t,\quad y = s \operatorname{sen} t$	$s = 3,\quad t = \dfrac{\pi}{4}$

En los ejercicios 19 a 22, hallar $\partial w/\partial r$ y $\partial w/\partial \theta$ *a*) utilizando la regla de la cadena apropiada y *b*) convirtiendo *w* en una función de *r* y θ antes de derivar

19. $w = \dfrac{yz}{x},\quad x = \theta^2,\quad y = r + \theta,\quad z = r - \theta$
20. $w = x^2 - 2xy + y^2,\quad x = r + \theta,\quad y = r - \theta$
21. $w = \arctan \dfrac{y}{x},\quad x = r \cos \theta,\quad y = r \operatorname{sen} \theta$
22. $w = \sqrt{25 - 5x^2 - 5y^2},\quad x = r \cos \theta,\quad y = r \operatorname{sen} \theta$

En los ejercicios 23 a 26, hallar $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$ utilizando la regla de la cadena apropiada.

23. $w = xyz,\quad x = s + t,\quad y = s - t,\quad z = st^2$
24. $w = x^2 + y^2 + z^2,\quad x = t \operatorname{sen} s,\quad y = t \cos s,\quad z = st^2$
25. $w = ze^{xy},\quad x = s - t,\quad y = s + t,\quad z = st$
26. $w = x \cos yz,\quad x = s^2,\quad y = t^2,\quad z = s - 2t$

En los ejercicios 27 a 30, hallar *dy/dx* por derivación implícita.

27. $x^2 - xy + y^2 - x + y = 0$
28. $\sec xy + \tan xy + 5 = 0$
29. $\ln\sqrt{x^2 + y^2} + x + y = 4$
30. $\dfrac{x}{x^2 + y^2} - y^2 = 6$

En los ejercicios 31 a 38, hallar las primeras derivadas parciales de *z* por derivación implícita.

31. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
32. $xz + yz + xy = 0$
33. $x^2 + 2yz + z^2 = 1$
34. $x + \operatorname{sen}(y + z) = 0$
35. $\tan(x + y) + \tan(y + z) = 1$
36. $z = e^x \operatorname{sen}(y + z)$
37. $e^{xz} + xy = 0$
38. $x \ln y + y^2z + z^2 = 8$

En los ejercicios 39 a 42, hallar las primeras derivadas parciales de *w* por derivación implícita.

39. $xy + yz - wz + wx = 5$
40. $x^2 + y^2 + z^2 - 5yw + 10w^2 = 2$
41. $\cos xy + \operatorname{sen} yz + wz = 20$
42. $w - \sqrt{x - y} - \sqrt{y - z} = 0$

Funciones homogéneas **Una función *f* es *homogénea de grado n* si $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$. En los ejercicios 43 a 46, *a*) mostrar que la función es homogénea y determinar *n*, y *b*) mostrar que $xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = nf(x, y)$.**

43. $f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
44. $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y^3$
45. $f(x, y) = e^{x/y}$
46. $f(x, y) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

47. Sean $w = f(x, y)$, $x = g(t)$ y $y = h(t)$, donde f, g y h son diferenciables. Usar la regla de la cadena apropiada para encontrar dw/dt cuando $t = 2$ dada la siguiente tabla de valores.

$g(2)$	$h(2)$	$g'(2)$	$h'(2)$	$f_x(4, 3)$	$f_y(4, 3)$
4	3	−1	6	−5	7

48. Sean $w = f(x, y)$, $x = g(s, t)$ y $y = h(t)$, donde f, g y h son diferenciables. Usar la regla de la cadena apropiada para encontrar $w_s(1, 2)$ y $w_t(1, 2)$ dada la siguiente tabla de valores.

$g(1, 2)$	$h(1, 2)$	$g_s(1, 2)$	$h_s(1, 2)$
4	3	−3	5

$g_t(1, 2)$	$h_t(1, 2)$	$f_x(4, 3)$	$f_y(4, 3)$
−2	8	−5	7

Desarrollo de conceptos

49. Sea $w = f(x, y)$ una función donde x y y son funciones de una sola variable t. Dar la regla de la cadena para hallar dw/dt.

50. Sea $w = f(x, y)$ una función donde x y y son funciones de dos variables s y t. Dar la regla de la cadena para hallar $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$.

51. Si $f(x, y) = 0$, dar la regla para hallar dy/dx implícitamente. Si $f(x, y, z) = 0$, dar la regla para hallar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ implícitamente.

Para discusión

52. Considerar la función $f(x, y, z) = xyz$, donde $x = t^2$, $y = 2t$, $z = e^{-t}$.

a) Usar la regla de la cadena apropiada para encontrar df/dt.

b) Escribir f como una función de t y entonces encontrar df/dt. Explicar por qué este resultado es el mismo que el del inciso *a*).

53. ***Volumen y área superficial*** El radio de un cilindro circular recto se incrementa a razón de 6 pulgadas por minuto, y la altura decrece a razón de 4 pulgadas por minuto. ¿Cuál es la razón de cambio del volumen y del área superficial cuando el radio es 12 pulgadas y la altura 36 pulgadas?

54. ***Volumen y área superficial*** Repetir el ejercicio 53 con un cono circular.

55. ***Ley de los gases ideales*** Según la ley de los gases ideales $pV = mRT$, donde R es una constante, m es una masa constante y p y V son funciones del tiempo. Hallar dT/dt, la velocidad o el ritmo de cambio de la temperatura con respecto al tiempo.

56. ***Área*** Sea θ el ángulo entre los lados iguales de un triángulo isósceles y sea x la longitud de estos lados. Si x se incrementa a razón de $\frac{1}{2}$ metro por hora y θ se incrementa a razón de $\pi/90$ radianes por hora, hallar la tasa de incremento del área cuando $x = 6$ y $\theta = \pi/4$.

57. ***Momento de inercia*** Un cilindro anular tiene un radio interior de r_1 y un radio exterior de r_2 (ver la figura). Su momento de inercia es $I = \frac{1}{2}m(r_1^2 + r_2^2)$ donde m es la masa. Los dos radios se incrementan a razón de 2 centímetros por segundo. Hallar la velocidad al que varía I en el instante en que los radios son 6 y 8 centímetros. (Suponer que la masa es constante.)

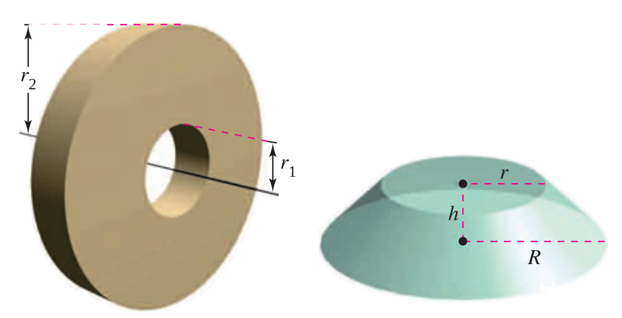


Figura para 57 **Figura para 58**

58. ***Volumen y área superficial*** Los dos radios del tronco de un cono circular recto se incrementan a razón de 4 centímetros por minuto y la altura se incrementa a razón de 12 centímetros por minuto (ver la figura). Hallar a qué velocidad cambian el volumen y el área superficial cuando los radios son 15 y 25 centímetros, respectivamente, y la altura es de 10 centímetros.

59. Mostrar que $(\partial w/\partial u) + (\partial w/\partial v) = 0$ para $w = f(x, y)$, $x = u - v$ y $y = v - u$.

60. Verificar el resultado del ejercicio 59 con

$w = (x - y)\operatorname{sen}(y - x)$.

61. Considerar la función $w = f(x, y)$, en la que $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$. Demostrar:

a) $$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial r}\operatorname{sen}\theta + \frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}$$

b) $$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2$$

62. Verificar el resultado del ejercicio 61*b* con $w = \arctan(y/x)$.

63. ***Ecuaciones de Cauchy-Riemann*** Dadas las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$, verificar que las **ecuaciones diferenciales Cauchy-Riemann**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

pueden escribirse en coordenadas polares como

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

64. Verificar el resultado del ejercicio 63 con las funciones

$$u = \ln\sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad v = \arctan\frac{y}{x}.$$

65. Demostrar que si $f(x, y)$ es homogénea de grado n, entonces

$$xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = nf(x, y).$$

[*Sugerencia:* Sea $g(t) = f(tx, ty) = t^n f(x, y)$. Hallar $g'(t)$ y después hacer $t = 1$.]

13.6 Derivadas direccionales y gradientes

- Hallar y usar las derivadas direccionales de una función de dos variables.
- Hallar el gradiente de una función de dos variables.
- Utilizar el gradiente de una función de dos variables en aplicaciones.
- Hallar las derivadas direccionales y el gradiente de funciones de tres variables.

Derivada direccional

Suponer que se está en la colina de la figura 13.42 y se quiere determinar la inclinación de la colina respecto al eje z. Si la colina está representada por $z = f(x, y)$, se sabe cómo determinar la pendiente en dos direcciones diferentes: la pendiente en la dirección de y está dada por la derivada parcial $f_y(x, y)$, y la pendiente en la dirección de x está dada por la derivada parcial $f_x(x, y)$. En esta sección se verá que estas dos derivadas parciales pueden usarse para calcular la pendiente en *cualquier* dirección.

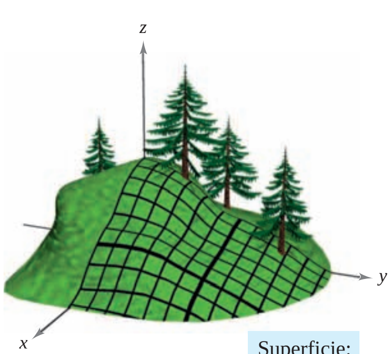
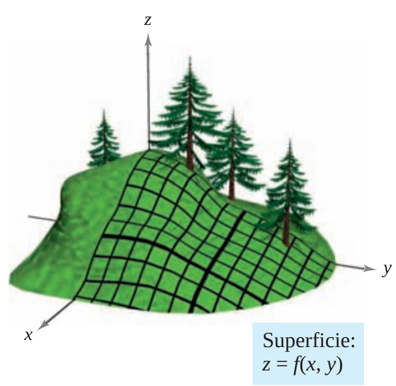



Figura 13.42

Para determinar la pendiente en un punto de una superficie, se definirá un nuevo tipo de derivada llamada **derivada direccional**. Sea $z = f(x, y)$ una *superficie* y $P(x_0, y_0)$ un *punto* en el dominio de f, como se muestra en la figura 13.43. La "dirección" de la derivada direccional está dada por un vector unitario

$$\mathbf{u} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$$

donde θ es el ángulo que forma el vector con el eje x positivo. Para hallar la pendiente deseada, se reduce el problema a dos dimensiones cortando la superficie con un plano vertical que pasa por el punto P y es paralelo a $\mathbf{u}$, como se muestra en la figura 13.44. Este plano vertical corta la superficie formando una curva C. La pendiente de la superficie en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ en la dirección de $\mathbf{u}$ se define como la pendiente de la curva C en ese punto.

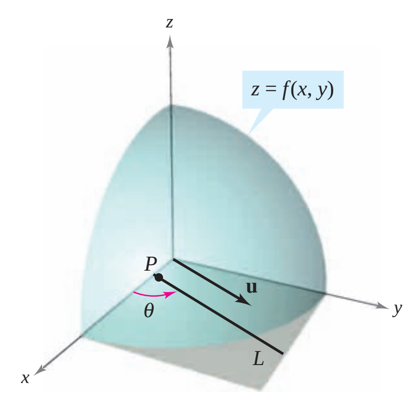


Figura 13.43

De manera informal, se puede expresar la pendiente de la curva C como un límite análogo a los usados en el cálculo de una variable. El plano vertical utilizado para formar C corta el plano xy en una recta L, representada por las ecuaciones paramétricas,

$$x = x_0 + t\cos\theta$$

y

$$y = y_0 + t\operatorname{sen}\theta$$

de manera que para todo valor de t, el punto $Q(x, y)$ se encuentra en la recta L. Para cada uno de los puntos P y Q, hay un punto correspondiente en la superficie.

$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ — Punto sobre P.

$(x, y, f(x, y))$ — Punto sobre Q.

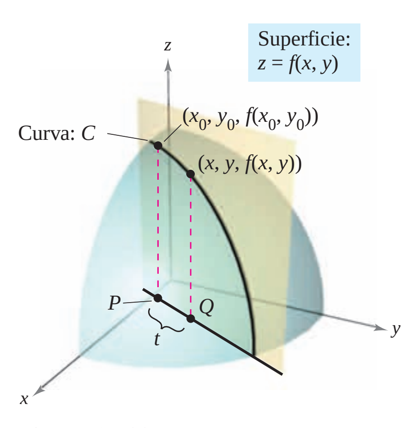


Figura 13.44

Como la distancia entre P y Q es

$$\begin{aligned}\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} &= \sqrt{(t\cos\theta)^2 + (t\operatorname{sen}\theta)^2}\\ &= |t|\end{aligned}$$

se puede escribir la pendiente de la recta secante que pasa por $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ y $(x, y, f(x, y))$ como

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{f(x_0 + t\cos\theta, y_0 + t\operatorname{sen}\theta) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Por último, haciendo que t se aproxime a 0, se llega a la definición siguiente.

DEFINICIÓN DE LA DERIVADA DIRECCIONAL

Sea f una función de dos variables x y y, y sea $\mathbf{u} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$ un vector unitario. Entonces la **derivada direccional de f en la dirección de u**, que se denota $D_{\mathbf{u}} f$, es

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta) - f(x, y)}{t}$$

siempre que este límite exista.

Calcular derivadas direccionales empleando esta definición es lo mismo que encontrar la derivada de una función de una variable empleando el proceso del límite (sección 2.1). Una fórmula "de trabajo" más simple para hallar derivadas direccionales emplea las derivadas parciales f_x y f_y.

TEOREMA 13.9 DERIVADA DIRECCIONAL

Si f es una función diferenciable de x y y, entonces la derivada direccional de f en la dirección del vector unitario $\mathbf{u} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$ es

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\operatorname{sen}\theta.$$

DEMOSTRACIÓN Dado un punto fijado (x_0, y_0), sea $x = x_0 + t\cos\theta$ y sea $y = y_0 + t\operatorname{sen}\theta$. Ahora, se hace $g(t) = f(x, y)$. Como f es diferenciable, se puede aplicar la regla de la cadena del teorema 13.6 para obtener

$$g'(t) = f_x(x, y)x'(t) + f_y(x, y)y'(t) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\operatorname{sen}\theta.$$

Si $t = 0$, entonces $x = x_0$ y $y = y_0$, por tanto

$$g'(0) = f_x(x_0, y_0)\cos\theta + f_y(x_0, y_0)\operatorname{sen}\theta.$$

De acuerdo con la definición de $g'(t)$, también es verdad que

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t\cos\theta, y_0 + t\operatorname{sen}\theta) - f(x_0, y_0)}{t}. \end{aligned}$$

Por consiguiente, $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\cos\theta + f_y(x_0, y_0)\operatorname{sen}\theta.$

Hay una cantidad infinita de derivadas direccionales en un punto dado de una superficie, una para cada dirección especificada por **u**, como se muestra en la figura 13.45. Dos de éstas son las derivadas parciales f_x y f_y.

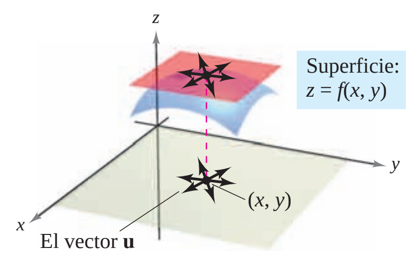


Figura 13.45

1. En la dirección del eje x positivo ($\theta = 0$): $\mathbf{u} = \cos 0\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} 0\,\mathbf{j} = \mathbf{i}$

$$D_{\mathbf{i}} f(x, y) = f_x(x, y)\cos 0 + f_y(x, y)\operatorname{sen} 0 = f_x(x, y)$$

2. En la dirección del eje y positivo ($\theta = \pi/2$): $\mathbf{u} = \cos\frac{\pi}{2}\mathbf{i} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\mathbf{j} = \mathbf{j}$

$$D_{\mathbf{j}} f(x, y) = f_x(x, y)\cos\frac{\pi}{2} + f_y(x, y)\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = f_y(x, y)$$

EJEMPLO 1 Hallar una derivada direccional

Hallar la derivada direccional de

$$f(x, y) = 4 - x^2 - \tfrac{1}{4}y^2 \qquad \text{Superficie.}$$

en (1, 2) en la dirección de

$$\mathbf{u} = \left(\cos\frac{\pi}{3}\right)\mathbf{i} + \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)\mathbf{j}. \qquad \text{Dirección.}$$

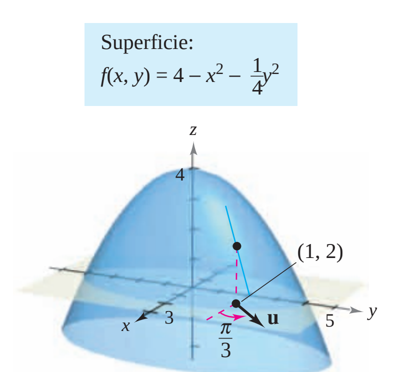


Figura 13.46

Solución Como f_x y f_y son continuas, f es diferenciable, y se puede aplicar el teorema 13.9.

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(x, y) &= f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\operatorname{sen}\theta \\ &= (-2x)\cos\theta + \left(-\frac{y}{2}\right)\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

Evaluando en $\theta = \pi/3$, $x = 1$ y $y = 2$ se obtiene

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(1, 2) &= (-2)\left(\frac{1}{2}\right) + (-1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\approx -1.866. \end{aligned} \qquad \text{Ver la figura 13.46.}$$

NOTA La figura 13.46 muestra que la derivada direccional se puede interpretar como la pendiente de la superficie en el punto (1, 2, 2) en la dirección del vector unitario **u**. ■

Se ha especificado la dirección por medio de un vector unitario **u**. Si la dirección está dada por un vector cuya longitud no es 1, se debe normalizar el vector antes de aplicar la fórmula del teorema 13.9.

EJEMPLO 2 Hallar una derivada direccional

Hallar la derivada direccional de

$$f(x, y) = x^2 \operatorname{sen} 2y \qquad \text{Superficie.}$$

en $(1, \pi/2)$ en la dirección de

$$\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}. \qquad \text{Dirección.}$$

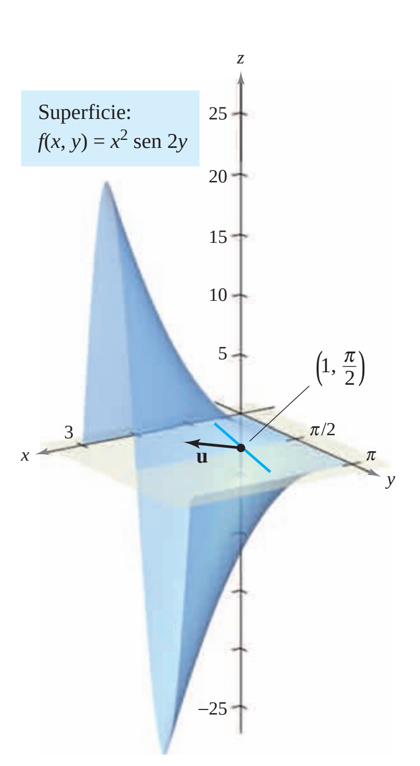


Figura 13.47

Solución Como f_x y f_y son continuas, f es diferenciable, y se puede aplicar el teorema 13.9. Se comienza por calcular un vector unitario en la dirección de **v**.

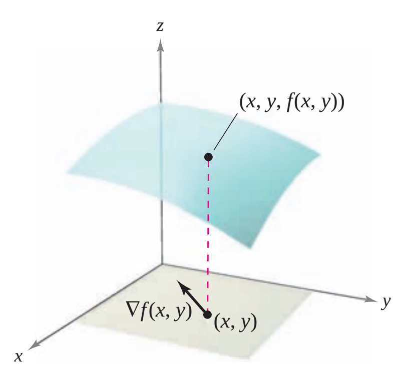
$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$$

Usando este vector unitario, se tiene

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(x, y) &= (2x\operatorname{sen} 2y)(\cos\theta) + (2x^2\cos 2y)(\operatorname{sen}\theta) \\ D_{\mathbf{u}} f\left(1, \frac{\pi}{2}\right) &= (2\operatorname{sen}\pi)\left(\frac{3}{5}\right) + (2\cos\pi)\left(-\frac{4}{5}\right) \\ &= (0)\left(\frac{3}{5}\right) + (-2)\left(-\frac{4}{5}\right) \\ &= \frac{8}{5}. \end{aligned} \qquad \text{Ver la figura 13.47.}$$

El gradiente de una función de dos variables

El **gradiente** de una función de dos variables es una función vectorial de dos variables. Esta función tiene múltiples aplicaciones importantes, algunas de las cuales se describen más adelante en esta misma sección.



El gradiente de f es un vector en el plano xy
Figura 13.48

DEFINICIÓN DE GRADIENTE DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

Sea $z = f(x, y)$ una función de x y y tal que f_x y f_y existen. Entonces el **gradiente de *f***, denotado por $\nabla f(x, y)$, es el vector

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}.$$

∇f se lee como "nabla f". Otra notación para el gradiente es **grad** $f(x, y)$. En la figura 13.48 hay que observar que para cada (x, y), el gradiente $\nabla f(x, y)$ es un vector en el plano (no un vector en el espacio).

NOTA El símbolo ∇ no tiene ningún valor. Es un operador de la misma manera que d/dx es un operador. Cuando ∇ opera sobre $f(x, y)$, produce el vector $\nabla f(x, y)$. ■

EJEMPLO 3 Hallar el gradiente de una función

Hallar el gradiente de $f(x, y) = y \ln x + xy^2$ en el punto $(1, 2)$.

Solución Utilizando

$$f_x(x, y) = \frac{y}{x} + y^2 \qquad \text{y} \qquad f_y(x, y) = \ln x + 2xy$$

se tiene

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{y}{x} + y^2\right)\mathbf{i} + (\ln x + 2xy)\mathbf{j}.$$

En el punto $(1, 2)$, el gradiente es

$$\begin{aligned}\nabla f(1, 2) &= \left(\frac{2}{1} + 2^2\right)\mathbf{i} + [\ln 1 + 2(1)(2)]\mathbf{j}\\ &= 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Como el gradiente de f es un vector, se puede expresar la derivada direccional de f en la dirección de $\mathbf{u}$ como

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = [f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}] \cdot [\cos\theta\mathbf{i} + \text{sen}\,\theta\mathbf{j}].$$

En otras palabras, la derivada direccional es el producto escalar del gradiente y el vector dirección. Este útil resultado se resume en el teorema siguiente.

TEOREMA 13.10 FORMA ALTERNATIVA DE LA DERIVADA DIRECCIONAL

Si f es una función diferenciable de x y y, entonces la derivada direccional de f en la dirección del vector unitario $\mathbf{u}$ es

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}.$$

EJEMPLO 4 Hallar una derivada direccional usando $\nabla f(x, y)$

Hallar la derivada direccional de

$$f(x, y) = 3x^2 - 2y^2$$

en $\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$, en la dirección de $P\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$ a $Q(0, 1)$.

Solución Como las derivadas de f son continuas, f es diferenciable y se puede aplicar el teorema 13.10. Un vector en la dirección especificada es

$$\overrightarrow{PQ} = \mathbf{v} = \left(0 + \frac{3}{4}\right)\mathbf{i} + (1 - 0)\mathbf{j}$$

$$= \frac{3}{4}\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

y un vector unitario en esta dirección es

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}. \qquad \text{Vector unitario en la dirección de } \overrightarrow{PQ}.$$

Como $\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} = 6x\mathbf{i} - 4y\mathbf{j}$, el gradiente en $\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$ es

$$\nabla f\left(-\frac{3}{4}, 0\right) = -\frac{9}{2}\mathbf{i} + 0\mathbf{j}. \qquad \text{Gradiente en } \left(-\tfrac{3}{4}, 0\right).$$

Por consiguiente, en $\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$ la derivada direccional es

$$D_{\mathbf{u}} f\left(-\frac{3}{4}, 0\right) = \nabla f\left(-\frac{3}{4}, 0\right) \cdot \mathbf{u}$$

$$= \left(-\frac{9}{2}\mathbf{i} + 0\mathbf{j}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}\right)$$

$$= -\frac{27}{10}. \qquad \text{Derivada direccional en } \left(-\tfrac{3}{4}, 0\right).$$

Ver la figura 13.49.

Superficie:
$f(x, y) = 3x^2 - 2y^2$

Figura 13.49

Aplicaciones del gradiente

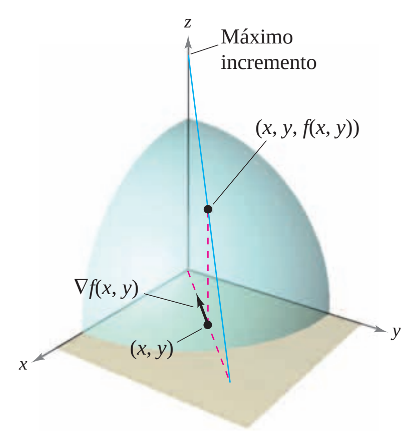
Se ha visto ya que hay muchas derivadas direccionales en un punto (x, y) de una superficie. En muchas aplicaciones, se desea saber en qué dirección moverse de manera que $f(x, y)$ crezca más rápidamente. Esta dirección se llama la dirección de mayor ascenso, y viene dada por el gradiente, como se establece en el teorema siguiente.

NOTA La parte 2 del teorema 13.11 dice que en el punto (x, y), f crece más rápidamente en dirección del gradiente, $\nabla f(x, y)$.

TEOREMA 13.11 PROPIEDADES DEL GRADIENTE

Sea f diferenciable en el punto (x, y).

1. Si $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$, entonces $D_{\mathbf{u}} f(x, y) = 0$ para todo $\mathbf{u}$.
2. La dirección de *máximo* incremento de f está dada por $\nabla f(x, y)$. El valor máximo de $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ es $\|\nabla f(x, y)\|$.
3. La dirección de *mínimo* incremento de f está dada por $-\nabla f(x, y)$. El valor mínimo de $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ es $-\|\nabla f(x, y)\|$.



El gradiente de f es un vector en el plano xy que apunta en dirección del máximo incremento sobre la superficie dada por $z = f(x, y)$
Figura 13.50

DEMOSTRACIÓN Si $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$, entonces en cualquier dirección (con cualquier $\mathbf{u}$), se tiene

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(x, y) &= \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u} \\ &= (0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}) \cdot (\cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Si $\nabla f(x, y) \neq \mathbf{0}$, sea ϕ el ángulo entre $\nabla f(x, y)$ y un vector unitario $\mathbf{u}$. Usando el producto escalar se puede aplicar el teorema 11.5 para concluir que

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(x, y) &= \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u} \\ &= \|\nabla f(x, y)\| \|\mathbf{u}\| \cos\phi \\ &= \|\nabla f(x, y)\| \cos\phi \end{aligned}$$

y se sigue que el valor máximo de $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ se presentará cuando $\cos\phi = 1$. Por tanto, $\phi = 0$, y el valor máximo de la derivada direccional se tiene cuando $\mathbf{u}$ tiene la misma dirección que $\nabla f(x, y)$. Este valor máximo de $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ es precisamente

$$\|\nabla f(x, y)\| \cos\phi = \|\nabla f(x, y)\|.$$

De igual forma, el valor mínimo de $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ puede obtenerse haciendo $\phi = \pi$ de manera que $\mathbf{u}$ apunte en dirección opuesta a $\nabla f(x, y)$, como se muestra en la figura 13.50.

Para visualizar una de las propiedades del gradiente, imaginar a un esquiador que desciende por una montaña. Si $f(x, y)$ denota la altitud a la que se encuentra el esquiador, entonces $-\nabla f(x, y)$ indica la *dirección de acuerdo con la brújula* que debe tomar el esquiador para seguir el camino de descenso más rápido. (Recuérdese que el gradiente indica una dirección en el plano xy y no apunta hacia arriba ni hacia abajo de la ladera de la montaña.)

Otra ilustración del gradiente es la temperatura $T(x, y)$ en cualquier punto (x, y) de una placa metálica plana. En este caso, $\nabla T(x, y)$ da la dirección de máximo aumento de temperatura en el punto (x, y), como se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 5 Hallar la dirección de máximo incremento

La temperatura en grados Celsius en la superficie de una placa metálica es

$$T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2$$

donde x y y se miden en centímetros. ¿En qué dirección a partir de $(2, -3)$ aumenta más rápido la temperatura? ¿Cuál es la tasa o ritmo de crecimiento?

Solución El gradiente es

$$\begin{aligned} \nabla T(x, y) &= T_x(x, y)\mathbf{i} + T_y(x, y)\mathbf{j} \\ &= -8x\,\mathbf{i} - 2y\,\mathbf{j}. \end{aligned}$$

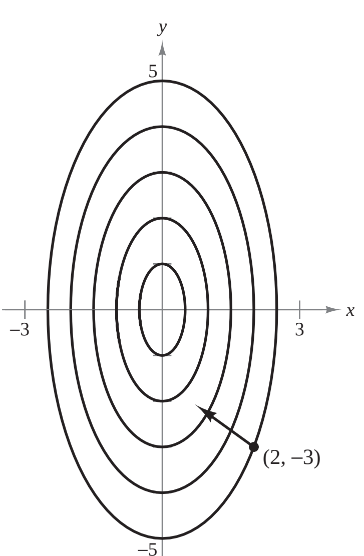
Se sigue que la dirección de máximo incremento está dada por

$$\nabla T(2, -3) = -16\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$$

como se muestra en la figura 13.51, y la tasa de incremento es

$$\begin{aligned} \|\nabla T(2, -3)\| &= \sqrt{256 + 36} \\ &= \sqrt{292} \\ &\approx 17.09° \text{ por centímetro.} \end{aligned}$$

Curvas de nivel:
$T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2$



La dirección del máximo incremento de la temperatura en $(2, -3)$ está dada por $-16\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$
Figura 13.51

La solución del ejemplo 5 puede entenderse erróneamente. Aunque el gradiente apunta en la dirección de máximo incremento de la temperatura, no necesariamente apunta hacia el punto más caliente de la placa. En otras palabras, el gradiente proporciona una solución local para encontrar un incremento relativo de la temperatura en el punto $(2, -3)$. *Una vez que se abandona esa posición, la dirección de máximo incremento puede cambiar.*

EJEMPLO 6 Hallar la trayectoria de un rastreador térmico

Un rastreador térmico se encuentra en el punto $(2, -3)$ sobre una placa metálica cuya temperatura en (x, y) es

$$T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2.$$

Hallar la trayectoria del rastreador, si éste se mueve continuamente en dirección de máximo incremento de temperatura.

Solución Represéntese la trayectoria por la función de posición

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}.$$

Un vector tangente en cada punto $(x(t), y(t))$ está dado por

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j}.$$

Como el rastreador busca el máximo incremento de temperatura, las direcciones de $\mathbf{r}'(t)$ y $\nabla T(x, y) = -8x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}$ son iguales en todo punto de la trayectoria. Así,

$$-8x = k\frac{dx}{dt} \quad \text{y} \quad -2y = k\frac{dy}{dt}$$

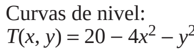
donde k depende de t. Despejando en cada ecuación dt/k e igualando los resultados, se obtiene

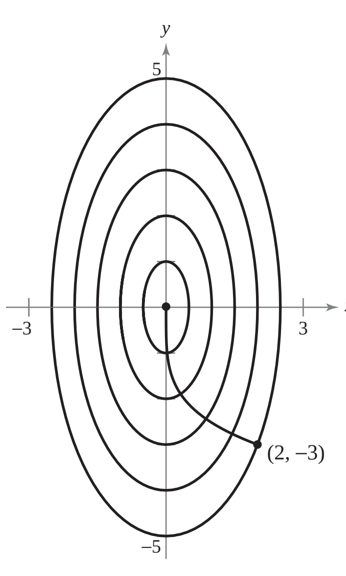
$$\frac{dx}{-8x} = \frac{dy}{-2y}.$$

La solución de esta ecuación diferencial es $x = Cy^4$. Como el rastreador comienza en el punto $(2, -3)$, se puede determinar que $C = 2/81$. Por tanto, la trayectoria del rastreador del calor es

$$x = \frac{2}{81}y^4.$$

La trayectoria se muestra en la figura 13.52.





Trayectoria seguida por un rastreador térmico
Figura 13.52

En la figura 13.52, la trayectoria del rastreador (determinada por el gradiente en cada punto) parece ser ortogonal a cada una de las curvas de nivel. Esto resulta claro cuando se considera que la temperatura $T(x, y)$ es constante en cada una de las curvas de nivel. Así, en cualquier punto (x, y) sobre la curva, la velocidad o razón de cambio de T en dirección de un vector unitario tangente $\mathbf{u}$ es 0, y se puede escribir

$$\nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u} = D_{\mathbf{u}}T(x, y) = 0.$$ $\mathbf{u}$ es un vector unitario tangente.

Puesto que el producto escalar de $\nabla f(x, y)$ y $\mathbf{u}$ es 0, se puede concluir que deben ser ortogonales. Este resultado se establece en el teorema siguiente.

TEOREMA 13.12 EL GRADIENTE ES NORMAL A LAS CURVAS DE NIVEL

Si f es diferenciable en (x_0, y_0) y $\nabla f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, entonces $\nabla f(x_0, y_0)$ es normal (ortogonal) a la curva de nivel que pasa por (x_0, y_0).

EJEMPLO 7 Hallar un vector normal a una curva de nivel

Dibujar la curva de nivel que corresponde a $c = 0$ para la función dada por

$$f(x, y) = y - \operatorname{sen} x$$

y hallar un vector normal a varios puntos de la curva.

Solución La curva de nivel para $c = 0$ está dada por

$$0 = y - \operatorname{sen} x$$
$$y = \operatorname{sen} x$$

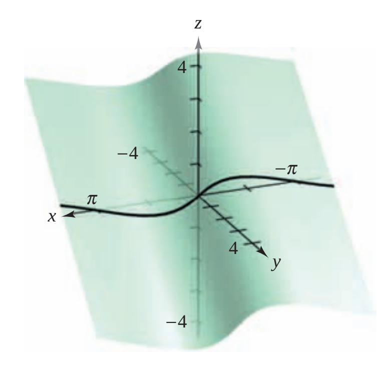
como se muestra en la figura 13.53*a*. Como el vector gradiente de f en (x, y) es

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}$$
$$= -\cos x\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

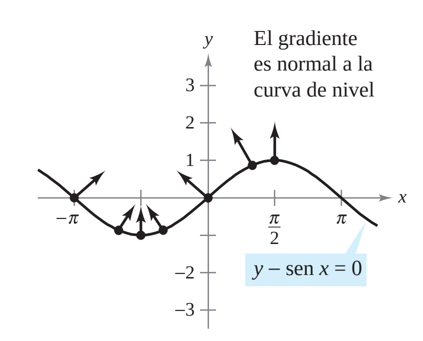
se puede utilizar el teorema 13.12 para concluir que $\nabla f(x, y)$ es normal a la curva de nivel en el punto (x, y). Algunos vectores gradiente son

$$\nabla f(-\pi, 0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$$
$$\nabla f\left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j}$$
$$\nabla f\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right) = \mathbf{j}$$
$$\nabla f\left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j}$$
$$\nabla f(0, 0) = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$$
$$\nabla f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j}$$
$$\nabla f\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = \mathbf{j}.$$

Estos vectores se muestran en la figura 13.53*b*.



a) La superficie está dada por $f(x, y) = y - \operatorname{sen} x$



b) La curva de nivel está dada por $f(x, y) = 0$.

Figura 13.53

Funciones de tres variables

Las definiciones de derivada direccional y gradiente se pueden extender de manera natural a funciones de tres o más variables. Como a menudo pasa, algo de la interpretación geométrica se pierde al generalizar funciones de dos variables a funciones de tres variables. Por ejemplo, no se puede interpretar la derivada direccional de una función de tres variables como una pendiente.

Las definiciones y propiedades de la derivada direccional y del gradiente de una función de tres variables se dan en el resumen siguiente.

DERIVADA DIRECCIONAL Y GRADIENTE PARA FUNCIONES DE TRES VARIABLES

Sea f una función de x, y y z, con derivadas parciales de primer orden continuas. La **derivada direccional de *f*** en dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ está dada por

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) = af_x(x, y, z) + bf_y(x, y, z) + cf_z(x, y, z).$$

El **gradiente de *f*** se define como

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Las propiedades del gradiente son:

1. $D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{u}$

2. Si $\nabla f(x, y, z) = \mathbf{0}$, entonces $D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) = 0$ para toda $\mathbf{u}$.

3. La dirección de *máximo* incremento de f está dada por $\nabla f(x, y, z)$. El valor máximo de $D_{\mathbf{u}} f(x, y, z)$ es

$$\|\nabla f(x, y, z)\|.$$ Valor máximo de $D_{\mathbf{u}} f(x, y, z)$.

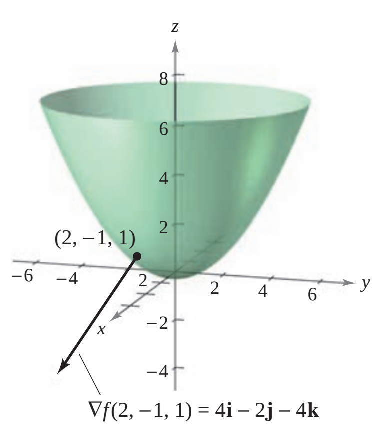
4. La dirección de *mínimo* incremento de f está dada por $-\nabla f(x, y, z)$. El valor mínimo de $D_{\mathbf{u}} f(x, y, z)$ es

$$-\|\nabla f(x, y, z)\|.$$ Valor mínimo de $D_{\mathbf{u}} f(x, y, z)$.

NOTA El teorema 13.12 se puede generalizar a funciones de tres variables. Bajo las hipótesis adecuadas,

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0)$$

es normal a la superficie de nivel a través de (x_0, y_0, z_0). ■



Superficie de nivel y vector gradiente en $(2, -1, 1)$ para $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4z$
Figura 13.54

EJEMPLO 8 Hallar el gradiente para una función de tres variables

Hallar $\nabla f(x, y, z)$ para la función dada por

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4z$$

y hallar la dirección de máximo incremento de f en el punto $(2, -1, 1)$.

Solución El vector gradiente está dado por

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k} \\ &= 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} - 4\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Por tanto, la dirección de máximo incremento en $(2, -1, 1)$ es

$$\nabla f(2, -1, 1) = 4\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} - 4\,\mathbf{k}.$$ Ver la figura 13.54.

13.6 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 12, hallar la derivada direccional de la función en *P* en dirección de v.

1. $f(x, y) = 3x - 4xy + 9y, \quad P(1, 2), \mathbf{v} = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$
2. $f(x, y) = x^3 - y^3, \quad P(4, 3), \mathbf{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$
3. $f(x, y) = xy, \quad P(0, -2), \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j})$
4. $f(x, y) = \frac{x}{y}, \quad P(1, 1), \mathbf{v} = -\mathbf{j}$
5. $h(x, y) = e^x \operatorname{sen} y, \quad P\left(1, \frac{\pi}{2}\right), \mathbf{v} = -\mathbf{i}$
6. $g(x, y) = \arccos xy, \quad P(1, 0), \mathbf{v} = \mathbf{j}$
7. $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad P(3, 4), \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$
8. $h(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}, \quad P(0, 0), \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$
9. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad P(1, 1, 1), \mathbf{v} = \frac{\sqrt{3}}{3}(\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$
10. $f(x, y, z) = xy + yz + xz, \quad P(1, 2, -1), \mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$
11. $h(x, y, z) = xyz, \quad P(2, 1, 1), \mathbf{v} = \langle 2, 1, 2\rangle$
12. $h(x, y, z) = x \arctan yz, \quad P(4, 1, 1), \mathbf{v} = \langle 1, 2, -1\rangle$

En los ejercicios 13 a 16, hallar la derivada direccional de la función en dirección de $\mathbf{u} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$.

13. $f(x, y) = x^2 + y^2, \quad \theta = \frac{\pi}{4}$
14. $f(x, y) = \frac{y}{x + y}, \quad \theta = -\frac{\pi}{6}$
15. $f(x, y) = \operatorname{sen}(2x + y), \quad \theta = \frac{\pi}{3}$
16. $g(x, y) = xe^y, \quad \theta = \frac{2\pi}{3}$

En los ejercicios 17 a 20, hallar la derivada direccional de la función en *P* en dirección de *Q*.

17. $f(x, y) = x^2 + 3y^2, \quad P(1, 1), Q(4, 5)$
18. $f(x, y) = \cos(x + y), \quad P(0, \pi), Q\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$
19. $g(x, y, z) = xye^z, \quad P(2, 4, 0), Q(0, 0, 0)$
20. $h(x, y, z) = \ln(x + y + z), \quad P(1, 0, 0), Q(4, 3, 1)$

En los ejercicios 21 a 26, hallar el gradiente de la función en el punto dado.

21. $f(x, y) = 3x + 5y^2 + 1, \quad (2, 1)$
22. $g(x, y) = 2xe^{y/x}, \quad (2, 0)$
23. $z = \ln(x^2 - y), \quad (2, 3)$
24. $z = \cos(x^2 + y^2), \quad (3, -4)$
25. $w = 3x^2 - 5y^2 + 2z^2, \quad (1, 1, -2)$
26. $w = x \tan(y + z), \quad (4, 3, -1)$

En los ejercicios 27 a 30, utilizar el gradiente para hallar la derivada direccional de la función en *P* en la dirección de *Q*.

27. $g(x, y) = x^2 + y^2 + 1, \quad P(1, 2), \ Q(2, 3)$
28. $f(x, y) = 3x^2 - y^2 + 4, \quad P(-1, 4), \ Q(3, 6)$
29. $f(x, y) = e^y \operatorname{sen} x, \quad P(0, 0), \ Q(2, 1)$
30. $f(x, y) = \operatorname{sen} 2x \cos y, \quad P(\pi, 0), \ Q\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

En los ejercicios 31 a 40, hallar el gradiente de la función y el valor máximo de la derivada direccional en el punto dado.

	Función	*Punto*
31.	$f(x, y) = x^2 + 2xy$	$(1, 0)$
32.	$f(x, y) = \frac{x + y}{y + 1}$	$(0, 1)$
33.	$h(x, y) = x \tan y$	$\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$
34.	$h(x, y) = y \cos(x - y)$	$\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$
35.	$g(x, y) = ye^{-x}$	$(0, 5)$
36.	$g(x, y) = \ln \sqrt[3]{x^2 + y^2}$	$(1, 2)$
37.	$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$(1, 4, 2)$
38.	$w = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}}$	$(0, 0, 0)$
39.	$w = xy^2z^2$	$(2, 1, 1)$
40.	$f(x, y, z) = xe^{yz}$	$(2, 0, -4)$

En los ejercicios 41 a 46, utilizar la función $f(x, y) = 3 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2}$.

41. Dibujar la gráfica de f en el primer octante y marcar el punto $(3, 2, 1)$ sobre la superficie.
42. Hallar $D_{\mathbf{u}} f(3, 2)$, donde $\mathbf{u} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$, usando cada valor dado de θ.

    a) $\theta = \frac{\pi}{4}$ *b)* $\theta = \frac{2\pi}{3}$

    c) $\theta = \frac{4\pi}{3}$ *d)* $\theta = -\frac{\pi}{6}$

43. Hallar $D_{\mathbf{u}} f(3, 2)$, donde $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$, usando cada vector **v** dado.

    a) $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

    b) $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

    c) **v** es el vector que va de $(1, 2)$ a $(-2, 6)$.

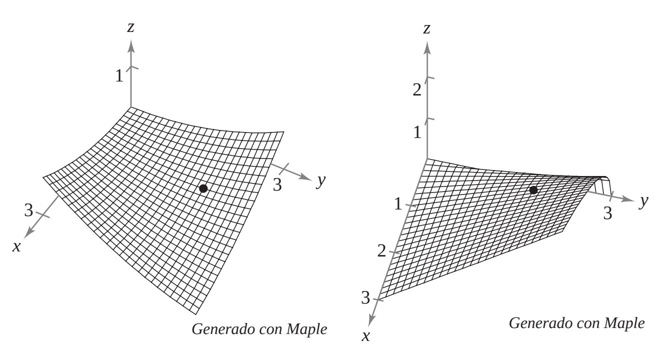
    d) **v** es el vector que va de $(3, 2)$ a $(4, 5)$.

44. Hallar $\nabla f(x, y)$.
45. Hallar el valor máximo de la derivada direccional en $(3, 2)$.
46. Hallar un vector unitario de **u** ortogonal a $\nabla f(3, 2)$ y calcular $D_{\mathbf{u}} f(3, 2)$. Analizar el significado geométrico del resultado.

Investigación **En los ejercicios 47 y 48, *a*) utilizar la gráfica para estimar las componentes del vector en la dirección de la tasa máxima de incremento en la función en el punto dado. *b*) Hallar el gradiente en el punto y compararlo con el estimado del inciso *a*). *c*) ¿En qué dirección decrece más rápido la función? Explicar.**

47. $f(x, y) = \frac{1}{10}(x^2 - 3xy + y^2)$, $(1, 2)$

48. $f(x, y) = \frac{1}{2}y\sqrt{x}$, $(1, 2)$



CAS **49. *Investigación*** Considerar la función

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

en el punto $(4, -3, 7)$.

a) Utilizar un sistema algebraico por computadora para dibujar la superficie dada por esa función.

b) Determinar la derivada direccional $D_{\mathbf{u}} f(4, -3)$ como función de θ, donde $\mathbf{u} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$. Utilizar un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente la función en el intervalo $[0, 2\pi)$.

c) Aproximar los ceros de la función del inciso *b*) e interpretar cada uno en el contexto del problema.

d) Aproximar los números críticos de la función del inciso *b*) e interpretar cada uno en el contexto del problema.

e) Hallar $\|\nabla f(4, -3)\|$ y explicar su relación con las respuestas del inciso *d*).

f) Utilizar un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente la curva de nivel de la función f en el nivel $c = 7$. En esta curva, representar gráficamente el vector en la dirección de $\nabla f(4, -3)$, y establecer su relación con la curva de nivel.

50. *Investigación* Considerar la función

$$f(x, y) = \frac{8y}{1 + x^2 + y^2}$$

a) Verificar analíticamente que la curva de nivel de $f(x, y)$ para el nivel $c = 2$ es un círculo.

b) En el punto $(\sqrt{3}, 2)$ sobre la curva de nivel para la cual $c = 2$, dibujar el vector que apunta en dirección de la mayor tasa o ritmo de incremento de la función.

c) En el punto $(\sqrt{3}, 2)$ sobre la curva de nivel, dibujar el vector cuya derivada direccional sea 0.

CAS *d*) Utilizar un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente la superficie y verificar las respuestas a los incisos *a*) a *c*).

En los ejercicios 51 a 54, hallar un vector normal a la curva de nivel $f(x, y) = c$ en P.

51. $f(x, y) = 6 - 2x - 3y$
$c = 6$, $P(0, 0)$

52. $f(x, y) = x^2 + y^2$
$c = 25$, $P(3, 4)$

53. $f(x, y) = xy$
$c = -3$, $P(-1, 3)$

54. $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$
$c = \frac{1}{2}$, $P(1, 1)$

En los ejercicios 55 a 58, *a*) encontrar el gradiente de la función en *P*, *b*) encontrar un vector normal unitario para la curva de nivel $f(x, y) = c$ en *P*, *c*) encontrar la recta tangente a la curva de nivel $f(x, y) = c$ en *P*, y *d*) trazar la curva de nivel, el vector unitario normal y la recta tangente en el plano *xy*.

55. $f(x, y) = 4x^2 - y$
$c = 6$, $P(2, 10)$

56. $f(x, y) = x - y^2$
$c = 3$, $P(4, -1)$

57. $f(x, y) = 3x^2 - 2y^2$
$c = 1$, $P(1, 1)$

58. $f(x, y) = 9x^2 + 4y^2$
$c = 40$, $P(2, -1)$

Desarrollo de conceptos

59. Definir la derivada de la función $z = f(x, y)$ en la dirección de $\mathbf{u} = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$.

60. Redactar un párrafo que describa la derivada direccional de la función f en la dirección de $\mathbf{u} = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$ cuando *a*) $\theta = 0°$ y *b*) $\theta = 90°$.

61. Definir el gradiente de una función de dos variables. Dar las propiedades del gradiente.

62. Dibujar la gráfica de una superficie y elegir un punto P sobre la superficie. Dibujar un vector en el plano *xy* que indique la dirección de mayor ascenso sobre la superficie en P.

63. Describir la relación del gradiente con las curvas de nivel de una superficie dada por $z = f(x, y)$.

Para discusión

64. Considerar la función $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$.

a) Trazar la gráfica de f en el primer octante y graficar el punto $(1, 2, 4)$ sobre la superficie.

b) Encontrar $D_{\mathbf{u}} f(1, 2)$, donde $\mathbf{u} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$. para $\theta = -\pi/4$.

c) Repetir el inciso *b*) para $\theta = \pi/3$.

d) Encontrar $\nabla f(1, 2)$ y $\|\nabla f(1, 2)\|$.

e) Encontrar un vector unitario $\mathbf{u}$ ortogonal para $\nabla f(1, 2)$ y calcular $D_{\mathbf{u}} f(1, 2)$. Discutir el significado geométrico del resultado.

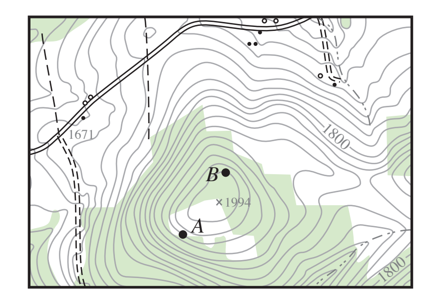
65. *Distribución de temperatura* La temperatura en el punto (x, y) de una placa metálica es

$$T = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

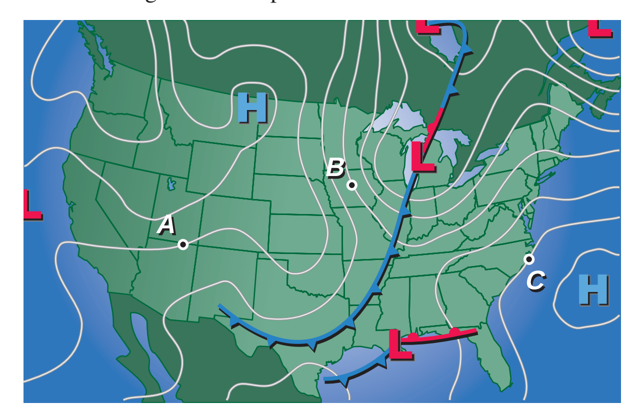
Hallar la dirección de mayor incremento de calor en el punto $(3, 4)$.

66. ***Topografía*** La superficie de una montaña se modela mediante la ecuación $h(x, y) = 5\,000 - 0.001x^2 - 0.004y^2$. Un montañista se encuentra en el punto $(500, 300, 4\,390)$. ¿En qué dirección debe moverse para ascender con la mayor rapidez?

67. ***Topografía*** La figura muestra un mapa topográfico utilizado por un grupo de excursionistas. Dibujar las trayectorias de descenso más rápidas si los excursionistas parten del punto A y si parten del punto B.



68. ***Meteorología*** Los meteorólogos miden la presión atmosférica en milibares. A partir de estas observaciones elaboran mapas climáticos en los que dibujan las curvas de igual presión atmosférica (isobaras) (ver la figura). Son curvas de nivel de una función $P(x, y)$ que dan la presión en cualquier punto. Dibujar los gradientes de las isobaras en los puntos A, B y C. Aunque no se conocen las magnitudes de los gradientes, sus longitudes relativas pueden estimarse. ¿En cuál de los tres puntos es la velocidad del viento mayor si la velocidad del viento se incrementa conforme el gradiente de presión aumenta?



Rastreador térmico **En los ejercicios 69 y 70, hallar la trayectoria de un rastreador térmico situado en el punto P de una placa metálica con un campo de temperatura $T(x, y)$.**

	Campo de temperatura	*Punto*
69.	$T(x, y) = 400 - 2x^2 - y^2$	$P(10, 10)$
70.	$T(x, y) = 100 - x^2 - 2y^2$	$P(4, 3)$

71. ***Temperatura*** La temperatura en el punto (x, y) de una placa metálica se modela mediante

$$T(x, y) = 400e^{-(x^2+y)/2}, \quad x \geq 0, y \geq 0.$$

CAS *a*) Utilizar un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente la función de distribución de temperatura.

b) Hallar las direcciones, sobre la placa en el punto $(3, 5)$, en las que no hay cambio en el calor.

c) Hallar la dirección de mayor incremento de calor en el punto $(3, 5)$.

CAS **72.** ***Investigación*** Un equipo de oceanógrafos está elaborando un mapa del fondo del océano para ayudar a recuperar un barco hundido. Utilizando el sonido, desarrollan el modelo

$$D = 250 + 30x^2 + 50 \operatorname{sen} \frac{\pi y}{2}, \quad o \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$$

donde D es la profundidad en metros, y x y y son las distancias en kilómetros.

a) Utilizar un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente la superficie.

b) Como la gráfica del inciso *a*) da la profundidad, no es un mapa del fondo del océano. ¿Cómo podría modificarse el modelo para que se pudiera obtener una gráfica del fondo del océano?

c) ¿Cuál es la profundidad a la que se encuentra el barco si se localiza en las coordenadas $x = 1$ y $y = 0.5$?

d) Determinar la pendiente del fondo del océano en la dirección del eje x positivo a partir del punto donde se encuentra el barco.

e) Determinar la pendiente del fondo del océano en la dirección del eje y positivo en el punto donde se encuentra el barco.

f) Determinar la dirección de mayor tasa de cambio de la profundidad a partir del punto donde se encuentra el barco.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 73 a 76, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.**

73. Si $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, entonces $D_{\mathbf{u}}f(0, 0) = 0$ para todo vector unitario $\mathbf{u}$.

74. Si $f(x, y) = x + y$, entonces $-1 \leq D_{\mathbf{u}}f(x, y) \leq 1$.

75. Si $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ existe, entonces $D_{\mathbf{u}}f(x, y) = -D_{-\mathbf{u}}f(x, y)$.

76. Si $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = c$ para todo vector unitario $\mathbf{u}$, entonces $c = 0$.

77. Hallar una función f tal que

$$\nabla f = e^x \cos y\,\mathbf{i} - e^x \operatorname{sen} y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}.$$

78. Considerar la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{4xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

y el vector unitario $\mathbf{u} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$.

¿Existe la derivada direccional de f en $P(0, 0)$ en la dirección de $\mathbf{u}$? Si $f(0, 0)$ estuviera definido en 2 en vez de 0, ¿existiría la derivada direccional?

79. Considerar la función $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$.

a) Demostrar que f es continua en el origen.

b) Demostrar que f_x y f_y existen en el origen, pero que la derivada direccional en el origen en todas las demás direcciones no existe.

CAS *c*) Usar un sistema algebraico por computadora para graficar f cerca del origen a fin de verificar las respuestas de los incisos *a*) y *b*). Explicar.



13.7 Planos tangentes y rectas normales

- **Hallar ecuaciones de planos tangentes y rectas normales a superficies.**
- **Hallar el ángulo de inclinación de una recta en el espacio.**
- **Comparar los gradientes $\nabla f(x, y)$ y $\nabla F(x, y, z)$.**

Plano tangente y recta normal a una superficie

Hasta ahora las superficies en el espacio se han representado principalmente por medio de ecuaciones de la forma

$$z = f(x, y).$$ Ecuación de una superficie S.

Sin embargo, en el desarrollo que sigue, es conveniente utilizar la representación más general $F(x, y, z) = 0$. Una superficie S dada por $z = f(x, y)$, se puede convertir a la forma general definiendo F como

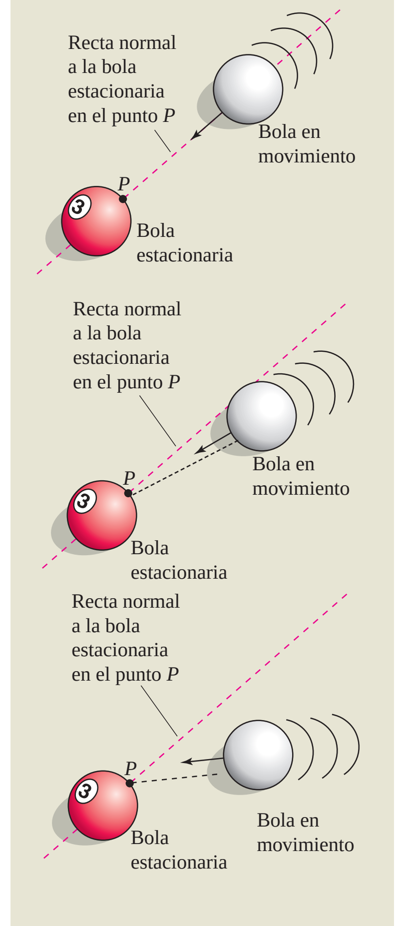
$$F(x, y, z) = f(x, y) - z.$$

Puesto que $f(x, y) - z = 0$, se puede considerar S como la superficie de nivel de F dada por

$$F(x, y, z) = 0.$$ Ecuación alternativa de la superficie S.

EXPLORACIÓN

Bolas de billar y rectas normales
En cada una de las tres figuras la bola en movimiento está a punto de golpear una bola estacionaria en el punto P. Explicar cómo utilizar la recta normal a la bola estacionaria en el punto P para describir el movimiento resultante en cada una de las bolas. Suponiendo que todas las bolas en movimiento tengan la misma velocidad, ¿cuál de las bolas estacionarias adquirirá mayor velocidad? ¿Cuál adquirirá menor velocidad? Explicar el razonamiento.



EJEMPLO 1 Expresar una ecuación de una superficie

Dada la función

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$$

describir la superficie de nivel dada por $F(x, y, z) = 0$.

Solución La superficie de nivel dada por $F(x, y, z) = 0$ puede expresarse como

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

la cual es una esfera de radio 2 centrada en el origen.

Se han visto muchos ejemplos acerca de la utilidad de rectas normales en aplicaciones relacionadas con curvas. Las rectas normales son igualmente importantes al analizar superficies y sólidos. Por ejemplo, considérese la colisión de dos bolas de billar. Cuando una bola estacionaria es golpeada en un punto P de su superficie, se mueve a lo largo de la **línea de impacto** determinada por P y por el centro de la bola. El impacto puede ser de *dos* maneras. Si la bola que golpea se mueve a lo largo de la línea de impacto, se detiene y transfiere todo su momento a la bola estacionaria, como se muestra en la figura 13.55. Si la bola que golpea no se mueve a lo largo de la línea de impacto, se desvía a un lado o al otro y retiene parte de su momento. La transferencia de parte de su momento a la bola estacionaria ocurre a lo largo de la línea de impacto, *sin tener en cuenta* la dirección de la bola que golpea, como se muestra en la figura 13.56. A esta línea de impacto se le llama **recta normal** a la superficie de la bola en el punto P.

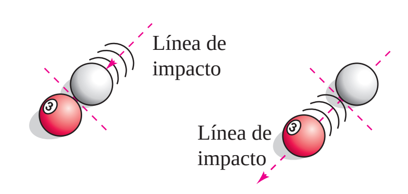


Figura 13.55

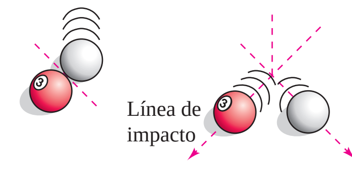


Figura 13.56

En el proceso de hallar una recta normal a una superficie, se puede también resolver el problema de encontrar un **plano tangente** a la superficie. Sea S una superficie dada por

$$F(x, y, z) = 0$$

y sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto en S. Sea C una curva en S que pasa por P definida por la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

Entonces, para todo t,

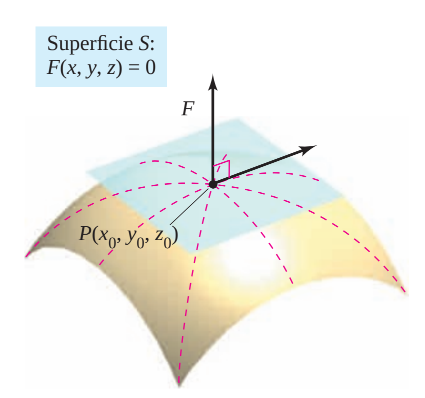
$$F(x(t),\ y(t),\ z(t)) = 0.$$

Si F es diferenciable y $x'(t)$, $y'(t)$ y $z'(t)$ existen, se sigue por la regla de la cadena que

$$\begin{aligned} 0 &= F'(t) \\ &= F_x(x, y, z)x'(t) + F_y(x, y, z)y'(t) + F_z(x, y, z)z'(t). \end{aligned}$$

En (x_0, y_0, z_0), la forma vectorial equivalente es

$$0 = \underbrace{\nabla F(x_0, y_0, z_0)}_{\text{Gradiente}} \cdot \underbrace{\mathbf{r}'(t_0)}_{\text{Vector tangente}}.$$



Plano tangente a la superficie S en P
Figura 13.57

Este resultado significa que el gradiente en P es ortogonal al vector tangente de toda curva en S que pase por P. Por tanto, todas las rectas tangentes en S se encuentran en un plano que es normal a $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ y contiene a P, como se muestra en la figura 13.57.

DEFINICIÓN DE PLANO TANGENTE Y RECTA NORMAL

Sea F diferenciable en un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ de la superficie S dada por $F(x, y, z) = 0$ tal que $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$.

1. Al plano que pasa por P y es normal a $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ se le llama **plano tangente a *S* en *P*.**
2. A la recta que pasa por P y tiene la dirección de $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ se le llama **recta normal a *S* en *P*.**

NOTA En el resto de esta sección, se supone $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ a menos que se establezca lo contrario. ■

Para hallar una ecuación para el plano tangente a S en (x_0, y_0, z_0), sea (x, y, z) un punto arbitrario en el plano tangente. Entonces el vector

$$\mathbf{v} = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$$

se encuentra en el plano tangente. Como $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es normal al plano tangente en (x_0, y_0, z_0), debe ser ortogonal a todo vector en el plano tangente, y se tiene $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{v} = 0$, lo que demuestra el resultado enunciado en el teorema siguiente.

TEOREMA 13.13 ECUACIÓN DEL PLANO TANGENTE

Si F es diferenciable en (x_0, y_0, z_0), entonces una ecuación del plano tangente a la superficie dada por $F(x, y, z) = 0$ en (x_0, y_0, z_0) es

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

EJEMPLO 2 Hallar una ecuación de un plano tangente

Hallar una ecuación del plano tangente al hiperboloide

$$z^2 - 2x^2 - 2y^2 = 12$$

en el punto $(1, -1, 4)$.

Solución Se comienza por expresar la ecuación de la superficie como

$$z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 12 = 0.$$

Después, considerando

$$F(x, y, z) = z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 12$$

se tiene

$$F_x(x, y, z) = -4x, \qquad F_y(x, y, z) = -4y \qquad \text{y} \qquad F_z(x, y, z) = 2z.$$

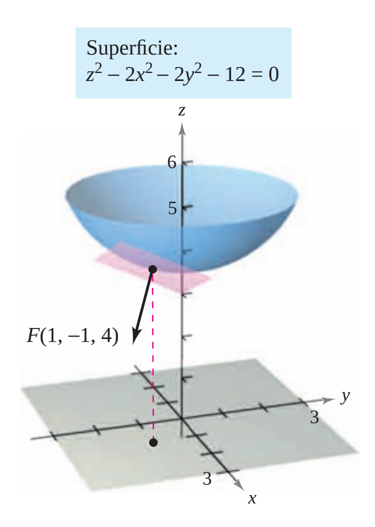
En el punto $(1, -1, 4)$ las derivadas parciales son

$$F_x(1, -1, 4) = -4, \qquad F_y(1, -1, 4) = 4 \qquad \text{y} \qquad F_z(1, -1, 4) = 8.$$

Por tanto, una ecuación del plano tangente en $(1, -1, 4)$ es

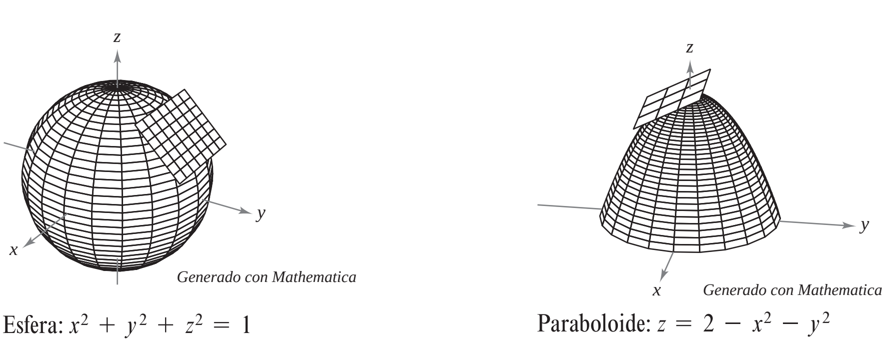
$$\begin{aligned} -4(x - 1) + 4(y + 1) + 8(z - 4) &= 0 \\ -4x + 4 + 4y + 4 + 8z - 32 &= 0 \\ -4x + 4y + 8z - 24 &= 0 \\ x - y - 2z + 6 &= 0. \end{aligned}$$

La figura 13.58 muestra una parte del hiperboloide y el plano tangente.



Plano tangente a la superficie
Figura 13.58

TECNOLOGÍA Algunas herramientas de graficación tridimensionales pueden representar planos tangentes a superficies. He aquí dos ejemplos.



Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Paraboloide: $z = 2 - x^2 - y^2$

Para hallar la ecuación del plano tangente en un punto a una superficie dada por $z = f(x, y)$, se define la función F mediante

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z.$$

Después se da S por medio de la superficie de nivel $F(x, y, z) = 0$, y por el teorema 13.13 una ecuación del plano tangente a S en el punto (x_0, y_0, z_0) es

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

EJEMPLO 3 Hallar una ecuación del plano tangente

Hallar la ecuación del plano tangente al paraboloide

$$z = 1 - \frac{1}{10}(x^2 + 4y^2)$$

en el punto $\left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$.

Solución De $z = f(x, y) = 1 - \frac{1}{10}(x^2 + 4y^2)$, se obtiene

$$f_x(x, y) = -\frac{x}{5} \quad \Rightarrow \quad f_x(1, 1) = -\frac{1}{5}$$

y

$$f_y(x, y) = -\frac{4y}{5} \quad \Rightarrow \quad f_y(1, 1) = -\frac{4}{5}.$$

Así, una ecuación del plano tangente en $\left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$ es

$$f_x(1, 1)(x - 1) + f_y(1, 1)(y - 1) - \left(z - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$-\frac{1}{5}(x - 1) - \frac{4}{5}(y - 1) - \left(z - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$-\frac{1}{5}x - \frac{4}{5}y - z + \frac{3}{2} = 0.$$

Superficie: $z = 1 - \frac{1}{10}(x^2 + 4y^2)$

Figura 13.59

Este plano tangente se muestra en la figura 13.59.

El gradiente $\nabla F(x, y, z)$ proporciona una manera adecuada de obtener ecuaciones de rectas normales, como se muestra en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Hallar una ecuación de una recta normal a una superficie

Hallar un conjunto de ecuaciones simétricas para la recta normal a la superficie dada por $xyz = 12$ en el punto $(2, -2, -3)$.

Solución Se comienza por hacer

$$F(x, y, z) = xyz - 12.$$

Entonces, el gradiente está dado por

$$\nabla F(x, y, z) = F_x(x, y, z)\mathbf{i} + F_y(x, y, z)\mathbf{j} + F_z(x, y, z)\mathbf{k}$$
$$= yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$$

y en el punto $(2, -2, -3)$ se tiene

$$\nabla F(2, -2, -3) = (-2)(-3)\mathbf{i} + (2)(-3)\mathbf{j} + (2)(-2)\mathbf{k}$$
$$= 6\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}.$$

La recta normal en $(2, -2, -3)$ tiene números de dirección o directores 6, -6 y -4, y el conjunto correspondiente de ecuaciones simétricas es

$$\frac{x - 2}{6} = \frac{y + 2}{-6} = \frac{z + 3}{-4}.$$

Superficie: $xyz = 12$

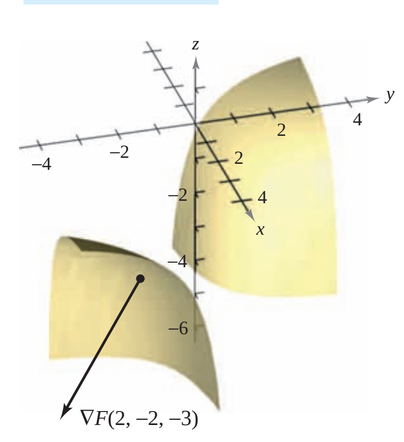


Figura 13.60

Ver la figura 13.60.

Saber que el gradiente $\nabla F(x, y, z)$ es normal a la superficie $F(x, y, z) = 0$ permite resolver diversos problemas relacionados con superficies y curvas en el espacio.

EJEMPLO 5 Hallar la ecuación de una recta tangente a una curva

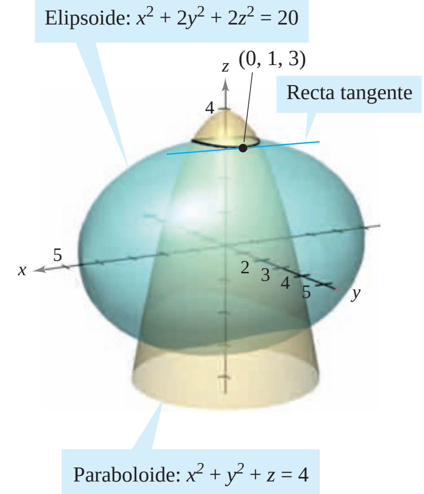


Figura 13.61

Describir la recta tangente a la curva de intersección de las superficies

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 20 \qquad \text{Elipsoide.}$$
$$x^2 + y^2 + z = 4 \qquad \text{Paraboloide.}$$

en el punto (0, 1, 3), como se muestra en la figura 13.61.

Solución Para comenzar, se calculan los gradientes de ambas superficies en el punto (0, 1, 3).

Elipsoide	*Paraboloide*
$F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 20$	$G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 4$
$\nabla F(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$	$\nabla G(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}$
$\nabla F(0, 1, 3) = 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$	$\nabla G(0, 1, 3) = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

El producto vectorial de estos dos gradientes es un vector tangente a ambas superficies en el punto (0, 1, 3).

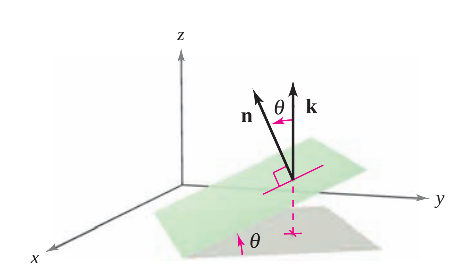
$$\nabla F(0, 1, 3) \times \nabla G(0, 1, 3) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -20\mathbf{i}.$$

Por tanto, la recta tangente a la curva de intersección de las dos superficies en el punto (0, 1, 3) es una recta paralela al eje x y que pasa por el punto (0, 1, 3).

El ángulo de inclinación de un plano

Otro uso del gradiente $\nabla F(x, y, z)$ es determinar el ángulo de inclinación del plano tangente a una superficie. El **ángulo de inclinación** de un plano se define como el ángulo $\theta\ (0 \leq \theta \leq \pi/2)$ entre el plano dado y el plano xy, como se muestra en la figura 13.62. (El ángulo de inclinación de un plano horizontal es por definición cero.) Como el vector $\mathbf{k}$ es normal al plano xy, se puede utilizar la fórmula del coseno del ángulo entre dos planos (dado en la sección 11.5) para concluir que el ángulo de inclinación de un plano con vector normal $\mathbf{n}$ está dado por

$$\cos\theta = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}|}{\|\mathbf{n}\|\,\|\mathbf{k}\|} = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}|}{\|\mathbf{n}\|}. \qquad \text{Ángulo de inclinación de un plano.}$$



Ángulo de inclinación
Figura 13.62

EJEMPLO 6 Hallar el ángulo de inclinación de un plano tangente

Hallar el ángulo de inclinación del plano tangente al elipsoide

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{3} = 1$$

en el punto (2, 2, 1).

Solución Si se hace

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{3} - 1$$

el gradiente de F en el punto (2, 2, 1) está dado por

$$\nabla F(x, y, z) = \frac{x}{6}\mathbf{i} + \frac{y}{6}\mathbf{j} + \frac{2z}{3}\mathbf{k}$$

$$\nabla F(2, 2, 1) = \frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}.$$

Como $\nabla F(2, 2, 1)$ es normal al plano tangente y $\mathbf{k}$ es normal al plano xy, se sigue que el ángulo de inclinación del plano tangente está dado por

$$\cos\theta = \frac{|\nabla F(2, 2, 1) \cdot \mathbf{k}|}{\|\nabla F(2, 2, 1)\|} = \frac{2/3}{\sqrt{(1/3)^2 + (1/3)^2 + (2/3)^2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

lo cual implica que

$$\theta = \arccos\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 35.3°,$$

como se muestra en la figura 13.63.

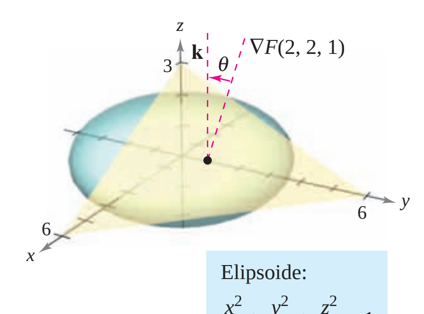


Figura 13.63

NOTA Un caso especial del procedimiento mostrado en el ejemplo 6 merece mención especial. El ángulo de inclinación θ del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en (x_0, y_0, z_0) está dado por

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{[f_x(x_0, y_0)]^2 + [f_y(x_0, y_0)]^2 + 1}}.$$

Fórmula alternativa para el ángulo de inclinación (ver ejercicio 77).

Comparación de los gradientes $\nabla f(x, y)$ y $\nabla F(x, y, z)$

Esta sección concluye con una comparación de los gradientes $\nabla f(x, y)$ y $\nabla F(x, y, z)$. En la sección anterior se vio que el gradiente de una función f de dos variables es normal a las curvas de nivel de f. Específicamente, el teorema 13.12 establece que si f es diferenciable en (x_0, y_0) y $\nabla f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, entonces $\nabla f(x_0, y_0)$ es normal a la curva de nivel que pasa por (x_0, y_0). Habiendo desarrollado rectas normales a superficies, ahora se puede extender este resultado a una función de tres variables. La demostración del teorema 13.14 se deja como un ejercicio (ver ejercicio 78).

TEOREMA 13.14 EL GRADIENTE ES NORMAL A LAS SUPERFICIES DE NIVEL

Si F es diferenciable en (x_0, y_0, z_0) y $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, entonces $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es normal a la superficie de nivel que pasa por (x_0, y_0, z_0).

Al trabajar con los gradientes $\nabla f(x, y)$ y $\nabla F(x, y, z)$, hay que recordar que $\nabla f(x, y)$ es un vector en el plano xy y $\nabla F(x, y, z)$ es un vector en el espacio.

13.7 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, describir la superficie de nivel $F(x, y, z) = 0$.

1. $F(x, y, z) = 3x - 5y + 3z - 15$
2. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 25$
3. $F(x, y, z) = 4x^2 + 9y^2 - 4z^2$
4. $F(x, y, z) = 16x^2 - 9y^2 + 36z$

En los ejercicios 5 a 16, hallar un vector unitario normal a la superficie en el punto dado. [*Sugerencia*: Normalizar el vector gradiente $\nabla F(x, y, z)$.]

	Superficie	*Punto*
5.	$3x + 4y + 12z = 0$	$(0, 0, 0)$
6.	$x + y + z = 4$	$(2, 0, 2)$
7.	$x^2 + y^2 + z^2 = 6$	$(1, 1, 2)$
8.	$z = \sqrt{x^2 + y^2}$	$(3, 4, 5)$
9.	$z = x^3$	$(2, -1, 8)$
10.	$x^2y^4 - z = 0$	$(1, 2, 16)$
11.	$x^2 + 3y + z^3 = 9$	$(2, -1, 2)$
12.	$x^2y^3 - y^2z + 2xz^3 = 4$	$(-1, 1, -1)$
13.	$\ln\left(\dfrac{x}{y - z}\right) = 0$	$(1, 4, 3)$
14.	$ze^{x^2-y^2} - 3 = 0$	$(2, 2, 3)$
15.	$z - x \operatorname{sen} y = 4$	$\left(6, \dfrac{\pi}{6}, 7\right)$
16.	$\operatorname{sen}(x - y) - z = 2$	$\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{6}, -\dfrac{3}{2}\right)$

En los ejercicios 17 a 30, hallar una ecuación del plano tangente a la superficie en el punto dado.

17. $z = x^2 + y^2 + 3$

$(2, 1, 8)$

18. $f(x, y) = \dfrac{y}{x}$

$(1, 2, 2)$

19. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(3, 4, 5)$
20. $g(x, y) = \arctan \dfrac{y}{x}$, $(1, 0, 0)$
21. $g(x, y) = x^2 + y^2$, $(1, -1, 2)$
22. $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$, $(1, 2, 1)$
23. $z = 2 - \frac{2}{3}x - y$, $(3, -1, 1)$
24. $z = e^x(\operatorname{sen} y + 1)$, $\left(0, \dfrac{\pi}{2}, 2\right)$
25. $h(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, $(3, 4, \ln 5)$
26. $h(x, y) = \cos y$, $\left(5, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$
27. $x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$, $(2, -2, 4)$
28. $x^2 + 2z^2 = y^2$, $(1, 3, -2)$
29. $xy^2 + 3x - z^2 = 8$, $(1, -3, 2)$
30. $x = y(2z - 3)$, $(4, 4, 2)$

En los ejercicios 31 a 40, hallar una ecuación del plano tangente y hallar ecuaciones simétricas para la recta normal a la superficie en el punto dado.

31. $x + y + z = 9$, $(3, 3, 3)$
32. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $(1, 2, 2)$
33. $x^2 + y^2 + z = 9$, $(1, 2, 4)$
34. $z = 16 - x^2 - y^2$, $(2, 2, 8)$
35. $z = x^2 - y^2$, $(3, 2, 5)$
36. $xy - z = 0$, $(-2, -3, 6)$
37. $xyz = 10$, $(1, 2, 5)$
38. $z = ye^{2xy}$, $(0, 2, 2)$
39. $z = \arctan \dfrac{y}{x}$, $\left(1, 1, \dfrac{\pi}{4}\right)$
40. $y \ln xz^2 = 2$, $(e, 2, 1)$

En los ejercicios 41 a 46, *a*) encontrar ecuaciones simétricas de la recta tangente a la curva de intersección de las superficies en el punto dado, y *b*) encontrar el coseno del ángulo entre los vectores gradiente en este punto. Establecer si son ortogonales o no las superficies en el punto de intersección.

41. $x^2 + y^2 = 2$, $z = x$, $(1, 1, 1)$
42. $z = x^2 + y^2$, $z = 4 - y$, $(2, -1, 5)$
43. $x^2 + z^2 = 25$, $y^2 + z^2 = 25$, $(3, 3, 4)$
44. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $5x - 2y + 3z = 22$, $(3, 4, 5)$
45. $x^2 + y^2 + z^2 = 14$, $x - y - z = 0$, $(3, 1, 2)$
46. $z = x^2 + y^2$, $x + y + 6z = 33$, $(1, 2, 5)$

En los ejercicios 47 a 50, encontrar el ángulo de inclinación θ del plano tangente a la superficie en el punto dado.

47. $3x^2 + 2y^2 - z = 15$, $(2, 2, 5)$
48. $2xy - z^3 = 0$, $(2, 2, 2)$
49. $x^2 - y^2 + z = 0$, $(1, 2, 3)$
50. $x^2 + y^2 = 5$, $(2, 1, 3)$

En los ejercicios 51 a 56, encontrar el (los) punto(s) sobre la superficie en la cual el plano tangente es horizontal.

51. $z = 3 - x^2 - y^2 + 6y$

52. $z = 3x^2 + 2y^2 - 3x + 4y - 5$

53. $z = x^2 - xy + y^2 - 2x - 2y$

54. $z = 4x^2 + 4xy - 2y^2 + 8x - 5y - 4$

55. $z = 5xy$

56. $z = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

En los ejercicios 57 y 58, demostrar que las superficies son tangentes a cada una en el punto dado para demostrar que las superficies tienen el mismo plano tangente en este punto.

57. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 3,\ x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 10y + 14 = 0,$ $(-1, 1, 0)$

58. $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 12y + 4z + 42 = 0,\ x^2 + y^2 + 2z = 7,$ $(2, 3, -3)$

En los ejercicios 59 y 60, *a*) demostrar que las superficies intersecan en el punto dado y *b*) demostrar que las superficies tienen planos tangentes perpendiculares en este punto.

59. $z = 2xy^2,\ 8x^2 - 5y^2 - 8z = -13,\quad (1, 1, 2)$

60. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 4z - 12 = 0,$ $4x^2 + y^2 + 16z^2 = 24,\quad (1, -2, 1)$

61. Encontrar un punto sobre el elipsoide $x^2 + 4y^2 + z^2 = 9$ donde el plano tangente es perpendicular a la recta con ecuaciones paramétricas

$$x = 2 - 4t,\ y = 1 + 8t \quad \text{y} \quad z = 3 - 2t.$$

62. Encontrar un punto sobre el hiperboloide $x^2 + 4y^2 - z^2 = 1$ donde el plano tangente es paralelo al plano $x + 4y - z = 0$.

Desarrollo de conceptos

63. Dar la forma estándar de la ecuación del plano tangente a una superficie dada por $F(x, y, z) = 0$ en (x_0, y_0, z_0).

64. En algunas superficies, las rectas normales en cualquier punto pasan por el mismo objeto geométrico. ¿Cuál es el objeto geométrico común en una esfera? ¿Cuál es el objeto geométrico común en un cilindro circular recto? Explicar.

65. Analizar la relación entre el plano tangente a una superficie y la aproximación por diferenciales.

Para discusión

66. Considerar el cono elíptico dado por

$$x^2 - y^2 + z^2 = 0.$$

a) Encontrar una ecuación del plano tangente en el punto (5, 13, –12).

b) Encontrar ecuaciones simétricas de la superficie normal en el punto (5, 13, –12).

67. ***Investigación*** Considerar la función

$$f(x, y) = \frac{4xy}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)}$$

en los intervalos $-2 \le x \le 2$ y $0 \le y \le 3$.

a) Hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta normal y una ecuación del plano tangente a la superficie en el punto (1, 1, 1).

b) Repetir el inciso *a*) con el punto $\left(-1, 2, -\frac{4}{5}\right)$.

CAS *c*) Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la superficie, las rectas normales y los planos tangentes encontrados en los incisos *a*) y *b*).

68. ***Investigación*** Considerar la función

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sen} y}{x}$$

en los intervalos $-3 \le x \le 3$ y $0 \le y \le 2\pi$.

a) Hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta normal y una ecuación del plano tangente a la superficie en el punto

$$\left(2, \frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

b) Repetir el inciso *a*) con el punto $\left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$.

CAS *c*) Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la superficie, las rectas normales y los planos tangentes calculados en los incisos *a*) y *b*).

69. Considerar las funciones

$$f(x, y) = 6 - x^2 - y^2/4 \quad \text{y} \quad g(x, y) = 2x + y.$$

a) Hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva de intersección de las superficies en el punto (1, 2, 4), y hallar el ángulo entre los vectores gradientes.

CAS *b*) Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente las superficies. Representar gráficamente la recta tangente obtenida en el inciso *a*).

70. Considerar las funciones

$$f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2 + 2x - 4y}$$

y

$$g(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 - 3x^2 + y^2 + 6x + 4y}.$$

CAS *a*) Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la porción del primer octante de las superficies representadas por *f* y *g*.

b) Hallar un punto en el primer octante sobre la curva intersección y mostrar que las superficies son ortogonales en este punto.

c) Estas superficies son ortogonales a lo largo de la curva intersección. ¿Demuestra este hecho el inciso *b*)? Explicar.

En los ejercicios 71 y 72, probar que el plano tangente a la superficie cuádrica en el punto (x_0, y_0, z_0) puede expresarse en la forma dada.

71. Elipsoide: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

Plano: $\dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} + \dfrac{z_0 z}{c^2} = 1$

72. Hiperboloide: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

Plano: $\dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} - \dfrac{z_0 z}{c^2} = 1$

73. Demostrar que todo plano tangente al cono

$z^2 = a^2x^2 + b^2y^2$

pasa por el origen.

74. Sea f una función derivable y considérese la superficie $z = xf(y/x)$. Mostrar que el plano tangente a cualquier punto $P(x_0, y_0, z_0)$ de la superficie pasa por el origen.

75. ***Aproximación*** Considerar las aproximaciones siguientes para una función $f(x, y)$ centrada en $(0, 0)$.

Aproximación lineal:

$P_1(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y$

Aproximación cuadrática:

$$P_2(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \tfrac{1}{2} f_{xx}(0, 0)x^2 + f_{xy}(0, 0)xy + \tfrac{1}{2} f_{yy}(0, 0)y^2$$

[Observar que la aproximación lineal es el plano tangente a la superficie en $(0, 0, f(0, 0))$.]

a) Hallar la aproximación lineal a $f(x, y) = e^{(x-y)}$ centrada en $(0, 0)$.

b) Hallar la aproximación cuadrática a $f(x, y) = e^{(x-y)}$ centrada en $(0, 0)$.

c) Si $x = 0$ en la aproximación cuadrática, ¿para qué función se obtiene el polinomio de Taylor de segundo orden? Responder la misma pregunta para $y = 0$.

d) Completar la tabla.

x	y	$f(x, y)$	$P_1(x, y)$	$P_2(x, y)$
0	0			
0	0.1			
0.2	0.1			
0.2	0.5			
1	0.5			

CAS *e*) Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente las superficies $z = f(x, y)$, $z = P_1(x, y)$ y $z = P_2(x, y)$.

76. ***Aproximación*** Repetir el ejercicio 75 con la función $f(x, y) = \cos(x + y)$.

77. Demostrar que el ángulo de inclinación θ del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0, z_0) está dado por

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{[f_x(x_0, y_0)]^2 + [f_y(x_0, y_0)]^2 + 1}}.$$

78. Demostrar el teorema 13.14.

PROYECTO DE TRABAJO

Flora silvestre

La diversidad de la flora silvestre en una pradera se puede medir contando el número de margaritas, lirios, amapolas, etc. Si existen n tipos de flores silvestres, cada una en una proporción p_i respecto a la población total, se sigue que $p_1 + p_2 + \cdot \cdot \cdot + p_n = 1$. La medida de diversidad de la población se define como

$$H = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i.$$

En esta definición, se entiende que $p_i \log_2 p_i = 0$ cuando $p_i = 0$. Las tablas muestran las proporciones de flores silvestres en una pradera en mayo, junio, agosto y septiembre.

Mayo

Tipo de flor	1	2	3	4
Proporción	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{16}$

Junio

Tipo de flor	1	2	3	4
Proporción	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Agosto

Tipo de flor	1	2	3	4
Proporción	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Septiembre

Tipo de flor	1	2	3	4
Proporción	0	0	0	1

a) Determinar la diversidad de flores silvestres durante cada mes. ¿Cómo se interpretaría la diversidad en septiembre? ¿Qué mes tiene mayor diversidad?

b) Si la pradera contiene 10 tipos de flores silvestres en proporciones aproximadamente iguales, la diversidad de la población ¿es mayor o menor que la diversidad de una distribución similar con 4 tipos de flores? ¿Qué tipo de distribución (de 10 tipos de flores silvestres) produciría la diversidad máxima?

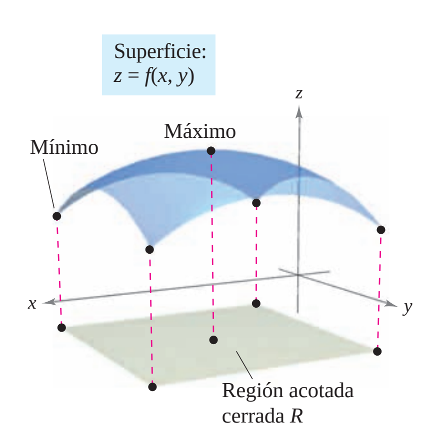
c) Sea H_n la diversidad máxima de n tipos de flores silvestres. ¿Tiende H_n a algún límite cuando $n \to \infty$?

PARA MAYOR INFORMACIÓN Los biólogos utilizan el concepto de diversidad para medir las proporciones de diferentes tipos de organismos dentro de un medio ambiente. Para más información sobre esta técnica, ver el artículo "Information Theory and Biological Diversity" de Steven Kolmes y Kevin Mitchell en la *UMAP Modules*.

13.8 Extremos de funciones de dos variables

- **Hallar extremos absolutos y relativos de una función de dos variables.**
- **Utilizar el criterio de las segundas derivadas parciales para hallar un extremo relativo de una función de dos variables.**

Extremos absolutos y extremos relativos



R contiene algún(os) punto(s) donde $f(x, y)$ es un mínimo y algún(os) punto(s) donde $f(x, y)$ es un máximo
Figura 13.64

En el capítulo 3 se estudiaron las técnicas para hallar valores extremos de una función de una (sola) variable. En esta sección se extienden estas técnicas a funciones de dos variables. Por ejemplo, en el teorema 13.15 se extiende el teorema del valor extremo para una función de una sola variable a una función de dos variables.

Considérese la función continua f de dos variables, definida en una región acotada cerrada R. Los valores $f(a, b)$ y $f(c, d)$ tales que

$$f(a, b) \leq f(x, y) \leq f(c, d) \qquad (a, b) \text{ y } (c, d) \text{ están en } R.$$

para todo (x, y) en R se conocen como el **mínimo** y **máximo** de f en la región R, como se muestra en la figura 13.64. Recuérdese de la sección 13.2 que una región en el plano es *cerrada* si contiene todos sus puntos frontera. El teorema del valor extremo se refiere a una región en el plano que es cerrada y *acotada*. A una región en el plano se le llama **acotada** si es una subregión de un disco cerrado en el plano.

TEOREMA 13.15 TEOREMA DEL VALOR EXTREMO

Sea f una función continua de dos variables x y y definida en una región acotada cerrada R en el plano xy.

1. Existe por lo menos un punto en R, en el que f toma un valor mínimo.
2. Existe por lo menos un punto en R, en el que f toma un valor máximo.

A un mínimo también se le llama un **mínimo absoluto** y a un máximo también se le llama un **máximo absoluto**. Como en el cálculo de una variable, se hace una distinción entre extremos absolutos y **extremos relativos**.

DEFINICIÓN DE EXTREMOS RELATIVOS

Sea f una función definida en una región R que contiene (x_0, y_0).

1. La función f tiene un **mínimo relativo** en (x_0, y_0) si

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$

para todo (x, y) en un disco *abierto* que contiene (x_0, y_0).

2. La función f tiene un **máximo relativo** en (x_0, y_0) si

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

para todo (x, y) en un disco *abierto* que contiene (x_0, y_0).

Extremos relativos
Figura 13.65

Decir que f tiene un máximo relativo en (x_0, y_0) significa que el punto (x_0, y_0, z_0) es por lo menos tan alto como todos los puntos cercanos en la gráfica de $z = f(x, y)$. De manera similar, f tiene un mínimo relativo en (x_0, y_0) si (x_0, y_0, z_0) es por lo menos tan bajo como todos los puntos cercanos en la gráfica. (Ver la figura 13.65.)



KARL WEIERSTRASS (1815-1897)

Aunque el teorema del valor extremo había sido ya utilizado antes por los matemáticos, el primero en proporcionar una demostración rigurosa fue el matemático alemán Karl Weierstrass. Weierstrass también proporcionó justificaciones rigurosas para muchos otros resultados matemáticos ya de uso común. A él se deben muchos de los fundamentos lógicos sobre los cuales se basa el cálculo moderno.

Para localizar los extremos relativos de f, se pueden investigar los puntos en los que el gradiente de f es **0** o los puntos en los cuales una de las derivadas parciales no exista. Tales puntos se llaman **puntos críticos** de f.

DEFINICIÓN DE LOS PUNTOS CRÍTICOS

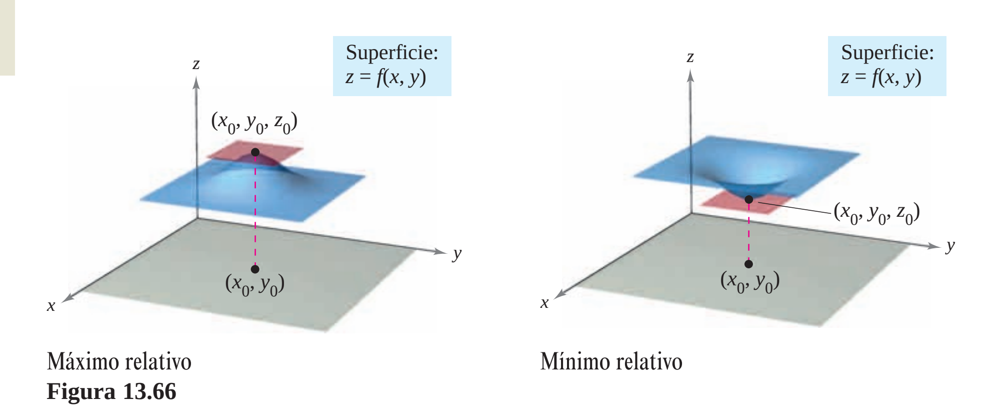
Sea f definida en una región abierta R que contiene (x_0, y_0). El punto (x_0, y_0) es un **punto crítico** de f si se satisface una de las condiciones siguientes:

1. $f_x(x_0, y_0) = 0$ y $f_y(x_0, y_0) = 0$
2. $f_x(x_0, y_0)$ o $f_y(x_0, y_0)$ no existe.

Recuérdese del teorema 13.11 que si f es diferenciable y

$$\begin{aligned}\nabla f(x_0, y_0) &= f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j}\\ &= 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}\end{aligned}$$

entonces toda derivada direccional en (x_0, y_0) debe ser 0. Esto implica que la función tiene un plano tangente horizontal al punto (x_0, y_0), como se muestra en la figura 13.66. Al parecer, tal punto es una localización probable para un extremo relativo. Esto es ratificado por el teorema 13.16.



Máximo relativo

Mínimo relativo

Figura 13.66

TEOREMA 13.16 LOS EXTREMOS RELATIVOS SE PRESENTAN SÓLO EN PUNTOS CRÍTICOS

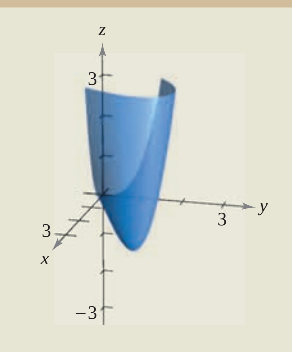
Si f tiene un extremo relativo en (x_0, y_0) en una región abierta R, entonces (x_0, y_0) es un punto crítico de f.

EXPLORACIÓN

Utilizar una herramienta de graficación para representar

$$z = x^3 - 3xy + y^3$$

usando las cotas $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 3$ y $-3 \le z \le 3$. Esta vista parece sugerir que la superficie tuviera un mínimo absoluto. Pero, ¿lo tiene?



EJEMPLO 1 Hallar un extremo relativo

Hallar los extremos relativos de

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20.$$

Superficie:
$f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20$

La función $z = f(x, y)$ tiene un mínimo relativo en $(-2, 3)$
Figura 13.67

Solución Para comenzar, encontrar los puntos críticos de f. Como

$$f_x(x, y) = 4x + 8 \qquad \text{Derivada parcial con respecto a } x.$$

y

$$f_y(x, y) = 2y - 6 \qquad \text{Derivada parcial con respecto a } y.$$

están definidas para todo x y y, los únicos puntos críticos son aquellos en los cuales las derivadas parciales de primer orden son 0. Para localizar estos puntos, se hacen $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ igual a 0, y se resuelven las ecuaciones

$$4x + 8 = 0 \quad \text{y} \quad 2y - 6 = 0$$

para obtener el punto crítico $(-2, 3)$. Completando cuadrados, se concluye que para todo $(x, y) \neq (-2, 3)$

$$f(x, y) = 2(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + 3 > 3.$$

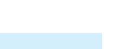
Por tanto, un *mínimo* relativo de f se encuentra en $(-2, 3)$. El valor del mínimo relativo es $f(-2, 3) = 3$, como se muestra en la figura 13.67.

El ejemplo 1 muestra un mínimo relativo que se presenta en un tipo de punto crítico; el tipo en el cual ambos $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ son 0. En el siguiente ejemplo se presenta un máximo relativo asociado al otro tipo de punto crítico; el tipo en el cual $f_x(x, y)$ o $f_y(x, y)$ no existe.

EJEMPLO 2 Hallar un extremo relativo

Determinar los extremos relativos de $f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)^{1/3}$.

Superficie:
$f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)^{1/3}$



$f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ están indefinidas en $(0, 0)$
Figura 13.68

Solución Como

$$f_x(x, y) = -\frac{2x}{3(x^2 + y^2)^{2/3}} \qquad \text{Derivada parcial con respecto a } x.$$

y

$$f_y(x, y) = -\frac{2y}{3(x^2 + y^2)^{2/3}} \qquad \text{Derivada parcial con respecto a } y.$$

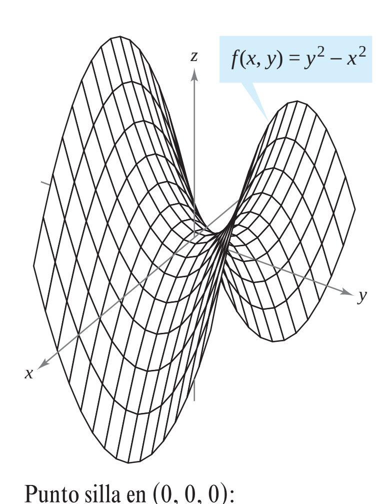
se sigue que ambas derivadas parciales existen para todo punto en el plano xy salvo para $(0, 0)$. Como las derivadas parciales no pueden ser ambas 0 a menos que x y y sean 0, se concluye que $(0, 0)$ es el único punto crítico. En la figura 13.68 se observa que $f(0, 0)$ es 1. Para cualquier otro (x, y) es claro que

$$f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)^{1/3} < 1.$$

Por tanto, f tiene un *máximo* relativo en $(0, 0)$.

NOTA En el ejemplo 2, $f_x(x, y) = 0$ para todo punto distinto de $(0, 0)$ en el eje y. Sin embargo, como $f_y(x, y)$ no es cero, éstos no son puntos críticos. Recuérdese que *una* de las derivadas parciales debe no existir o *las dos* deben ser 0 para tener un punto crítico.

El criterio de las segundas derivadas parciales



Punto silla en $(0, 0, 0)$:
$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$

Figura 13.69

El teorema 13.16 afirma que para encontrar extremos relativos sólo se necesita examinar los valores de $f(x, y)$ en los puntos críticos. Sin embargo, como sucede con una función de una variable, los puntos críticos de una función de dos variables no siempre son máximos o mínimos relativos. Algunos puntos críticos dan **puntos silla** que no son ni máximos relativos ni mínimos relativos.

Como ejemplo de un punto crítico que no es un extremo relativo, considérese la superficie dada por

$$f(x, y) = y^2 - x^2 \qquad \text{Paraboloide hiperbólico.}$$

que se muestra en la figura 13.69. En el punto (0, 0), ambas derivadas parciales son 0. Sin embargo, la función f no tiene un extremo relativo en este punto ya que en todo disco abierto centrado en (0, 0) la función asume valores negativos (a lo largo del eje x) y valores positivos (a lo largo del eje y). Por tanto, el punto (0, 0, 0) es un punto silla de la superficie. (El término "punto silla" viene del hecho de que la superficie mostrada en la figura 13.69 se parece a una silla de montar.)

En las funciones de los ejemplos 1 y 2, fue relativamente fácil determinar los extremos relativos, porque cada una de las funciones estaba dada, o se podía expresar, en forma de cuadrado perfecto. Con funciones más complicadas, los argumentos algebraicos son menos adecuados y es mejor emplear los medios analíticos presentados en el siguiente criterio de las segundas derivadas parciales. Es el análogo, para funciones de dos variables, del criterio de las segundas derivadas para las funciones de una variable. La demostración de este teorema se deja para un curso de cálculo avanzado.

TEOREMA 13.17 CRITERIO DE LAS SEGUNDAS DERIVADAS PARCIALES

Sea f una función con segundas derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene un punto (a, b) para el cual

$$f_x(a, b) = 0 \quad \text{y} \quad f_y(a, b) = 0.$$

Para buscar los extremos relativos de f, considérese la cantidad

$$d = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2.$$

1. Si $d > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$, entonces f tiene un **mínimo relativo** en (a, b).
2. Si $d > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$, entonces f tiene un **máximo relativo** en (a, b).
3. Si $d < 0$, entonces $(a, b, f(a, b))$ es un **punto silla**.
4. Si $d = 0$ el criterio no lleva a ninguna conclusión.

NOTA Si $d > 0$, entonces $f_{xx}(a, b)$ y $f_{yy}(a, b)$ deben tener el mismo signo. Esto significa que $f_{xx}(a, b)$ puede sustituirse por $f_{yy}(a, b)$ en las dos primeras partes del criterio. ■

Un recurso conveniente para recordar la fórmula de d en el criterio de las segundas derivadas parciales lo da el determinante 2×2

$$d = \begin{vmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{vmatrix}$$

donde $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ de acuerdo al teorema 13.3.

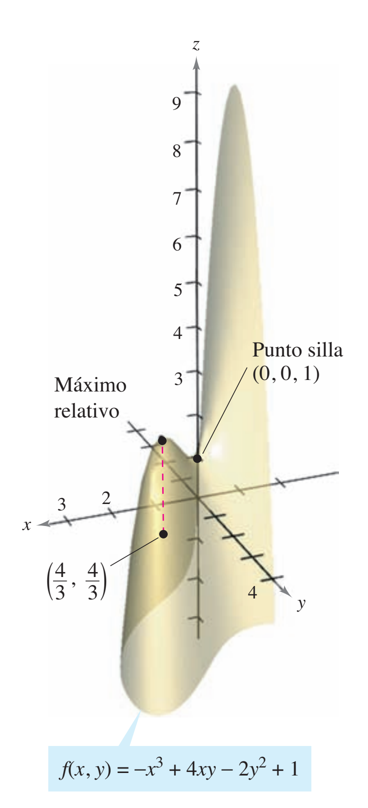


Figura 13.70

EJEMPLO 3 Aplicación del criterio de las segundas derivadas parciales

Identificar los extremos relativos de $f(x, y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$.

Solución Para comenzar, se identifican los puntos críticos de f. Como

$$f_x(x, y) = -3x^2 + 4y \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = 4x - 4y$$

existen para todo x y y, los únicos puntos críticos son aquellos en los que ambas derivadas parciales de primer orden son 0. Para localizar estos puntos, se igualan a 0 $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ y se obtiene $-3x^2 + 4y = 0$ y $4x - 4y = 0$. De la segunda ecuación se sabe que $x = y$, y por sustitución en la primera ecuación, se obtienen dos soluciones: $y = x = 0$ y $y = x = \frac{4}{3}$. Como

$$f_{xx}(x, y) = -6x, \quad f_{yy}(x, y) = -4 \quad \text{y} \quad f_{xy}(x, y) = 4$$

se sigue que, para el punto crítico $(0, 0)$,

$$d = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - [f_{xy}(0, 0)]^2 = 0 - 16 < 0$$

y, por el criterio de las segundas derivadas parciales, se puede concluir que $(0, 0, 1)$ es un punto silla. Para el punto crítico $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$,

$$\begin{aligned} d &= f_{xx}\left(\tfrac{4}{3}, \tfrac{4}{3}\right) f_{yy}\left(\tfrac{4}{3}, \tfrac{4}{3}\right) - \left[f_{xy}\left(\tfrac{4}{3}, \tfrac{4}{3}\right)\right]^2 \\ &= -8(-4) - 16 \\ &= 16 \\ &> 0 \end{aligned}$$

y como $f_{xx}\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = -8 < 0$ se concluye que f tiene un máximo relativo en $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$, como se muestra en la figura 13.70.

Con el criterio de las segundas derivadas parciales pueden no hallarse los extremos relativos por dos razones. Si alguna de las primeras derivadas parciales no existe, no se puede aplicar el criterio. Si

$$d = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2 = 0$$

el criterio no es concluyente. En tales casos, se pueden tratar de hallar los extremos mediante la gráfica o mediante algún otro método, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 Cuando el criterio de las segundas derivadas parciales no es concluyente

Hallar los extremos relativos de $f(x, y) = x^2y^2$.

Solución Como $f_x(x, y) = 2xy^2$ y $f_y(x, y) = 2x^2y$, se sabe que ambas derivadas parciales son igual a 0 si $x = 0$ o $y = 0$. Es decir, todo punto del eje x o del eje y es un punto crítico. Como

$$f_{xx}(x, y) = 2y^2, \qquad f_{yy}(x, y) = 2x^2 \qquad \text{y} \qquad f_{xy}(x, y) = 4xy$$

se sabe que si $x = 0$ o $y = 0$, entonces

$$\begin{aligned} d &= f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2 \\ &= 4x^2y^2 - 16x^2y^2 = -12x^2y^2 = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, el criterio de las segundas derivadas parciales no es concluyente, no funciona. Sin embargo, como $f(x, y) = 0$ para todo punto en los ejes x o y y $f(x, y) = x^2y^2 > 0$ en todos los otros puntos, se puede concluir que cada uno de estos puntos críticos son un mínimo absoluto, como se muestra en la figura 13.71.

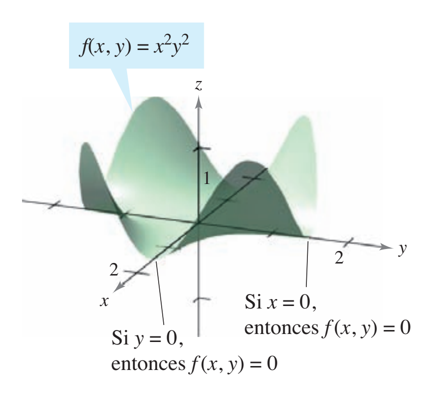


Figura 13.71

Los extremos absolutos de una función se pueden presentar de dos maneras. Primero, algunos extremos relativos también resultan ser extremos absolutos. Así, en el ejemplo 1, $f(-2, 3)$ es un mínimo absoluto de la función. (Por otro lado, el máximo relativo encontrado en el ejemplo 3 no es un máximo absoluto de la función.) Segundo, los extremos absolutos pueden presentarse en un punto frontera del dominio. Esto se ilustra en el ejemplo 5.

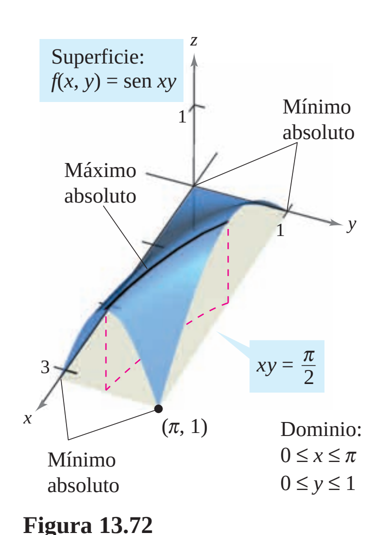


Figura 13.72

EJEMPLO 5 Encontrar extremos absolutos

Hallar los extremos absolutos de la función

$$f(x, y) = \text{sen } xy$$

en la región cerrada dada por $0 \le x \le \pi$ y $0 \le y \le 1$.

Solución La expresión de las derivadas parciales

$$f_x(x, y) = y \cos xy \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = x \cos xy$$

permite ver que todo punto en la hipérbola dada por $xy = \pi/2$ es un punto crítico. En todos estos puntos el valor de f es

$$f(x, y) = \text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$$

el cual se sabe que es el máximo absoluto, como se muestra en la figura 13.72. El otro punto crítico de f *que se encuentra en la región dada* es (0, 0). Este punto da un mínimo absoluto de 0, ya que

$$0 \le xy \le \pi$$

implica que

$$0 \le \text{sen } xy \le 1.$$

Para localizar otros extremos absolutos se deben considerar las cuatro fronteras de la región formadas por las trazas, de los planos verticales $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$ y $y = 1$. Al hacer esto, se encuentra que sen $xy = 0$ en todos los puntos del eje x, en todos los puntos del eje y y en el punto $(\pi, 1)$. Cada uno de estos puntos es un mínimo absoluto de la superficie, como se muestra en la figura 13.72.

Los conceptos de extremos relativos y puntos críticos pueden extenderse a funciones de tres o más variables. Si todas las primeras derivadas parciales de

$$w = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

existen, puede mostrarse que se presenta un máximo o un mínimo relativo en $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ sólo si cada una de las primeras derivadas parciales en ese punto es 0. Esto significa que los puntos críticos se obtienen al resolver el sistema de ecuaciones siguiente.

$$\begin{aligned} f_{x_1}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) &= 0 \\ f_{x_2}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_{x_n}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

La extensión del teorema 13.17 a tres o más variables también es posible, aunque no se considerará en este texto.

13.8 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, identificar los extremos de la función reconociendo su forma dada o su forma después de completar cuadrados. Verificar los resultados empleando derivadas parciales para localizar los puntos críticos y probar si son extremos relativos.

1. $g(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 3)^2$
2. $g(x, y) = 5 - (x - 3)^2 - (y + 2)^2$
3. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$
4. $f(x, y) = \sqrt{25 - (x - 2)^2 - y^2}$
5. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6$
6. $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 10x + 12y - 64$

En los ejercicios 7 a 16, examinar la función para localizar los extremos relativos.

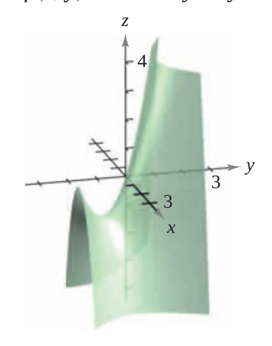
7. $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 6x - 4y + 16$
8. $f(x, y) = -3x^2 - 2y^2 + 3x - 4y + 5$
9. $f(x, y) = -x^2 - 5y^2 + 10x - 10y - 28$
10. $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 3$
11. $z = x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 - 2x + y$
12. $z = -5x^2 + 4xy - y^2 + 16x + 10$
13. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
14. $h(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/3} + 2$
15. $g(x, y) = 4 - |x| - |y|$
16. $f(x, y) = |x + y| - 2$

CAS **En los ejercicios 17 a 20, utilizar un sistema algebraico por computadora y representar la superficie y localizar los extremos relativos y los puntos silla.**

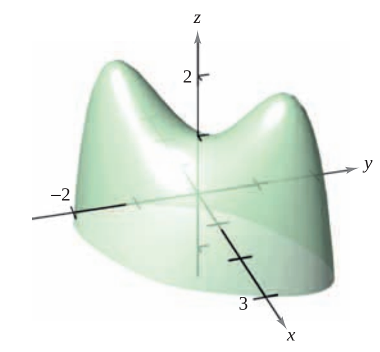
17. $z = \dfrac{-4x}{x^2 + y^2 + 1}$
18. $f(x, y) = y^3 - 3yx^2 - 3y^2 - 3x^2 + 1$
19. $z = (x^2 + 4y^2)e^{1-x^2-y^2}$
20. $z = e^{xy}$

En los ejercicios 21 a 28, examinar la función para localizar los extremos relativos y los puntos silla.

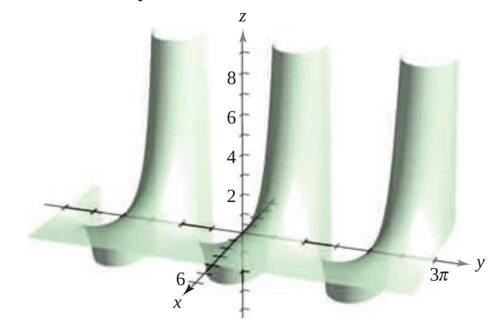
21. $h(x, y) = 80x + 80y - x^2 - y^2$
22. $g(x, y) = x^2 - y^2 - x - y$
23. $g(x, y) = xy$
24. $h(x, y) = x^2 - 3xy - y^2$
25. $f(x, y) = x^2 - xy - y^2 - 3x - y$



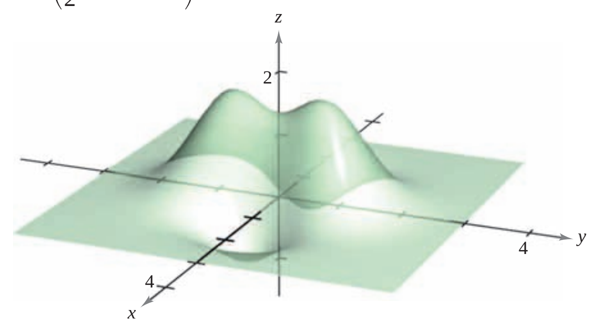
26. $f(x, y) = 2xy - \frac{1}{2}(x^4 + y^4) + 1$



27. $z = e^{-x} \operatorname{sen} y$



28. $z = \left(\dfrac{1}{2} - x^2 + y^2\right)e^{1-x^2-y^2}$



CAS **En los ejercicios 29 y 30, buscar los extremos de la función sin utilizar los criterios de la derivada. Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la superficie. (*Sugerencia:* Por observación, determinar si es posible que *z* sea negativo. ¿Cuándo *z* es igual a 0?)**

29. $z = \dfrac{(x - y)^4}{x^2 + y^2}$
30. $z = \dfrac{(x^2 - y^2)^2}{x^2 + y^2}$

Para pensar **En los ejercicios 31 a 34, determinar si hay un máximo relativo, un mínimo relativo, un punto silla, o si la información es insuficiente para determinar la naturaleza de la función $f(x, y)$ en el punto crítico (x_0, y_0).**

31. $f_{xx}(x_0, y_0) = 9, \quad f_{yy}(x_0, y_0) = 4, \quad f_{xy}(x_0, y_0) = 6$
32. $f_{xx}(x_0, y_0) = -3, \quad f_{yy}(x_0, y_0) = -8, \quad f_{xy}(x_0, y_0) = 2$
33. $f_{xx}(x_0, y_0) = -9, \quad f_{yy}(x_0, y_0) = 6, \quad f_{xy}(x_0, y_0) = 10$
34. $f_{xx}(x_0, y_0) = 25, \quad f_{yy}(x_0, y_0) = 8, \quad f_{xy}(x_0, y_0) = 10$

35. Una función f tiene segundas derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene el punto crítico (3, 7). La función tiene un mínimo en (3, 7) y $d > 0$ para el criterio de las segundas derivadas parciales. Determinar el intervalo para $f_{xy}(3, 7)$ si $f_{xx}(3, 7) = 2$ y $f_{yy}(3, 7) = 8$.

36. Una función f tiene segundas derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene el punto crítico (a, b). Si $f_{xx}(a, b)$ y $f_{yy}(a, b)$ tiene signos opuestos, ¿qué implica esto? Explicar.

CAS **En los ejercicios 37 a 42, *a*) hallar los puntos críticos, *b*) determinar los extremos relativos, *c*) indicar los puntos críticos en los cuales el criterio de las segundas derivadas parciales no es concluyente, y *d*) usar un sistema algebraico por computadora para trazar la función, clasificando cualesquiera puntos extremos y puntos silla.**

37. $f(x, y) = x^3 + y^3$

38. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6x^2 + 9y^2 + 12x + 27y + 19$

39. $f(x, y) = (x - 1)^2(y + 4)^2$

40. $f(x, y) = \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 2)^2}$

41. $f(x, y) = x^{2/3} + y^{2/3}$

42. $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{2/3}$

En los ejercicios 43 y 44, hallar los puntos críticos de la función y, por la forma de la función, determinar si se presenta un máximo o un mínimo relativo en cada punto.

43. $f(x, y, z) = x^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2$

44. $f(x, y, z) = 9 - [x(y - 1)(z + 2)]^2$

En los ejercicios 45 a 54, hallar los extremos absolutos de la función en la región *R*. (En cada caso, *R* contiene sus puntos frontera.) Utilizar un sistema algebraico por computadora y confirmar los resultados.

45. $f(x, y) = x^2 - 4xy + 5$

$R = \{(x, y) : 1 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 2\}$

46. $f(x, y) = x^2 + xy, \quad R = \{(x, y) : |x| \le 2,\ |y| \le 1\}$

47. $f(x, y) = 12 - 3x - 2y$

R: La región triangular en el plano xy con vértices (2, 0), (0, 1) y (1, 2)

48. $f(x, y) = (2x - y)^2$

R: La región triangular en el plano xy con vértices (2, 0), (0, 1) y (1, 2)

49. $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 4y$

R: La región en el plano xy acotada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = 4$

50. $f(x, y) = 2x - 2xy + y^2$

R: La región en el plano xy acotada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = 1$

51. $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2, \quad R = \{(x, y) : |x| \le 2,\ |y| \le 1\}$

52. $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2, \quad R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 8\}$

53. $f(x, y) = \dfrac{4xy}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)}$

$R = \{(x, y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$

54. $f(x, y) = \dfrac{4xy}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)}$

$R = \{(x, y) : x \ge 0,\ y \ge 0,\ x^2 + y^2 \le 1\}$

Desarrollo de conceptos

55. La figura muestra las curvas de nivel de una función desconocida $f(x, y)$. ¿Qué información, si es que hay alguna, puede darse acerca de f en el punto A? Explicar el razonamiento.

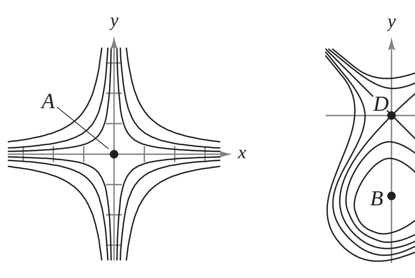


Figura para 55 **Figura para 56**

56. La figura muestra las curvas de nivel de una función desconocida $f(x, y)$. ¿Qué información, si es que hay alguna, puede darse acerca de f en los puntos A, B, C y D? Explicar el razonamiento.

En los ejercicios 57 a 59, dibujar la gráfica de una función arbitraria *f* que satisfaga las condiciones dadas. Decir si la función tiene extremos o puntos silla. (Hay muchas respuestas correctas.)

57. $f_x(x, y) > 0$ y $f_y(x, y) < 0$ para todo (x, y).

58. Todas las primeras y segundas derivadas parciales de f son 0.

59. $f_x(0, 0) = 0,\ \ f_y(0, 0) = 0$

$$f_x(x, y)\begin{cases} < 0, & x < 0 \\ > 0, & x > 0 \end{cases}, \qquad f_y(x, y)\begin{cases} > 0, & y < 0 \\ < 0, & y > 0 \end{cases}$$

$f_{xx}(x, y) > 0,\ f_{yy}(x, y) < 0$ y $f_{xy}(x, y) = 0$ para todo (x, y).

Para discusión

60. Considerar las funciones

$f(x, y) = x^2 - y^2$ y $g(x, y) = x^2 + y^2$.

a) Demostrar que ambas funciones tienen un punto crítico en (0, 0).

b) Explicar cómo f y g se comportan de manera diferente en este punto crítico.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 61 a 64, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.**

61. Si f tiene un máximo relativo en (x_0, y_0, z_0), entonces $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.

62. Si $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$, entonces f tiene un máximo relativo en (x_0, y_0, z_0).

63. Entre cualesquiera dos mínimos relativos de f, aquí debe estar al menos un máximo relativo de f.

64. Si f es continua para todo x y y y tiene dos mínimos relativos, entonces f debe tener un máximo relativo por lo menos.

13.9 Aplicaciones de los extremos de funciones de dos variables

- **Resolver problemas de optimización con funciones de varias variables.**
- **Utilizar el método de mínimos cuadrados.**

Problemas de optimización aplicada

En esta sección se verán algunas de las muchas aplicaciones de los extremos de funciones de dos (o más) variables.

EJEMPLO 1 Hallar un volumen máximo

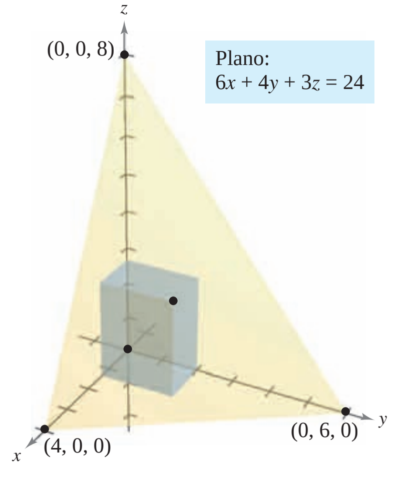


Figura 13.73

Una caja rectangular descansa en el plano xy con uno de sus vértices en el origen. El vértice opuesto está en el plano

$$6x + 4y + 3z = 24$$

como se muestra en la figura 13.73. Hallar el volumen máximo de la caja.

Solución Sean x, y y z el largo, ancho y la altura de la caja. Como un vértice de la caja se encuentra en el plano $6x + 4y + 3z = 24$, se sabe que $z = \frac{1}{3}(24 - 6x - 4y)$, y así se puede expresar el volumen xyz de la caja en función de dos variables.

$$\begin{aligned} V(x, y) &= (x)(y)\left[\tfrac{1}{3}(24 - 6x - 4y)\right] \\ &= \tfrac{1}{3}(24xy - 6x^2y - 4xy^2) \end{aligned}$$

Igualando a 0 las primeras derivadas parciales

$$V_x(x, y) = \tfrac{1}{3}(24y - 12xy - 4y^2) = \frac{y}{3}(24 - 12x - 4y) = 0$$

$$V_y(x, y) = \tfrac{1}{3}(24x - 6x^2 - 8xy) = \frac{x}{3}(24 - 6x - 8y) = 0$$

se obtienen los puntos críticos $(0, 0)$ y $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$. En $(0, 0)$ el volumen es 0, así que ese punto no proporciona un volumen máximo. En el punto $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$, se puede aplicar el criterio de las segundas derivadas parciales.

$$V_{xx}(x, y) = -4y$$

$$V_{yy}(x, y) = \frac{-8x}{3}$$

$$V_{xy}(x, y) = \tfrac{1}{3}(24 - 12x - 8y)$$

Como

$$V_{xx}\left(\tfrac{4}{3}, 2\right)V_{yy}\left(\tfrac{4}{3}, 2\right) - \left[V_{xy}\left(\tfrac{4}{3}, 2\right)\right]^2 = (-8)\left(-\tfrac{32}{9}\right) - \left(-\tfrac{8}{3}\right)^2 = \tfrac{64}{3} > 0$$

y

$$V_{xx}\left(\tfrac{4}{3}, 2\right) = -8 < 0$$

se concluye de acuerdo con el criterio de las segundas derivadas parciales que el volumen máximo es

$$\begin{aligned} V\left(\tfrac{4}{3}, 2\right) &= \tfrac{1}{3}\left[24\left(\tfrac{4}{3}\right)(2) - 6\left(\tfrac{4}{3}\right)^2(2) - 4\left(\tfrac{4}{3}\right)(2^2)\right] \\ &= \tfrac{64}{9} \text{ unidades cúbicas.} \end{aligned}$$

Nótese que el volumen es 0 en los puntos frontera del dominio triangular de V.

NOTA En muchos problemas prácticos, el dominio de la función a optimizar es una región acotada cerrada. Para encontrar los puntos mínimos o máximos, no sólo se deben probar los puntos críticos, sino también los valores de la función en los puntos frontera.

En las aplicaciones de los extremos a la economía y a los negocios a menudo se tiene más de una variable independiente. Por ejemplo, una empresa puede producir varios modelos de un mismo tipo de producto. El precio por unidad y la ganancia o beneficio por unidad de cada modelo son, por lo general, diferentes. La demanda de cada modelo es, a menudo, función de los precios de los otros modelos (así como su propio precio). El siguiente ejemplo ilustra una aplicación en la que hay dos productos.

EJEMPLO 2 Beneficio máximo

Un fabricante de artículos electrónicos determina que la ganancia o beneficio P (en dólares) obtenido al producir x unidades de un reproductor de DVD y y unidades de un grabador de DVD se aproxima mediante el modelo

$$P(x, y) = 8x + 10y - (0.001)(x^2 + xy + y^2) - 10\,000.$$

Hallar el nivel de producción que proporciona una ganancia o beneficio máximo. ¿Cuál es la ganancia máxima?

Solución Las derivadas parciales de la función de beneficio son

$$P_x(x, y) = 8 - (0.001)(2x + y) \qquad \text{y} \qquad P_y(x, y) = 10 - (0.001)(x + 2y).$$

PARA MAYOR INFORMACIÓN
Para más información sobre el uso de la matemática en la economía, ver el artículo “Mathematical Methods of Economics” de Joel Franklin en *The American Mathematical Monthly*.

Igualando estas derivadas parciales a 0, se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente.

$$8 - (0.001)(2x + y) = 0$$
$$10 - (0.001)(x + 2y) = 0$$

Después de simplificar, este sistema de ecuaciones lineales puede expresarse como

$$2x + y = 8\,000$$
$$x + 2y = 10\,000.$$

Resolviendo el sistema se obtiene $x = 2\,000$ y $y = 4\,000$. Las segundas derivadas parciales de P son

$$P_{xx}(2\,000, 4\,000) = -0.002$$
$$P_{yy}(2\,000, 4\,000) = -0.002$$
$$P_{xy}(2\,000, 4\,000) = -0.001.$$

Como $P_{xx} < 0$ y

$$P_{xx}(2\,000, 4\,000)P_{yy}(2\,000, 4\,000) - [P_{xy}(2\,000, 4\,000)]^2 = (-0.002)^2 - (-0.001)^2 > 0$$

se concluye que el nivel de producción con $x = 2\,000$ unidades y $y = 4\,000$ unidades proporciona el beneficio *máximo*. El beneficio máximo es

$$P(2\,000, 4\,000) = 8(2\,000) + 10(4\,000) - (0.001)[2\,000^2 + 2\,000(4\,000) + 4\,000^2)] - 10\,000$$
$$= \$18\,000.$$

NOTA En el ejemplo 2 se supuso que la planta industrial puede producir el número requerido de unidades para proporcionar el beneficio máximo. En la práctica, la producción estará limitada por restricciones físicas. En la sección siguiente se estudiarán tales problemas de optimización. ■

El método de mínimos cuadrados

En muchos de los ejemplos en este texto se han empleado **modelos matemáticos**, como en el caso del ejemplo 2, donde se utiliza un modelo cuadrático para el beneficio. Hay varias maneras para desarrollar tales modelos; una es la conocida como el **método de mínimos cuadrados**.

Al construir un modelo para representar un fenómeno particular, los objetivos son simplicidad y precisión. Por supuesto, estas metas entran a menudo en conflicto. Por ejemplo, un modelo lineal simple para los puntos en la figura 13.74 es

$$y = 1.8566x - 5.0246.$$

Sin embargo, la figura 13.75 muestra que si se elige el modelo cuadrático, ligeramente más complicado,* es

$$y = 0.1996x^2 - 0.7281x + 1.3749$$

se logra mayor precisión.

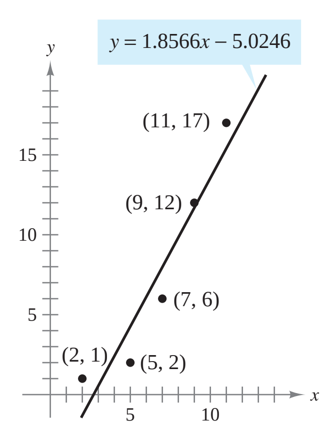


Figura 13.74

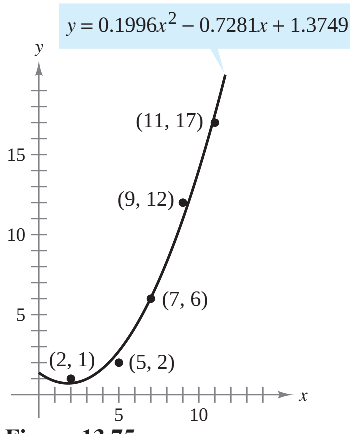


Figura 13.75

Como medida de qué tan bien se ajusta el modelo $y = f(x)$ a la colección de puntos

$$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

se pueden sumar los cuadrados de las diferencias entre los valores reales y y los valores dados por el modelo para obtener la **suma de los cuadrados de los errores o errores cuadráticos**

$$S = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - y_i]^2.$$

Suma de los cuadrados de los errores o errores cuadráticos.

Suma de los cuadrados de los errores:
$S = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$
Figura 13.76

Gráficamente, S puede interpretarse como la suma de los cuadrados de las distancias verticales entre la gráfica de f y los puntos dados en el plano (los puntos de los datos), como se muestra en la figura 13.76. Si el modelo es perfecto, entonces $S = 0$. Sin embargo, cuando la perfección no es posible, podemos conformarnos con un modelo que haga mínimo el valor de S. Por ejemplo, la suma de los errores cuadráticos en el modelo lineal en la figura 13.74 es $S \approx 17$. En estadística, al *modelo lineal* que minimiza el valor de S se le llama **recta de regresión o por mínimos cuadrados**. La demostración de que esta recta realmente minimiza S requiere minimizar una función de dos variables.

---

* *En el ejercicio 37 se describe un método para hallar el modelo de mínimos cuadrados para una colección de datos.*


The Granger Collection

ADRIEN-MARIE LEGENDRE (1752-1833)

El método de mínimos cuadrados lo introdujo el matemático francés Adrien-Marie Legendre. Legendre es mejor conocido por su trabajo en geometría. De hecho, su texto "Elementos de Geometría" fue tan popular en Estados Unidos que se usó durante un periodo de más de 100 años y hubo 33 ediciones.

TEOREMA 13.18 RECTA DE REGRESIÓN DE MÍNIMOS CUADRADOS

La **recta de regresión de mínimos cuadrados** para $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\}$ está dada por $f(x) = ax + b$, donde

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \quad \text{y} \quad b = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i\right).$$

DEMOSTRACIÓN Sea $S(a, b)$ la suma de los cuadrados de los errores para el modelo $f(x) = ax + b$ y el conjunto de puntos dado. Es decir,

$$\begin{aligned} S(a, b) &= \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - y_i]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 \end{aligned}$$

donde los puntos (x_i, y_i) representan constantes. Como S es una función de a y b, se pueden usar los métodos de la sección anterior para encontrar el valor mínimo de S. Las primeras derivadas parciales de S son

$$\begin{aligned} S_a(a, b) &= \sum_{i=1}^{n} 2x_i(ax_i + b - y_i) \\ &= 2a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2b\sum_{i=1}^{n} x_i - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ S_b(a, b) &= \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i) \\ &= 2a\sum_{i=1}^{n} x_i + 2nb - 2\sum_{i=1}^{n} y_i. \end{aligned}$$

Igualando estas dos derivadas parciales a 0, se obtienen los valores de a y b que indica el teorema. Se deja como ejercicio aplicar el criterio de las segundas derivadas parciales (ver ejercicio 47) para verificar que estos valores de a y b dan un mínimo.

Si los valores de x están simétricamente distribuidos respecto al eje y, entonces $\Sigma\, x_i = 0$ y las fórmulas para a y b se simplifican:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

y

$$b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Esta simplificación es a menudo posible mediante una traslación de los valores x. Por ejemplo, si los valores x en una colección de datos son los años 2005, 2006, 2007, 2008 y 2009, se puede tomar 2007 como 0.

EJEMPLO 3 Hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados

Hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados para los puntos $(-3, 0)$, $(-1, 1)$, $(0, 2)$ y $(2, 3)$.

Solución La tabla muestra los cálculos necesarios para hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados usando $n = 4$.

TECNOLOGÍA Muchas calculadoras tienen "incorporados" programas de regresión de mínimos cuadrados. Se puede utilizar una calculadora con estos programas para reproducir los resultados del ejemplo 3.

x	y	xy	x^2
-3	0	0	9
-1	1	-1	1
0	2	0	0
2	3	6	4
$\sum_{i=1}^{n} x_i = -2$	$\sum_{i=1}^{n} y_i = 6$	$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 5$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 14$

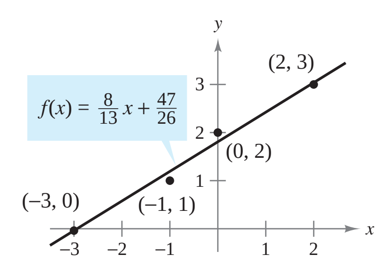
Aplicando el teorema 13.18 se obtiene

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{4(5) - (-2)(6)}{4(14) - (-2)^2} = \frac{8}{13}$$

y

$$b = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{4}\left[6 - \frac{8}{13}(-2)\right] = \frac{47}{26}.$$

La recta de regresión de mínimos cuadrados es $f(x) = \frac{8}{13}x + \frac{47}{26}$, como se muestra en la figura 13.77.



Recta de regresión de mínimos cuadrados
Figura 13.77

13.9 Ejercicios

En los ejercicios 1 y 2, hallar la distancia mínima del punto al plano $x - y + z = 3$. (*Sugerencia:* Para simplificar los cálculos, minimizar el cuadrado de la distancia.)

1. $(0, 0, 0)$
2. $(1, 2, 3)$

En los ejercicios 3 y 4, encontrar la distancia mínima desde el punto a la superficie $z = \sqrt{1 - 2x - 2y}$. (*Sugerencia:* En el ejercicio 4, usar la operación raíz de una herramienta de graficación.)

3. $(-2, -2, 0)$



4. $(0, 0, 2)$

En los ejercicios 5 a 8, hallar tres números positivos x, y y z que satisfagan las condiciones dadas.

5. El producto es 27 y la suma es mínima.
6. La suma es 32 y $P = xy^2z$ es máxima.
7. La suma es 30 y la suma de los cuadrados es mínima.
8. El producto es 1 y la suma de los cuadrados es mínima.

9. ***Costos*** Un contratista de mejorías caseras está pintando las paredes y el techo de una habitación rectangular. El volumen de la habitación es de 668.25 pies cúbicos. El costo de pintura de pared es de \$0.06 por pie cuadrado y el costo de pintura de techo es de \$0.11 por pie cuadrado. Encontrar las dimensiones de la habitación que den por resultado un mínimo costo para la pintura. ¿Cuál es el mínimo costo por la pintura?

10. ***Volumen máximo*** El material para construir la base de una caja abierta cuesta 1.5 veces más por unidad de área que el material para construir los lados. Dada una cantidad fija de dinero C, hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede ser fabricada.

11. ***Volumen máximo*** El volumen de un elipsoide

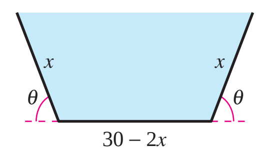
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

es $4\pi abc/3$. Dada una suma fija $a + b + c$, mostrar que el elipsoide de volumen máximo es una esfera.

12. ***Volumen máximo*** Mostrar que la caja rectangular de volumen máximo inscrita en una esfera de radio r es un cubo.

13. ***Volumen y área exterior*** Mostrar que una caja rectangular de volumen dado y área exterior mínima es un cubo.

14. ***Área*** Un comedero de secciones transversales en forma de trapecio se forma doblando los extremos de una lámina de aluminio de 30 pulgadas de ancho (ver la figura). Hallar la sección transversal de área máxima.



15. ***Ingreso máximo*** Una empresa fabrica dos tipos de zapatos tenis, tenis para correr y tenis para baloncesto. El ingreso total de x_1 unidades de tenis para correr y x_2 unidades de tenis de baloncesto es $R = -5x_1^2 - 8x_2^2 - 2x_1x_2 + 42x_1 + 102x_2$, donde x_1 y x_2 están en miles de unidades. Hallar las x_1 y x_2 que maximizan el ingreso.

16. ***Ganancia o beneficio máximo*** Una empresa fabrica velas en dos lugares. El costo de producción de x_1 unidades en el lugar 1 es

$$C_1 = 0.02x_1^2 + 4x_1 + 500$$

y el costo de producción de x_2 unidades en el lugar 2 es

$$C_2 = 0.05x_2^2 + 4x_2 + 275.$$

Las velas se venden a $15 por unidad. Hallar la cantidad que debe producirse en cada lugar para aumentar al máximo el beneficio $P = 15(x_1 + x_2) - C_1 - C_2$.

17. ***Ley de Hardy-Weinberg*** Los tipos sanguíneos son genéticamente determinados por tres alelos A, B y O. (Alelo es cualquiera de las posibles formas de mutación de un gen.) Una persona cuyo tipo sanguíneo es AA, BB u OO es homocigótica. Una persona cuyo tipo sanguíneo es AB, AO o BO es heterocigótica. La ley Hardy-Weinberg establece que la proporción P de individuos heterocigótica en cualquier población dada es

$$P(p, q, r) = 2pq + 2pr + 2qr$$

donde p representa el porcentaje de alelos A en la población, q representa el porcentaje de alelos B en la población y r representa el porcentaje de alelos O en la población. Utilizar el hecho de que $p + q + r = 1$ para mostrar que la proporción máxima de individuos heterocigóticos en cualquier población es $\frac{2}{3}$.

18. ***Índice de diversidad de Shannon*** Una forma de medir diversidad de especies es usar el índice de diversidad de Shannon H. Si un hábitat consiste de tres especies, A, B y C, su índice de diversidad de Shannon es

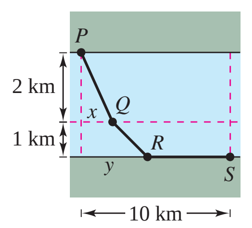
$$H = -x \ln x - y \ln y - z \ln z$$

donde x es el porcentaje de especies A en el hábitat, y es el porcentaje de especies B en el hábitat y z es el porcentaje de especies C en el hábitat.

a) Usar el factor de $x + y + z = 1$ para demostrar que el valor máximo de H ocurre cuando $x = y = z = \frac{1}{3}$.

b) Usar el resultado del inciso *a*) para demostrar que el valor máximo de H en este hábitat es de ln 3.

19. ***Costo mínimo*** Hay que construir un conducto para agua desde el punto P al punto S y debe atravesar regiones donde los costos de construcción difieren (ver la figura). El costo por kilómetro en dólares es $3k$ de P a Q, $2k$ de Q a R y k de R a S. Hallar x y y tales que el costo total C se minimice.



20. ***Distancia*** Una empresa tiene tres tiendas de ventas al menudeo localizadas en los puntos (0, 0), (2, 2) y (−2, 2) (ver la figura). La dirección planea construir un centro de distribución localizado de tal manera que la suma S de las distancias del centro a las tiendas sea mínimo. Por la simetría del problema es claro que el centro de distribución se localizará en el eje y, y por consiguiente S es una función de una variable y. Utilizando las técnicas presentadas en el capítulo 3, calcular el valor de y requerido.

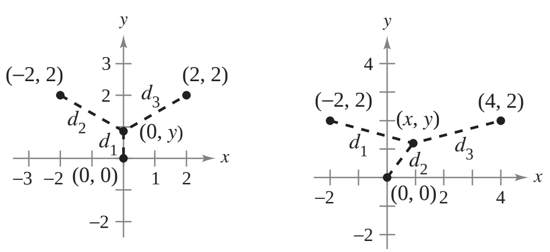


Figura para 20 **Figura para 21**

CAS **21.** ***Investigación*** Las tiendas de ventas al menudeo descritas en el ejercicio 20 se localizan en (0, 0), (4, 2) y (−2, 2) (ver la figura). La localización del centro de distribución es (x, y), y por consiguiente la suma S de las distancias es una función de x y y.

a) Escribir la expresión que da la suma S de las distancias. Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar S. ¿Tiene esta superficie un mínimo?

b) Utilizar un sistema algebraico por computadora y obtener S_x y S_y. Observar que resolver el sistema $S_x = 0$ y $S_y = 0$ es muy difícil. Por tanto, aproximar la localización del centro de distribución.

c) Una estimación inicial del punto crítico es $(x_1, y_1) = (1, 1)$. Calcular $-\nabla S(1, 1)$ con componentes $-S_x(1, 1)$ y $-S_y(1, 1)$. ¿Qué dirección es la dada por el vector $-\nabla S(1, 1)$?

d) La segunda estimación del punto crítico es

$$(x_2, y_2) = (x_1 - S_x(x_1, y_1)t, y_1 - S_y(x_1, y_1)t).$$

Si se sustituyen estas coordenadas en $S(x, y)$, entonces S se convierte en una función de una variable t. Hallar el valor de t que minimiza S. Utilizar este valor de t para estimar (x_2, y_2).

e) Realizar dos iteraciones más del proceso del inciso *d*) para obtener (x_4, y_4). Dada esta localización del centro de distribución, ¿cuál es la suma de las distancias a las tiendas al menudeo?

f) Explicar por qué se usó $-\nabla S(x, y)$ para aproximar el valor mínimo de S. ¿En qué tipo de problemas se usaría $\nabla S(x, y)$?

22. ***Investigación*** Repetir el ejercicio 21 con tiendas de ventas al menudeo localizadas en los puntos $(-4, 0)$, $(1, 6)$ y $(12, 2)$.

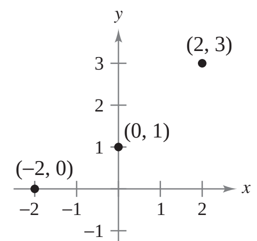
Desarrollo de conceptos

23. Con las propias palabras, describir la estrategia para la solución de problemas de aplicación de mínimos y máximos.

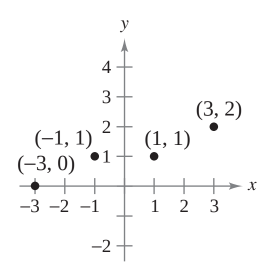
24. Con las propias palabras, describir el método de mínimos cuadrados para elaborar modelos matemáticos.

En los ejercicios 25 a 28, *a*) hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados y *b*) calcular *S*, la suma de los errores al cuadrado. Utilizar el programa para regresión de una herramienta de graficación para verificar los resultados.

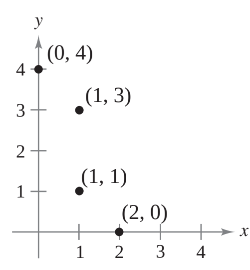
25.



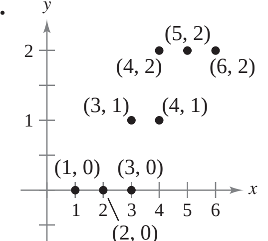
26.



27.



28.



En los ejercicios 29 a 32, hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados para los puntos dados. Utilizar el programa de regresión de una herramienta de graficación para verificar los resultados. Utilizar la herramienta de graficación para trazar los puntos y representar la recta de regresión.

29. $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(3, 4)$, $(4, 2)$, $(5, 5)$

30. $(1, 0)$, $(3, 3)$, $(5, 6)$

31. $(0, 6)$, $(4, 3)$, $(5, 0)$, $(8, -4)$, $(10, -5)$

32. $(6, 4)$, $(1, 2)$, $(3, 3)$, $(8, 6)$, $(11, 8)$, $(13, 8)$

33. ***Modelo matemático*** En la tabla se muestran las edades x (en años) y las presiones arteriales sistólicas y de siete hombres.

Edad, x	16	25	39	45	49	64	70
Presión arterial sistólica, y	109	122	150	165	159	183	199

a) Utilizar el programa de regresión de una herramienta de graficación para hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados para los datos.

b) Utilizar una herramienta de graficación para trazar los datos y representar el modelo.

c) Utilizar el modelo para aproximar la variación en la presión arterial sistólica por cada incremento de un año en la edad.

34. ***Modelo matemático*** El gerente de tienda quiere conocer la demanda y de una barra de energía en función del precio x. Las ventas diarias a tres precios diferentes de la barra de energía se muestran en la tabla.

Precio, x	\$1.29	\$1.49	\$1.69
Demanda, y	450	375	330

a) Utilizar el programa de regresión de una herramienta de graficación para hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados para los datos.

b) Usar el modelo para estimar la demanda cuando el precio es \$1.59.

35. ***Modelo matemático*** Un agrónomo prueba cuatro fertilizantes en los campos de cultivo para determinar la relación entre la producción de trigo y (en bushels por acre) y la cantidad de fertilizante x (en cientos de libras por acre). Los resultados se muestran en la tabla.

Fertilizante, x	1.0	1.5	2.0	2.5
Rendimiento, y	32	41	48	53

Utilizar el programa de regresión de una herramienta de graficación para hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados para los datos, y estimar la producción para una aplicación de 160 libras de fertilizante por acre.

36. ***Modelo matemático*** La tabla muestra los porcentajes x y los números y (en millones) de mujeres en la fuerza laboral en determinados años. *(Fuente: U.S. Bureau of Labor Statistics)*

Año	1970	1975	1980	1985
Porcentaje, x	43.3	46.3	51.5	54.5
Número, y	31.5	37.5	45.5	51.1

Año	1990	1995	2000	2005
Porcentaje, x	57.5	58.9	59.9	59.3
Número, y	56.8	60.9	66.3	69.3



a) Utilizar el programa para regresión de una herramienta de graficación para hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados para los datos.

b) Según este modelo, ¿aproximadamente cuántas mujeres ingresan a la fuerza laboral por cada incremento de un punto en el porcentaje de mujeres en la fuerza laboral?

37. Hallar un sistema de ecuaciones cuya solución proporcione los coeficientes a, b y c para el modelo cuadrático de regresión de mínimos cuadrados $y = ax^2 + bx + c$ para los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ minimizando la suma

$$S(a, b, c) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2.$$

Para discusión

38. La suma de las longitudes y el tamaño (perímetro de una sección transversal) de un paquete llevado por un servicio de entrega a domicilio no puede exceder 108 pulgadas. Encontrar las dimensiones del paquete rectangular de más grande volumen que puede ser enviado.

En los ejercicios 39 a 42, utilizar el resultado del ejercicio 37 para hallar el modelo cuadrático de regresión de mínimos cuadrados para los puntos dados. Usar el programa de regresión de una herramienta de graficación para confirmar los resultados. Utilizar la herramienta de graficación para trazar los puntos y representar la curva de regresión de mínimos cuadrados.

39. $(-2, 0), (-1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 5)$

40. $(-4, 5), (-2, 6), (2, 6), (4, 2)$

41. $(0, 0), (2, 2), (3, 6), (4, 12)$ **42.** $(0, 10), (1, 9), (2, 6), (3, 0)$



43. ***Modelo matemático*** Después de que fue desarrollado un nuevo turbopropulsor para un motor de automóvil, se obtuvieron los datos experimentales siguientes de velocidad y en millas por hora a intervalos x de dos segundos.

Tiempo, x	0	2	4	6	8	10
Velocidad, y	0	15	30	50	65	70

a) Hallar un modelo cuadrático de regresión de mínimos cuadrados para los datos. Utilizar una herramienta de graficación para confirmar los resultados.

b) Utilizar una herramienta de graficación para trazar los puntos y representar el modelo.



44. ***Modelo matemático*** La tabla muestra la población mundial y (en miles de millones) para cinco diferentes años. Considerar que $x = 8$ representa el año 2008. *(Fuente: U.S. Census Bureau, International Data Base)*

Año, x	1998	2000	2002	2004	2006
Población, y	5.9	6.1	6.2	6.4	6.5

a) Utilizar el programa de regresión de una herramienta de graficación para hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados para los datos.

b) Utilizar el programa de regresión de una herramienta de graficación para hallar el modelo cuadrático de regresión de mínimos cuadrados para los datos.

c) Utilizar una herramienta de graficación para trazar los datos y representar los modelos.

d) Utilizar ambos modelos para estimar la población mundial en el año 2014. ¿Cómo difieren los dos modelos cuando se extrapola hacia el futuro?



45. ***Modelo matemático*** Un meteorólogo mide la presión atmosférica P (en kilogramos por metro cuadrado) a una altitud h (en kilómetros). Los datos se muestran en la tabla.

Altitud, h	0	5	10	15	20
Presión, P	10 332	5 583	2 376	1 240	517

a) Utilizar el programa de regresión de una herramienta de graficación para hallar una recta de regresión de mínimos cuadrados para los puntos $(h, \ln P)$.

b) El resultado del inciso *a*) es una ecuación de la forma $\ln P = ah + b$. Expresar esta forma logarítmica en forma exponencial.

c) Utilizar una herramienta de graficación para trazar los datos originales y representar el modelo exponencial del inciso *b*).

d) Si una herramienta de graficación puede ajustar modelos logarítmicos a datos, utilizarla para verificar el resultado del inciso *b*).



46. ***Modelo matemático*** Los puntos terminales del intervalo de visión se llaman punto próximo y punto lejano del ojo. Con la edad, estos puntos cambian. La tabla muestra los puntos próximos y (en pulgadas) a varias edades x (en años). *(Fuente: Ophtalmology & Physiological Optics)*

Edad, x	16	32	44	50	60
Punto próximo, y	3.0	4.7	9.8	19.7	39.4

a) Hallar un modelo racional para los datos tomando el recíproco o inverso de los puntos próximos para generar los puntos $(x, 1/y)$. Utilizar el programa para regresión de una herramienta de graficación para hallar una recta de regresión de mínimos cuadrados para los datos revisados. La recta resultante tiene la forma $1/y = ax + b$. Despejar y.

b) Utilizar una herramienta de graficación para trazar los datos y representar el modelo.

c) ¿Puede utilizarse el modelo para predecir el punto próximo en una persona de 70 años? Explicar.

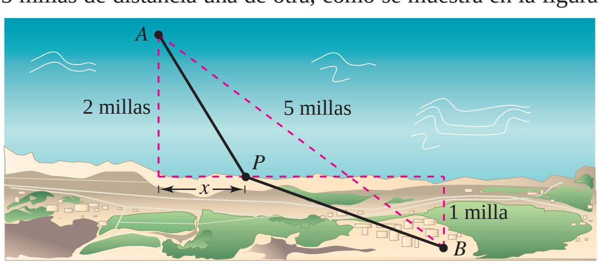
47. Usar el criterio de las segundas derivadas parciales para verificar que las fórmulas para a y b proporcionadas en el teorema 13.18 llevan a un mínimo.

$\left[\textit{Sugerencia:} \text{ Considerar el hecho que } n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2.\right]$

PROYECTO DE TRABAJO

Construcción de un oleoducto

Una empresa petrolera desea construir un oleoducto desde su plataforma A hasta su refinería B. La plataforma está a 2 millas de la costa, y la refinería está 1 milla tierra adentro. Además, A y B están a 5 millas de distancia una de otra, como se muestra en la figura.



El costo de construcción del oleoducto es \$3 millones por milla en el mar, y \$4 millones por milla en tierra. Por tanto, el costo del oleoducto depende de la localización del punto P en la orilla. ¿Cuál sería la ruta más económica para el oleoducto?

Imaginar que hay que redactar un informe para la empresa petrolera acerca de este problema. Sea x la distancia mostrada en la figura. Determinar el costo de construir el oleoducto de A a P, y el costo de P a B. Analizar alguna trayectoria muestra para el oleoducto y sus costos correspondientes. Por ejemplo, ¿cuál es el costo de la ruta más directa? Utilizar después el cálculo para determinar la ruta del oleoducto que minimiza el costo. Explicar todos los pasos del desarrollo e incluir una gráfica pertinente.

13.10 Multiplicadores de Lagrange

- **Entender el método de los multiplicadores de Lagrange.**
- **Utilizar los multiplicadores de Lagrange para resolver problemas de optimización con restricciones.**
- **Utilizar el método de multiplicadores de Lagrange con dos restricciones.**

Multiplicadores de Lagrange

JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736-1813)

El método de los multiplicadores de Lagrange debe su nombre al matemático francés Joseph Louis Lagrange. Lagrange presentó el método por primera vez en su famoso trabajo sobre mecánica, escrito cuando tenía apenas 19 años.

Muchos problemas de optimización tienen **restricciones**, o **ligaduras**, para los valores que pueden usarse para dar la solución óptima. Tales restricciones tienden a complicar los problemas de optimización porque la solución óptima puede presentarse en un punto frontera del dominio. En esta sección se estudia una ingeniosa técnica para resolver tales problemas. Es el **método de los multiplicadores de Lagrange**.

Para ver cómo funciona esta técnica, supóngase que se quiere hallar el rectángulo de área máxima que puede inscribirse en la elipse dada por

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1.$$

Sea (x, y) el vértice del rectángulo que se encuentra en el primer cuadrante, como se muestra en la figura 13.78. Como el rectángulo tiene lados de longitudes $2x$ y $2y$, su área está dada por

$$f(x, y) = 4xy. \qquad \text{Función objetivo.}$$

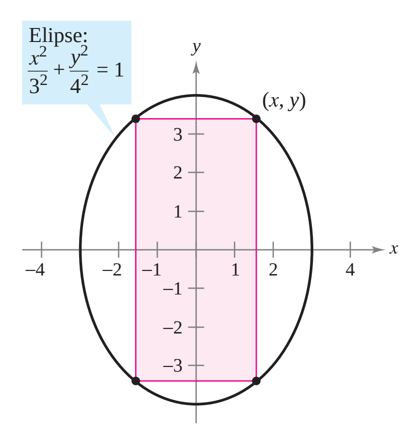
Se quieren hallar x y y tales que $f(x, y)$ es un máximo. La elección de (x, y) está restringida a puntos del primer cuadrante que están en la elipse

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1. \qquad \text{Restricción.}$$

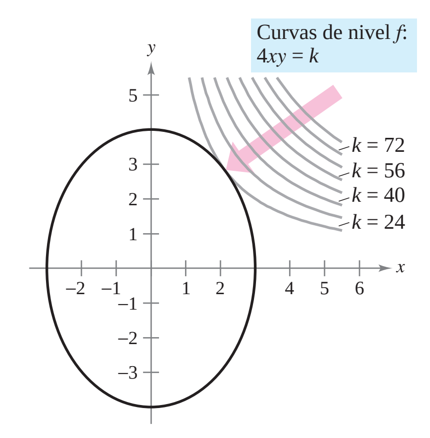
Ahora, considérese la ecuación restrictiva o de ligadura como una curva de nivel fija de

$$g(x, y) = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2}.$$

Las curvas de nivel de f representan una familia de hipérbolas $f(x, y) = 4xy = k$. En esta familia, las curvas de nivel que satisfacen la restricción dada corresponden a hipérbolas que cortan a la elipse. Es más, para maximizar $f(x, y)$, se quiere hallar la hipérbola que justo satisfaga la restricción. La curva de nivel que hace esto es la que es *tangente* a la elipse, como se muestra en la figura 13.79.



Función objetivo: $f(x, y) = 4xy$
Figura 13.78



Restricción: $g(x, y) = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$
Figura 13.79

Para encontrar la hipérbola apropiada se usa el hecho de que dos curvas son tangentes en un punto si y sólo si sus vectores gradiente son paralelos. Esto significa que $\nabla f(x, y)$ debe ser un múltiplo escalar de $\nabla g(x, y)$ en el punto de tangencia. En el contexto de los problemas de optimización con restricciones, este escalar se denota con la letra griega λ (*lambda* minúscula del alfabeto griego).

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$$

Al escalar λ se le conoce como un **multiplicador de Lagrange**. El teorema 13.19 da las condiciones necesarias para la existencia de tales multiplicadores.

TEOREMA 13.19 TEOREMA DE LAGRANGE

Sean f y g funciones con primeras derivadas parciales continuas, y tales que f tiene un extremo en un punto (x_0, y_0) sobre la curva suave de restricción $g(x, y) = c$. Si $\nabla g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, entonces existe un número real λ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

DEMOSTRACIÓN Para empezar, se representa la curva suave dada por $g(x, y) = c$ mediante la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad \mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$$

donde x' y y' son continuas en un intervalo abierto I. Se define la función h como $h(t) = f(x(t), y(t))$. Entonces, como $f(x_0, y_0)$ es un valor extremo de f, se sabe que

$$h(t_0) = f(x(t_0), y(t_0)) = f(x_0, y_0)$$

es un valor extremo de h. Esto implica que $h'(t_0) = 0$, y, por la regla de la cadena,

$$h'(t_0) = f_x(x_0, y_0)x'(t_0) + f_y(x_0, y_0)y'(t_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0.$$

Así, $\nabla f(x_0, y_0)$ es ortogonal a $\mathbf{r}'(t_0)$. Por el teorema 13.12, $\nabla g(x_0, y_0)$ también es ortogonal a $\mathbf{r}'(t_0)$. Por consiguiente, los gradientes $\nabla f(x_0, y_0)$ y $\nabla g(x_0, y_0)$ son paralelos y debe existir un escalar λ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

NOTA Se puede demostrar que el teorema de Lagrange también es válido para funciones de tres variables, usando un argumento similar con superficies de nivel y con el teorema 13.14. ■

El método de los multiplicadores de Lagrange emplea el teorema 13.19 para encontrar los valores extremos de una función f sujeta a una restricción.

MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Sean f y g funciones que satisfacen las hipótesis del teorema de Lagrange, y sea f una función que tiene un mínimo o un máximo sujeto a la restricción $g(x, y) = c$. Para hallar el mínimo o el máximo de f, seguir los pasos descritos a continuación.

1. Resolver simultáneamente las ecuaciones $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ y $g(x, y) = c$ resolviendo el sistema de ecuaciones siguiente.

$$f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y)$$
$$f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y)$$
$$g(x, y) = c$$

2. Evaluar f en cada punto solución obtenido en el primer paso. El valor mayor da el máximo de f sujeto a la restricción $g(x, y) = c$, y el valor menor da el mínimo de f sujeto a la restricción $g(x, y) = c$.

NOTA Como se verá en los ejemplos 1 y 2, el método de los multiplicadores de Lagrange requiere resolver sistemas de ecuaciones no lineales. Esto a menudo requiere de alguna manipulación algebraica ingeniosa. ■

Problemas de optimización con restricciones o ligaduras

En el problema presentado al principio de esta sección, se quería maximizar el área de un rectángulo inscrito en una elipse. El ejemplo 1 muestra cómo usar los multiplicadores de Lagrange para resolver este problema.

EJEMPLO 1 Multiplicador de Lagrange con una restricción o ligadura

Hallar el valor máximo de $f(x, y) = 4xy$ donde $x > 0$ y $y > 0$, sujeto a la restricción $(x^2/3^2) + (y^2/4^2) = 1$.

NOTA El ejemplo 1 también puede resolverse utilizando las técnicas aprendidas en el capítulo 3. Para ver cómo se hace esto, calcular el valor máximo de $A = 4xy$ dado que

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1.$$

Para empezar, de la segunda ecuación se despeja y y se obtiene

$$y = \tfrac{4}{3}\sqrt{9 - x^2}.$$

Después se sustituye este valor en la primera ecuación para obtener

$$A = 4x\left(\tfrac{4}{3}\sqrt{9 - x^2}\right).$$

Por último, se usan las técnicas del capítulo 3 para maximizar A. ■

Solución Para comenzar, sea

$$g(x, y) = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1.$$

Igualando $\nabla f(x, y) = 4y\mathbf{i} + 4x\mathbf{j}$ y $\lambda \nabla g(x, y) = (2\lambda x/9)\mathbf{i} + (\lambda y/8)\mathbf{j}$, se puede obtener el sistema de ecuaciones siguiente.

$$4y = \frac{2}{9}\lambda x \qquad f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y).$$

$$4x = \frac{1}{8}\lambda y \qquad f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y).$$

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1 \qquad \text{Restricción.}$$

De la primera ecuación, se obtiene $\lambda = 18y/x$, que sustituido en la segunda ecuación da

$$4x = \frac{1}{8}\left(\frac{18y}{x}\right)y \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{9}{16}y^2.$$

Sustituyendo en la tercera ecuación x^2 por este valor se tiene

$$\frac{1}{9}\left(\frac{9}{16}y^2\right) + \frac{1}{16}y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 8.$$

Así, $y = \pm 2\sqrt{2}$. Como se requiere que $y > 0$, se elige el valor positivo y se halla que

$$x^2 = \frac{9}{16}y^2$$

$$= \frac{9}{16}(8) = \frac{9}{2}$$

$$x = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Por tanto, el valor máximo de f es

$$f\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}\right) = 4xy = 4\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left(2\sqrt{2}\right) = 24.$$

Nótese que el expresar la restricción como

$$g(x, y) = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1 \qquad \text{o} \qquad g(x, y) = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} - 1 = 0$$

no afecta la solución, la constante se elimina cuando se calcula ∇g.

EJEMPLO 2 Una aplicación a la economía

La función de producción de Cobb-Douglas (ver ejemplo 5, sección 13.1) para un fabricante de software está dada por

$$f(x, y) = 100x^{3/4}y^{1/4} \qquad \text{Función objetivo.}$$

donde x representa las unidades de trabajo (a \$150 por unidad) y y representa las unidades de capital (a \$250 por unidad). El costo total de trabajo y capital está limitado a \$50 000. Hallar el nivel máximo de producción de este fabricante.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre la utilización de los multiplicadores de Lagrange en economía, ver el artículo "Lagrange Multiplier Problems in Economics" de John V. Baxley y John C. Moorhouse en *The American Mathematical Monthly*.

Solución De la función dada, se tiene

$$\nabla f(x, y) = 75x^{-1/4}y^{1/4}\mathbf{i} + 25x^{3/4}y^{-3/4}\mathbf{j}.$$

El límite para el costo de trabajo y capital se refleja en la restricción o ligadura

$$g(x, y) = 150x + 250y = 50\,000. \qquad \text{Restricción.}$$

Así, $\lambda\nabla g(x, y) = 150\lambda\mathbf{i} + 250\lambda\mathbf{j}$. Esto da lugar al sistema de ecuaciones siguiente.

$$\begin{aligned} 75x^{-1/4}y^{1/4} &= 150\lambda && f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y).\\ 25x^{3/4}y^{-3/4} &= 250\lambda && f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y).\\ 150x + 250y &= 50\,000 && \text{Restricción.} \end{aligned}$$

Resolviendo para λ en la primera ecuación

$$\lambda = \frac{75x^{-1/4}y^{1/4}}{150} = \frac{x^{-1/4}y^{1/4}}{2}$$

y despejando λ de la segunda ecuación, se obtiene

$$\begin{aligned} 25x^{3/4}y^{-3/4} &= 250\left(\frac{x^{-1/4}y^{1/4}}{2}\right)\\ 25x &= 125y. && \text{Multiplicar por } x^{1/4}y^{3/4}. \end{aligned}$$

Así, $x = 5y$. Sustituyendo en la tercera ecuación, se tiene

$$\begin{aligned} 150(5y) + 250y &= 50\,000\\ 1\,000y &= 50\,000\\ y &= 50 \text{ unidades de capital}\\ x &= 250 \text{ unidades de trabajo.} \end{aligned}$$

Por tanto, el nivel máximo de producción es

$$\begin{aligned} f(250, 50) &= 100(250)^{3/4}(50)^{1/4}\\ &\approx 16\,719 \text{ unidades del producto.} \end{aligned}$$

Los economistas llaman al multiplicador de Lagrange obtenido en una función de producción **productividad marginal del capital**. Por ejemplo, en el ejemplo 2 la productividad marginal de capital en $x = 250$ y $y = 50$ es

$$\lambda = \frac{x^{-1/4}y^{1/4}}{2} = \frac{(250)^{-1/4}(50)^{1/4}}{2} \approx 0.334$$

lo cual significa que por cada dólar adicional gastado en la producción, puede producirse 0.334 unidades adicionales del producto.

EJEMPLO 3 Multiplicadores de Lagrange y tres variables

Hallar el valor mínimo de

$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2 \qquad \text{Función objetivo.}$$

sujeto a la restricción o ligadura $2x - 3y - 4z = 49$.

Solución Sea $g(x, y, z) = 2x - 3y - 4z = 49$. Entonces, como

$$\nabla f(x, y, z) = 4x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 6z\mathbf{k} \qquad \text{y} \qquad \lambda\nabla g(x, y, z) = 2\lambda\mathbf{i} - 3\lambda\mathbf{j} - 4\lambda\mathbf{k}$$

se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente.

$$4x = 2\lambda \qquad f_x(x, y, z) = \lambda g_x(x, y, z).$$

$$2y = -3\lambda \qquad f_y(x, y, z) = \lambda g_y(x, y, z).$$

$$6z = -4\lambda \qquad f_z(x, y, z) = \lambda g_z(x, y, z).$$

$$2x - 3y - 4z = 49 \qquad \text{Restricción.}$$

La solución de este sistema es $x = 3$, $y = -9$ y $z = -4$. Por tanto, el valor óptimo de f es

$$f(3, -9, -4) = 2(3)^2 + (-9)^2 + 3(-4)^2$$
$$= 147.$$

De la función original y de la restricción, resulta claro que $f(x, y, z)$ no tiene máximo. Por tanto, el valor óptimo de f determinado arriba es un mínimo.

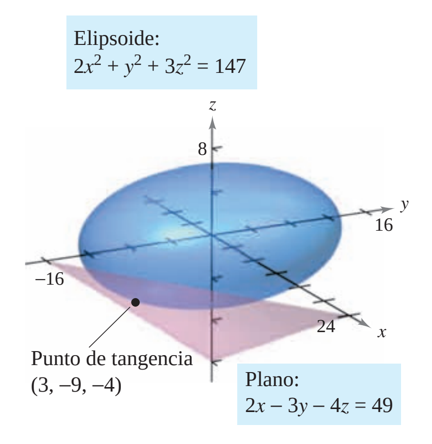


Figura 13.80

Al principio de esta sección se dio una interpretación gráfica del problema de optimización con restricciones para dos variables. Con tres variables, la interpretación es similar, sólo que se usan superficies de nivel en lugar de curvas de nivel. Así, en el ejemplo 3, las superficies de nivel de f son elipsoides centradas en el origen, y la restricción

$$2x - 3y - 4z = 49$$

es un plano. El valor mínimo de f está representado por la elipsoide tangente al plano de la restricción, como se muestra en la figura 13.80.



EJEMPLO 4 Optimización en el interior de una región

Hallar los valores extremos de

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2x + 3 \qquad \text{Función objetivo.}$$

sujeto a la restricción $x^2 + y^2 \le 10$.

Solución Para resolver este problema, se puede dividir la restricción en dos casos.

a) Para los puntos *en el círculo* $x^2 + y^2 = 10$, se pueden usar los multiplicadores de Lagrange para hallar que el valor máximo de $f(x, y)$ es 24; este valor se presenta en $(-1, 3)$ y en $(-1, -3)$. De manera similar, se puede determinar que el valor mínimo de $f(x, y)$ es aproximadamente 6.675; este valor se presenta en $(\sqrt{10}, 0)$.

b) Para los puntos *interiores al círculo*, se pueden usar las técnicas analizadas en la sección 13.8 para concluir que la función tiene un mínimo relativo de 2 en el punto (1, 0).

Combinando estos dos resultados, se puede concluir que f tiene un máximo de 24 en $(-1, \pm 3)$ y un mínimo de 2 en (1, 0), como se muestra en la figura 13.81.

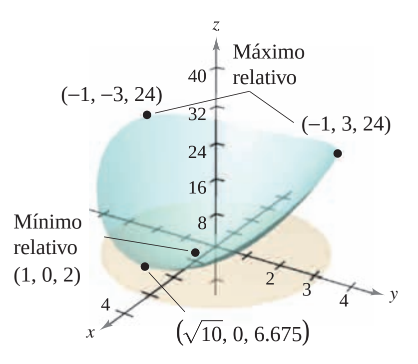


Figura 13.81

El método de multiplicadores de Lagrange con dos restricciones

En problemas de optimización que involucran *dos* funciones de restricción g y h, se puede introducir un segundo multiplicador de Lagrange, μ (letra minúscula *mu* del alfabeto griego), y resolver la ecuación

$$\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$$

donde los vectores gradiente no son paralelos, como se ilustra en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Optimización con dos restricciones

Sea $T(x, y, z) = 20 + 2x + 2y + z^2$ la temperatura en cada punto en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 11$. Hallar las temperaturas extremas en la curva formada por la intersección del plano $x + y + z = 3$ y la esfera.

Solución Las dos restricciones son

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 11 \qquad \text{y} \qquad h(x, y, z) = x + y + z = 3.$$

Usando

$$\nabla T(x, y, z) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$
$$\lambda \nabla g(x, y, z) = 2\lambda x\mathbf{i} + 2\lambda y\mathbf{j} + 2\lambda z\mathbf{k}$$

y

$$\mu \nabla h(x, y, z) = \mu\mathbf{i} + \mu\mathbf{j} + \mu\mathbf{k}$$

se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente.

$$2 = 2\lambda x + \mu \qquad T_x(x, y, z) = \lambda g_x(x, y, z) + \mu h_x(x, y, z).$$
$$2 = 2\lambda y + \mu \qquad T_y(x, y, z) = \lambda g_y(x, y, z) + \mu h_y(x, y, z).$$
$$2z = 2\lambda z + \mu \qquad T_z(x, y, z) = \lambda g_z(x, y, z) + \mu h_z(x, y, z).$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 11 \qquad \text{Restricción 1.}$$
$$x + y + z = 3 \qquad \text{Restricción 2.}$$

Restando la segunda ecuación de la primera, se obtiene el sistema siguiente.

AYUDA DE ESTUDIO El sistema de ecuaciones que se obtiene en el método de los multiplicadores de Lagrange no es, en general, un sistema lineal, y a menudo hallar la solución requiere de ingenio.

$$\lambda(x - y) = 0$$
$$2z(1 - \lambda) - \mu = 0$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 11$$
$$x + y + z = 3$$

De la primera ecuación, se concluye que $\lambda = 0$ o $x = y$. Si $\lambda = 0$, se puede demostrar que los puntos críticos son $(3, -1, 1)$ y $(-1, 3, 1)$. (Tratar de hacer esto toma un poco de trabajo.) Si $\lambda \neq 0$, entonces $x = y$ y se puede mostrar que los puntos críticos se presentan donde $x = y = \left(3 \pm 2\sqrt{3}\right)/3$ y $z = \left(3 \mp 4\sqrt{3}\right)/3$. Por último, para encontrar las soluciones óptimas, se deben comparar las temperaturas en los cuatro puntos críticos.

$$T(3, -1, 1) = T(-1, 3, 1) = 25$$
$$T\left(\frac{3 - 2\sqrt{3}}{3}, \frac{3 - 2\sqrt{3}}{3}, \frac{3 + 4\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{91}{3} \approx 30.33$$
$$T\left(\frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}, \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}, \frac{3 - 4\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{91}{3} \approx 30.33$$

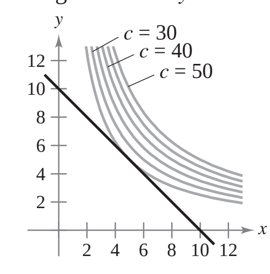
Así, $T = 25$ es la temperatura mínima y $T = \frac{91}{3}$ es la temperatura máxima en la curva.

13.10 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, identificar la restricción o ligadura y las curvas de nivel de la función objetivo mostradas en la figura. Utilizar la figura para aproximar el extremo indicado, suponiendo que x y y son positivos. Utilizar los multiplicadores de Lagrange para verificar el resultado.

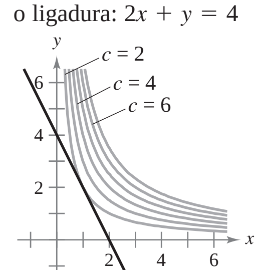
1. Maximizar $z = xy$

Restricción o ligadura: $x + y = 10$



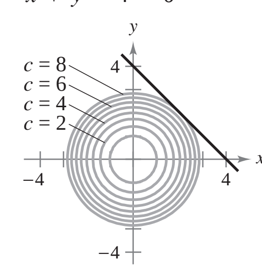
2. Maximizar $z = xy$

Restricción o ligadura: $2x + y = 4$



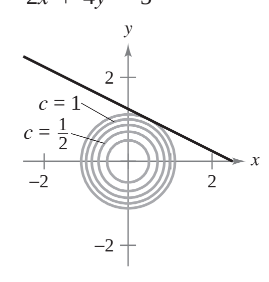
3. Minimizar $z = x^2 + y^2$

Restricción o ligadura: $x + y - 4 = 0$



4. Minimizar $z = x^2 + y^2$

Restricción o ligadura: $2x + 4y = 5$



En los ejercicios 5 a 10, utilizar multiplicadores de Lagrange para hallar el extremo indicado, suponer que x y y son positivos.

5. Minimizar $f(x, y) = x^2 + y^2$

Restricción: $x + 2y - 5 = 0$

6. Maximizar $f(x, y) = x^2 - y^2$

Restricción: $2y - x^2 = 0$

7. Maximizar $f(x, y) = 2x + 2xy + y$

Restricción: $2x + y = 100$

8. Minimizar $f(x, y) = 3x + y + 10$

Restricción: $x^2y = 6$

9. Maximizar $f(x, y) = \sqrt{6 - x^2 - y^2}$

Restricción: $x + y - 2 = 0$

10. Minimizar $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Restricción: $2x + 4y - 15 = 0$

En los ejercicios 11 a 14, utilizar los multiplicadores de Lagrange para hallar los extremos indicados, suponiendo que x, y y z son positivos.

11. Minimizar $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

Restricción o ligadura: $x + y + z - 9 = 0$

12. Maximizar $f(x, y, z) = xyz$

Restricción o ligadura: $x + y + z - 3 = 0$

13. Minimizar $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

Restricción: $x + y + z = 1$

14. Minimizar $f(x, y) = x^2 - 10x + y^2 - 14y + 28$

Restricción: $x + y = 10$

En los ejercicios 15 y 16, utilizar los multiplicadores de Lagrange para hallar todos los extremos de la función sujetos a la restricción $x^2 + y^2 \leq 1$.

15. $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$ **16.** $f(x, y) = e^{-xy/4}$

En los ejercicios 17 y 18, utilizar los multiplicadores de Lagrange para hallar los extremos de f indicados sujetos a dos restricciones. En cada caso, suponer que x, y y z son no negativos.

17. Maximizar $f(x, y, z) = xyz$

Restricción: $x + y + z = 32$, $x - y + z = 0$

18. Minimizar $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

Restricción: $x + 2z = 6$, $x + y = 12$

En los ejercicios 19 a 28, usar los multiplicadores de Lagrange para encontrar la distancia mínima desde la curva o superficie al punto indicado. [*Sugerencia:* En el ejercicio 19, minimizar $f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeta a la restricción $x + y = 1$. En el ejercicio 25, usar la operación raíz de una herramienta de graficación.]

	Curva	*Punto*
19.	Recta: $x + y = 1$	$(0, 0)$
20.	Recta: $2x + 3y = -1$	$(0, 0)$
21.	Recta: $x - y = 4$	$(0, 2)$
22.	Recta: $x + 4y = 3$	$(1, 0)$
23.	Parábola: $y = x^2$	$(0, 3)$
24.	Parábola: $y = x^2$	$(-3, 0)$
25.	Parábola: $y = x^2 + 1$	$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$
26.	Círculo: $(x - 4)^2 + y^2 = 4$	$(0, 10)$
	Superficie	*Punto*
27.	Plano: $x + y + z = 1$	$(2, 1, 1)$
28.	Cono: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$	$(4, 0, 0)$

En los ejercicios 29 y 30, hallar el punto más alto de la curva de intersección de las superficies.

29. Cono: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, Plano: $x + 2z = 4$

30. Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = 36$, Plano: $2x + y - z = 2$

Desarrollo de conceptos

31. Explicar qué se quiere decir con problemas de optimización con restricciones.

32. Explicar el método de los multiplicadores de Lagrange para resolver problemas de optimización con restricciones.

En los ejercicios 33 a 42, usar los multiplicadores de Lagrange para resolver el ejercicio indicado en la sección 13.9.

33. Ejercicio 1
34. Ejercicio 2
35. Ejercicio 5
36. Ejercicio 6
37. Ejercicio 9
38. Ejercicio 10
39. Ejercicio 11
40. Ejercicio 12
41. Ejercicio 17
42. Ejercicio 18

43. ***Volumen máximo*** Utilizar multiplicadores de Lagrange para determinar las dimensiones de la caja rectangular de volumen máximo que puede ser inscrita (con los bordes paralelos a los ejes de coordenadas) en el elipsoide $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) = 1$.

Para discusión

44. La suma de las longitudes y el tamaño (perímetro de una sección transversal) de un paquete llevado por un servicio de entrega a domicilio no puede exceder 108 pulgadas.

a) Determinar si los multiplicadores de Lagrange se pueden usar para encontrar las dimensiones del paquete rectangular de más grande volumen que puede ser enviado. Explicar el razonamiento.

b) Si se pueden usar los multiplicadores de Lagrange, encontrar las dimensiones. Comparar su respuesta con la obtenida en el ejercicio 38, sección 13.9.

45. ***Costo mínimo*** Un contenedor de carga (en forma de un sólido rectangular) debe tener un volumen de 480 pies cúbicos. La parte inferior costará \$5 por pie cuadrado para construir, y los lados y la parte superior costarán \$3 por pie cuadrado para construcción. Usar los multiplicadores de Lagrange para encontrar las dimensiones del contenedor de este tamaño que tiene costo mínimo.

46. ***Medias geométrica y aritmética***

a) Utilizar los multiplicadores de Lagrange para demostrar que el producto de tres números positivos x, y y z cuya suma tiene un valor constante S, es máximo cuando los tres números son iguales. Utilizar este resultado para demostrar que

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x + y + z}{3}.$$

b) Generalizar el resultado del inciso *a*) para demostrar que el producto $x_1 x_2 x_3 \cdot \cdot \cdot x_n$ es máximo cuando $x_1 = x_2 = x_3 = \cdot \cdot \cdot = x_n$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = S$, y todo $x_i \geq 0$. Después, demostrar que

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \cdot \cdot \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdot \cdot \cdot + x_n}{n}.$$

Esto demuestra que la media geométrica nunca es mayor que la media aritmética.

47. ***Superficie mínima*** Utilizar multiplicadores de Lagrange para encontrar las dimensiones de un cilindro circular recto con volumen de V_0 unidades cúbicas y superficie mínima.

48. ***Distribución de temperatura*** Sea $T(x, y, z) = 100 + x^2 + y^2$ la temperatura en cada punto sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 50$. Hallar la temperatura máxima en la curva formada por la intersección de la esfera y el plano $x - z = 0$.

49. ***Refracción de la luz*** Cuando las ondas de luz que viajan en un medio transparente atraviesan la superficie de un segundo medio transparente, tienden a "desviarse" para seguir la trayectoria de tiempo mínimo. Esta tendencia se llama refracción y está descrita por la **ley de refracción de Snell**, según la cual

$$\frac{\operatorname{sen} \theta_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen} \theta_2}{v_2}$$

donde θ_1 y θ_2 son las magnitudes de los ángulos mostrados en la figura, y v_1 y v_2 son las velocidades de la luz en los dos medios. Utilizar los multiplicadores de Lagrange para deducir esta ley usando $x + y = a$.

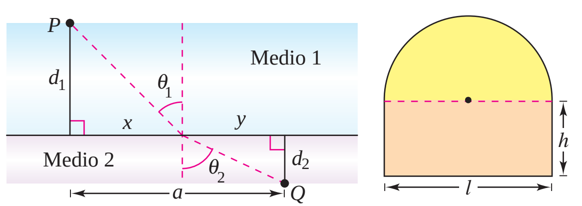


Figura para 49 **Figura para 50**

50. ***Área y perímetro*** Un semicírculo está sobre un rectángulo (ver la figura). Si el área es fija y el perímetro es un mínimo, o si el perímetro es fijo y el área es un máximo, utilizar multiplicadores de Lagrange para verificar que la longitud del rectángulo es el doble de su altura.

Nivel de producción **En los ejercicios 51 y 52, hallar el máximo nivel de producción *P* si el costo total de trabajo (a \$72 por unidad) y capital (a \$60 por unidad) está restringido a \$250 000, donde *x* es el número de unidades de trabajo y *y* es el número de unidades de capital.**

51. $P(x, y) = 100x^{0.25}y^{0.75}$
52. $P(x, y) = 100x^{0.4}y^{0.6}$

Costo **En los ejercicios 53 y 54, hallar el costo mínimo para producir 50 000 unidades de un producto donde *x* es el número de unidades de trabajo (a \$72 por unidad) y *y* es el número de unidades de capital (a \$60 por unidad).**

53. $P(x, y) = 100x^{0.25}y^{0.75}$
54. $P(x, y) = 100x^{0.6}y^{0.4}$

55. ***Investigación*** Considerar la función objetivo $g(\alpha, \beta, \gamma) = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$ sujeta a la restricción o ligadura de que α, β y γ sean los ángulos de un triángulo.

a) Utilizar los multiplicadores de Lagrange para maximizar g.

CAS *b*) Utilizar la restricción o ligadura para reducir la función g a una función de dos variables independientes. Utilizar un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente la superficie definida por g. Identificar en la gráfica los valores máximos.

Preparación del examen Putman

56. Una boya está hecha de tres piezas, a saber, un cilindro y dos conos iguales, la altura de cada uno de los conos es igual a la altura del cilindro. Para una superficie dada, ¿con qué forma se tendrá el volumen máximo?

13 Ejercicios de repaso

En los ejercicios 1 y 2, trazar la gráfica de la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en el valor dado de c.

1. $f(x, y, z) = x^2 - y + z^2, \quad c = 2$
2. $f(x, y, z) = 4x^2 - y^2 + 4z^2, \quad c = 0$

3. ***Conjetura*** Considerar la función $f(x, y) = x^2 + y^2$.

   a) Trazar la gráfica de la superficie dada por f.

   b) Conjeturar la relación entre las gráficas de f y $g(x, y) = f(x, y) + 2$. Explicar el razonamiento.

   c) Conjeturar la relación entre las gráficas de f y $g(x, y) = f(x, y - 2)$. Explicar el razonamiento.

   d) Sobre la superficie en el inciso *a*), trazar las gráficas de $z = f(1, y)$ y $z = f(x, 1)$.

4. ***Conjetura*** Considerar la función

   $$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

   a) Trazar la gráfica de la superficie dada por f.

   b) Conjeturar la relación entre las gráficas de f y $g(x, y) = f(x + 2, y)$. Explicar el razonamiento.

   c) Conjeturar la relación entre las gráficas de f y $g(x, y) = 4 - f(x, y)$. Explicar el razonamiento.

   d) Sobre la superficie en el inciso *a*), trazar las gráficas de $z = f(0, y)$ y $z = f(x, 0)$.

CAS **En los ejercicios 5 a 8, utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente algunas de las curvas de nivel de la función.**

5. $f(x, y) = e^{x^2 + y^2}$
6. $f(x, y) = \ln xy$
7. $f(x, y) = x^2 - y^2$
8. $f(x, y) = \dfrac{x}{x + y}$

CAS **En los ejercicios 9 y 10, utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la función.**

9. $f(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}$
10. $g(x, y) = |y|^{1 + |x|}$

En los ejercicios 11 a 14, hallar el límite y analizar la continuidad de la función (si existe).

11. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(1, 1)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$
12. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(1, 1)} \frac{xy}{x^2 - y^2}$
13. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{y + xe^{-y^2}}{1 + x^2}$
14. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$

En los ejercicios 15 a 24, hallar todas las primeras derivadas parciales.

15. $f(x, y) = e^x \cos y$
16. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x + y}$
17. $z = e^{-y} + e^{-x}$
18. $z = \ln(x^2 + y^2 + 1)$
19. $g(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$
20. $w = \sqrt{x^2 - y^2 - z^2}$
21. $f(x, y, z) = z \arctan \dfrac{y}{x}$
22. $f(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}}$
23. $u(x, t) = ce^{-n^2t} \operatorname{sen} nx$
24. $u(x, t) = c \operatorname{sen}(akx) \cos kt$

25. ***Para pensar*** Dibujar una gráfica de una función $z = f(x, y)$ cuyas derivadas f_x y f_y sean siempre negativas.

26. Hallar las pendientes de la superficie $z = x^2 \ln(y + 1)$ en las direcciones x y y en el punto $(2, 0, 0)$.

En los ejercicios 27 a 30, hallar todas las segundas derivadas parciales y verificar que las segundas derivadas parciales mixtas son iguales.

27. $f(x, y) = 3x^2 - xy + 2y^3$
28. $h(x, y) = \dfrac{x}{x + y}$
29. $h(x, y) = x \operatorname{sen} y + y \cos x$
30. $g(x, y) = \cos(x - 2y)$

Ecuación de Laplace **En los ejercicios 31 a 34, mostrar que la función satisface la ecuación de Laplace**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

31. $z = x^2 - y^2$
32. $z = x^3 - 3xy^2$
33. $z = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$
34. $z = e^y \operatorname{sen} x$

En los ejercicios 35 y 36, hallar la diferencial total.

35. $z = x \operatorname{sen} xy$
36. $z = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

37. ***Análisis de errores*** Al medir los lados de un triángulo rectángulo se obtienen los valores de 5 y 12 centímetros, con un posible error de $\frac{1}{2}$ centímetro. Aproximar el error máximo posible al calcular la longitud de la hipotenusa. Aproximar el error porcentual máximo.

38. ***Análisis de errores*** Para determinar la altura de una torre, el ángulo de elevación a la parte superior de la torre se midió desde un punto a 100 pies $\pm \frac{1}{2}$ pie de la base. La medida del ángulo da 33°, con un posible error de 1°. Suponer que el suelo es horizontal, para aproximar el error máximo al determinar la altura de la torre.

39. ***Volumen*** Se mide un cono circular recto. Su radio y su altura son 2 y 5 pulgadas, respectivamente. El posible error de medición es $\frac{1}{8}$ de pulgada. Aproximar el error máximo posible en el cálculo del volumen.

40. ***Superficie lateral*** Aproximar el error en el cálculo de la superficie lateral del cono del ejercicio 39. (La superficie lateral está dada por $A = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$.)

En los ejercicios 41 a 44, hallar las derivadas indicadas *a*) utilizando la regla de la cadena apropiada y *b*) por sustitución antes de derivar.

41. $w = \ln(x^2 + y), \quad \dfrac{dw}{dt}$

$x = 2t, \quad y = 4 - t$

42. $u = y^2 - x, \quad \dfrac{du}{dt}$

$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t$

43. $w = \dfrac{xy}{z}, \quad \dfrac{\partial w}{\partial r}, \dfrac{\partial w}{\partial t}$

$x = 2r + t, \quad y = rt, \quad z = 2r - t$

44. $u = x^2 + y^2 + z^2, \quad \dfrac{\partial u}{\partial r}, \dfrac{\partial u}{\partial t}$

$x = r\cos t, \quad y = r\operatorname{sen} t, \quad z = t$

En los ejercicios 45 y 46, derivar implícitamente para encontrar las primeras derivadas parciales de *z*.

45. $x^2 + xy + y^2 + yz + z^2 = 0$ **46.** $xz^2 - y\operatorname{sen} z = 0$

En los ejercicios 47 a 50, hallar la derivada direccional de la función en *P* en la dirección de v.

47. $f(x, y) = x^2y, \quad (-5, 5), \quad \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

48. $f(x, y) = \frac{1}{4}y^2 - x^2, \quad (1, 4), \quad \mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$

49. $w = y^2 + xz, \quad (1, 2, 2), \quad \mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

50. $w = 5x^2 + 2xy - 3y^2z, \quad (1, 0, 1), \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

En los ejercicios 51 a 54, hallar el gradiente de la función y el valor máximo de la derivada direccional en el punto dado.

51. $z = x^2y, \quad (2, 1)$ **52.** $z = e^{-x}\cos y, \quad \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$

53. $z = \dfrac{y}{x^2 + y^2}, \quad (1, 1)$ **54.** $z = \dfrac{x^2}{x - y}, \quad (2, 1)$

En los ejercicios 55 y 56, *a*) encontrar el gradiente de la función en *P*, *b*) encontrar un vector normal a la curva de nivel *f*(*x*, *y*) = *c* en *P*, *c*) encontrar la recta tangente a la curva de nivel *f*(*x*, *y*) = *c* en *P*, y *d*) trazar la curva de nivel, el vector unitario normal y la recta tangente en el plano *xy*.

55. $f(x, y) = 9x^2 - 4y^2$

$c = 65, \ P(3, 2)$

56. $f(x, y) = 4y\operatorname{sen} x - y$

$c = 3, \ P\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$

En los ejercicios 57 a 60, hallar una ecuación del plano tangente y las ecuaciones paramétricas de la recta normal a la superficie en el punto dado.

	Superficie	*Punto*
57.	$f(x, y) = x^2y$	$(2, 1, 4)$
58.	$f(x, y) = \sqrt{25 - y^2}$	$(2, 3, 4)$
59.	$z = -9 + 4x - 6y - x^2 - y^2$	$(2, -3, 4)$
60.	$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$	$(1, 2, 2)$

En los ejercicios 61 y 62, hallar las ecuaciones simétricas de la recta tangente a la curva de intersección de las superficies en el punto dado.

	Superficies	*Punto*
61.	$z = 9 - y^2, \quad y = x$	$(2, 2, 5)$
62.	$z = x^2 - y^2, \quad z = 3$	$(2, 1, 3)$

63. Hallar el ángulo de inclinación θ del plano tangente a la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ en el punto $(2, 1, 3)$.

64. ***Aproximación*** Considerar las aproximaciones siguientes a una función $f(x, y)$ centrada en $(0, 0)$.

Aproximación lineal

$P_1(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y$

Aproximación cuadrática

$P_2(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{1}{2}f_{xx}(0, 0)x^2 + f_{xy}(0, 0)xy + \frac{1}{2}f_{yy}(0, 0)y^2$

[Observar que la aproximación lineal es el plano tangente a la superficie en $(0, 0, f(0, 0))$.]

a) Hallar la aproximación lineal de $f(x, y) = \cos x + \operatorname{sen} y$ centrada en $(0, 0)$.

b) Hallar la aproximación cuadrática de $f(x, y) = \cos x + \operatorname{sen} y$ centrada en $(0, 0)$.

c) Si $y = 0$ en la aproximación cuadrática, ¿para qué función se obtiene el polinomio de Taylor de segundo grado?

d) Completar la tabla.

x	y	$f(x, y)$	$P_1(x, y)$	$P_2(x, y)$
0	0			
0	0.1			
0.2	0.1			
0.5	0.3			
1	0.5			

CAS *e*) Utilizar un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente las superficies $z = f(x, y)$, $z = P_1(x, y)$ y $z = P_2(x, y)$. ¿Cómo varía la exactitud de las aproximaciones a medida que aumenta la distancia para $(0, 0)$?

CAS **En los ejercicios 65 a 68, localizar los extremos relativos de la función. Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la función y confirmar los resultados.**

65. $f(x, y) = 2x^2 + 6xy + 9y^2 + 8x + 14$

66. $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2 - 5x$

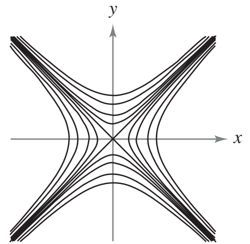
67. $f(x, y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

68. $z = 50(x + y) - (0.1x^3 + 20x + 150) - (0.05y^3 + 20.6y + 125)$

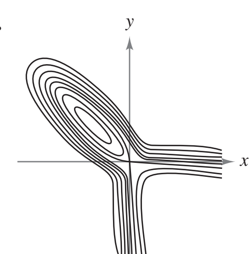
Redacción **En los ejercicios 69 y 70, redactar un párrafo breve sobre la superficie cuyas curvas de nivel (los valores de *c* espaciados uniformemente) se muestran. Hacer un comentario acerca de los posibles extremos, puntos silla, la magnitud del gradiente, etcétera.**



69.



70.



71. ***Ganancia o beneficio máximo*** Una corporación fabrica, en dos lugares, cámaras digitales. Las funciones de costo para producir x_1 unidades en el lugar 1 y x_2 unidades en el lugar 2 son

$$C_1 = 0.05x_1^2 + 15x_1 + 5\,400$$
$$C_2 = 0.03x_2^2 + 15x_2 + 6\,100$$

y la función del ingreso total es

$$R = [225 - 0.4(x_1 + x_2)](x_1 + x_2).$$

Hallar los niveles de producción en los dos lugares que maximizan el beneficio $P(x_1, x_2) = R - C_1 - C_2$.

72. ***Costo mínimo*** Un fabricante recibe una orden para 1 000 unidades de bancos de madera que pueden producirse en dos lugares. Sean x_1 y x_2 los números de unidades producidos en cada uno de los dos lugares. La función del costo es

$$C = 0.25x_1^2 + 10x_1 + 0.15x_2^2 + 12x_2.$$

Hallar la cantidad que debe producirse en cada lugar para satisfacer la orden y minimizar el costo.

73. ***Nivel de producción*** La función de producción de un fabricante de dulces es

$$f(x, y) = 4x + xy + 2y$$

donde x es el número de unidades de trabajo y y es el número de unidades de capital. Suponer que la cantidad total disponible para trabajo y capital es $2 000, y que las unidades de trabajo y capital cuestan $20 y $4, respectivamente. Hallar el nivel de producción máximo de este fabricante.

74. Hallar la distancia mínima del punto (2, 2, 0) a la superficie $z = x^2 + y^2$.



75. ***Modelo matemático*** La tabla muestra la fuerza de fricción y en kilogramos de un vehículo de motor a las velocidades x, en kilómetros por hora, indicadas.

Velocidad, *x*	25	50	75	100	125
Fuerza de fricción, *y*	24	34	50	71	98

a) Utilizar el programa de regresión de una herramienta de graficación para hallar un modelo cuadrático de regresión por mínimos cuadrados para los datos.

b) Utilizar el modelo para estimar la fuerza total de fricción cuando el vehículo está en movimiento a 80 kilómetros por hora.



76. ***Modelo matemático*** Los datos en la tabla muestran el rendimiento y (en miligramos) en una reacción química después de t minutos.

Minutos, *t*	1	2	3	4
Rendimiento, *y*	1.2	7.1	9.9	13.1

Minutos, *t*	5	6	7	8
Rendimiento, *y*	15.5	16.0	17.9	18.0

a) Utilizar el programa de regresión de una herramienta de graficación para hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados para los datos. Después utilizar la herramienta de graficación para representar los datos y el modelo.

b) Utilizar una herramienta de graficación para trazar los puntos $(\ln t, y)$. ¿Parecen seguir estos puntos un modelo lineal con más exactitud que los datos dados en el inciso *a*)?

c) Utilizar el programa de regresión de una herramienta de graficación para hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados para los puntos $(\ln t, y)$ y obtener el modelo logarítmico $y = a + b \ln t$.

d) Utilizar una herramienta de graficación para representar los datos y los modelos lineal y logarítmico. ¿Qué modelo es mejor? Explicar.

En los ejercicios 77 y 78, utilizar multiplicadores de Lagrange para localizar y clasificar todos los extremos de la función.

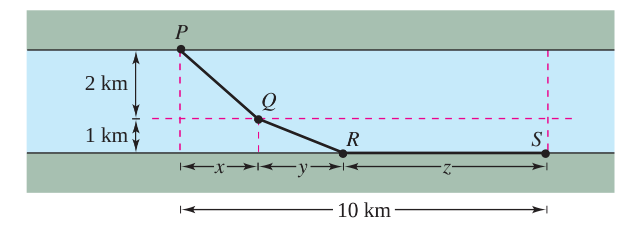
77. $w = xy + yz + xz$

Restricción: $x + y + z = 1$

78. $z = x^2y$

Restricción: $x + 2y = 2$

79. ***Costo mínimo*** Se va a construir un conducto para agua que va del punto P al punto S y que debe atravesar por regiones donde los costos de construcción difieren (ver la figura). El costo por kilómetro en dólares es $3k$ de P a Q, $2k$ de Q a R y k de R a S. Para simplificar, sea $k = 1$. Utilizar multiplicadores de Lagrange para localizar x, y y z tales que el costo total C se minimice.



CAS **80.** ***Investigación*** Considerar la función objetivo $f(x, y) = ax + by$ sujeta a la restricción $x^2/64 + y^2/36 = 1$. Suponer que x y y son positivas.

a) Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la restricción o ligadura. Si $a = 4$ y $b = 3$, utilizar el sistema algebraico por computadora y representar gráficamente las curvas de nivel de la función objetivo. Mediante ensayo y error, hallar la curva de nivel que parece ser tangente a la elipse. Utilizar el resultado para aproximar el máximo de f sujeto a la restricción o ligadura.

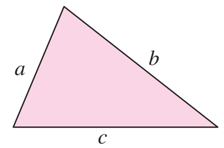
b) Repetir el inciso *a*) con $a = 4$ y $b = 9$.

SP Solución de problemas

1. La **fórmula de Heron** establece que el área de un triángulo con lados de longitudes a, b y c está dada por

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde $s = \dfrac{a+b+c}{2}$, como se muestra en la figura.

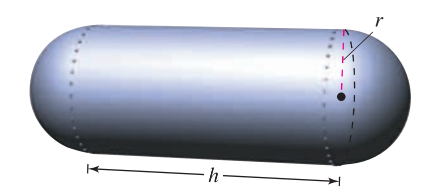


a) Utilizar la fórmula de Heron para calcular el área del triángulo con vértices (0, 0), (3, 4) y (6, 0).

b) Mostrar que, de todos los triángulos que tienen un mismo perímetro, el triángulo con el área mayor es un triángulo equilátero.

c) Mostrar que, de todos los triángulos que tienen una misma área, el triángulo con el perímetro menor es un triángulo equilátero.

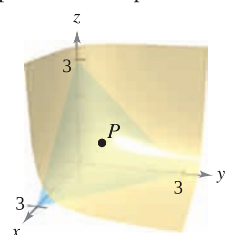
2. Un tanque industrial tiene forma cilíndrica con extremos hemisféricos, como se muestra en la figura. El depósito debe almacenar 1 000 litros de fluido. Determinar el radio r y longitud h que minimizan la cantidad de material utilizado para la construcción del tanque.



3. Sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto en el primer octante en la superficie $xyz = 1$.

a) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto P.

b) Mostrar que el volumen del tetraedro formado en los tres planos de coordenadas y el plano tangente es constante, independiente del punto de tangencia (ver la figura).



4. Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar las funciones $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 1}$ y $g(x) = x$ en la misma pantalla.

a) Mostrar que

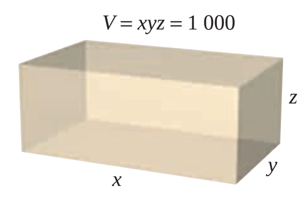
$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - g(x)] = 0 \text{ y } \lim_{x\to-\infty} [f(x) - g(x)] = 0.$$

b) Hallar el punto en la gráfica de f que está más alejado de la gráfica de g.

5. *a*) Sean $f(x, y) = x - y$ y $g(x, y) = x^2 + y^2 = 4$. Graficar varias curvas de nivel de f y la restricción g en el plano xy. Usar la gráfica para determinar el valor mayor de f sujeto a la restricción $g = 4$. Después, verificar su resultado mediante los multiplicadores de Lagrange.

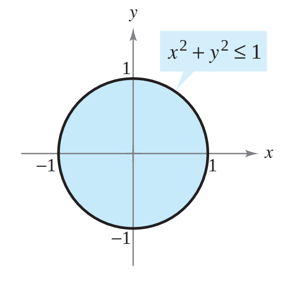
b) Sean $f(x, y) = x - y$ y $g(x, y) = x^2 + y^2 = 0$. Encontrar los valores máximos y mínimos de f sujetos a la restricción $g = 0$. ¿Funcionará el método de los multiplicadores de Lagrange en este caso? Explicar.

6. Un cuarto caliente de almacenamiento tiene la forma de una caja rectangular y un volumen de 1 000 pies cúbicos, como se muestra en la figura. Como el aire caliente sube, la pérdida de calor por unidad de área a través del techo es cinco veces mayor que la pérdida de calor a través del suelo. La pérdida de calor a través de las cuatro paredes es tres veces mayor que la pérdida de calor a través del suelo. Determinar las dimensiones del cuarto que minimizan la pérdida de calor y que por consiguiente minimizan los costos de calefacción.



7. Repetir el ejercicio 6 suponiendo que la pérdida de calor a través de las paredes y del techo sigue siendo la misma, pero el suelo se aísla de manera que no hay ninguna pérdida de calor a través del mismo.

8. Considerar una placa circular de radio 1 dada por $x^2 + y^2 \le 1$, como se muestra en la figura. La temperatura sobre cualquier punto $P(x, y)$ de la placa es $T(x, y) = 2x^2 + y^2 - y + 10$.



a) Dibujar las isotermas $T(x, y) = 10$.

b) Hallar el punto más caliente y el punto más frío de la placa.

9. Considerar la función de producción de Cobb-Douglas

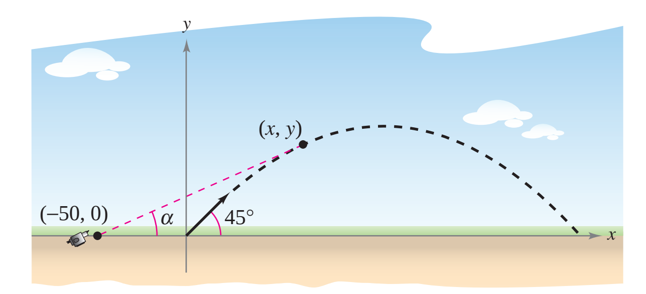
$$f(x, y) = Cx^a y^{1-a}, \quad 0 < a < 1.$$

a) Mostrar que f satisface la ecuación $x\dfrac{\partial f}{dx} + y\dfrac{\partial f}{dy} = f$.

b) Mostrar que $f(tx, ty) = tf(x, y)$.

10. Expresar la ecuación de Laplace $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ en coordenadas cilíndricas.

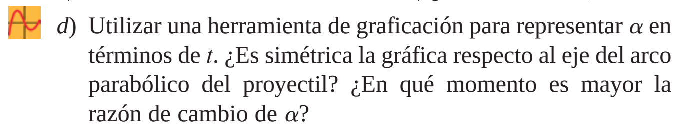
11. Un proyectil es lanzado a un ángulo de 45° respecto a la horizontal y con una velocidad inicial de 64 pies por segundo. Una cámara de televisión se localiza en el plano de la trayectoria del proyectil, 50 pies detrás del sitio del lanzamiento (ver la figura).



a) Hallar las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del proyectil en términos del parámetro t que representa tiempo.

b) Expresar el ángulo α que la cámara forma con la horizontal en términos de x y y y en términos de t.

c) Utilizar los resultados del inciso *b*) para calcular $d\alpha/dt$.



d) Utilizar una herramienta de graficación para representar α en términos de t. ¿Es simétrica la gráfica respecto al eje del arco parabólico del proyectil? ¿En qué momento es mayor la razón de cambio de α?

e) ¿En qué momento es máximo el ángulo α? ¿Ocurre esto cuando el proyectil está a su mayor altura?

12. Considerar la distancia d entre el sitio del lanzamiento y el proyectil del ejercicio 11.

a) Expresar la distancia d en términos de x y y y en términos del parámetro t.

b) Utilizar los resultados del inciso *a*) para hallar la razón de cambio de d.

c) Hallar la razón de cambio de la distancia cuando $t = 2$.

d) Durante el vuelo del proyectil, ¿cuándo es mínima la razón o cambio de d? ¿Ocurre esto en el momento en el que el proyectil alcanza su altura máxima?

CAS **13.** Considerar la función

$$f(x, y) = (\alpha x^2 + \beta y^2)e^{-(x^2+y^2)}, \quad 0 < |\alpha| < \beta.$$

a) Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la función empleando $\alpha = 1$ y $\beta = 2$, e identificar todos los extremos o puntos silla.

b) Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la función empleando $\alpha = -1$ y $\beta = 2$, e identificar todos los extremos o puntos silla.

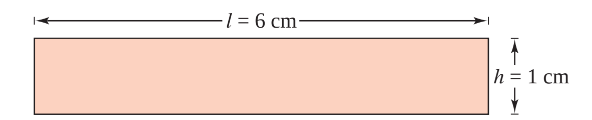
c) Generalizar los resultados de los incisos *a*) y *b*) para la función f.

14. Demostrar que si f es una función diferenciable tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$$

entonces el plano tangente en (x_0, y_0) es horizontal.

15. La figura muestra un rectángulo que tiene aproximadamente $l = 6$ centímetros de largo y $h = 1$ centímetro de altura.



a) Dibujar una franja rectangular a lo largo de la región rectangular que muestre un pequeño incremento en la longitud.

b) Dibuje una franja rectangular a lo largo de la región rectangular que muestre un pequeño incremento en la altura.

c) Utilizar los resultados en los incisos *a*) y *b*) para identificar la medida que tiene mayor efecto en el área A del rectángulo.

d) Verificar analíticamente la respuesta dada en el inciso *c*) comparando los valores de dA cuando $dl = 0.01$ y cuando $dh = 0.01$.

16. Considerar convertir un punto $(5 \pm 0.05, \pi/18 \pm 0.05)$ en coordenadas polares a coordenadas rectangulares (x, y).

a) Utilizar un argumento geométrico para determinar si la exactitud en x depende más de la exactitud en r o de la exactitud en θ. Explicar. Verificar analíticamente la respuesta.

b) Utilizar un argumento geométrico para determinar si la exactitud en y depende más de la exactitud en r o de la exactitud en θ. Explicar. Verificar analíticamente la respuesta.

17. Sea f una función de una variable derivable. Mostrar que los planos tangentes a la superficie $z = y f(x/y)$ se cortan en un punto común.

18. Considerar la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que encierra el círculo $x^2 + y^2 = 2x$. Hallar los valores de a y b que minimizan el área de la elipse.

19. Mostrar que

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x - t) + \operatorname{sen}(x + t)]$$

es una solución a la ecuación de ondas unidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

20. Mostrar que

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x - ct) + f(x + ct)]$$

es una solución a la ecuación de ondas unidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

(Esta ecuación describe la vibración transversal pequeña de una cuerda elástica como las de ciertos instrumentos musicales.)



14 Integración múltiple

En este capítulo se introduce el concepto de integrales dobles sobre regiones en el plano e integrales triples sobre regiones en el espacio.

En este capítulo, se aprenderá:

- Cómo evaluar una integral iterada y encontrar el área de una región plana. (14.1)
- Cómo usar una integral doble para encontrar el volumen de una región sólida. (14.2)
- Cómo escribir y evaluar integrales dobles en coordenadas polares. (14.3)
- Cómo encontrar la masa de una lámina plana, el centro de masa de una lámina plana y los momentos de inercia usando integrales dobles. (14.4)
- Cómo usar una integral doble para encontrar el área de una superficie. (14.5)
- Cómo usar una integral triple para encontrar el volumen, centro de masa y momentos de inercia de una región sólida. (14.6)
- Cómo escribir y evaluar integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas. (14.7)
- Cómo usar un jacobiano para cambiar variables en una integral doble. (14.8)



Langley Photography/Getty Images

El centro de presión de una vela es ese punto en el cual la fuerza total aerodinámica puede considerarse que actúa. Ya que la vela es representada por una región plana, ¿cómo se pueden usar las integrales dobles para encontrar el centro de presión sobre una vela? (Ver sección 14.4, sección proyecto.)






Se puede aproximar el volumen de una región sólida encontrando la suma de los volúmenes de prismas rectangulares representativos. Como aumenta el número de prismas rectangulares, la aproximación tiende a ser más y más exacta. En el capítulo 14 se aprenderá a usar integrales múltiples para encontrar el volumen de una región sólida.



Integrales iteradas y área en el plano

- **Evaluar una integral iterada.**
- **Utilizar una integral iterada para hallar el área de una región plana.**

Integrales iteradas

NOTA En los capítulos 14 y 15 se estudiarán varias aplicaciones de la integración de funciones de varias variables. Este capítulo es muy similar al capítulo 7 ya que ilustra el uso de la integración para hallar áreas planas, volúmenes, áreas de superficies, momentos y centros de masa. ■

En el capítulo 13 se vio cómo derivar funciones de varias variables con respecto a una variable manteniendo constantes las demás variables. Empleando un procedimiento similar se pueden *integrar* funciones de varias variables. Por ejemplo, dada la derivada parcial

$$f_x(x, y) = 2xy$$

entonces, considerando y constante, se puede integrar con respecto a x para obtener

$$f(x, y) = \int f_x(x, y)\,dx \qquad \text{Integrar con respecto a } x.$$

$$= \int 2xy\,dx \qquad \text{Mantener } y \text{ constante.}$$

$$= y\int 2x\,dx \qquad \text{Sacar } y \text{ como factor constante.}$$

$$= y(x^2) + C(y) \qquad \text{Una primitiva (o antiderivada) de } 2x \text{ es } x^2.$$

$$= x^2y + C(y). \qquad C(y) \text{ es una función de } y.$$

La "constante" de integración, $C(y)$, es una función de y. En otras palabras, al integrar con respecto a x, se puede recobrar $f(x, y)$ sólo parcialmente. Cómo recobrar totalmente una función de x y y a partir de sus derivadas parciales es un tema que se estudiará en el capítulo 15. Por ahora, lo que interesa es extender las integrales definidas a funciones de varias variables. Por ejemplo, al considerar y constante, se puede aplicar el teorema fundamental del cálculo para evaluar

$$\int_1^{2y} 2xy\,dx = x^2y\Big]_1^{2y} = (2y)^2y - (1)^2y = 4y^3 - y.$$

x es la variable de integración y y es fija.

Sustituir x por los límites de integración.

El resultado es una función de y.

De manera similar se puede integrar con respecto a y, manteniendo x fija. Ambos procedimientos se resumen como sigue.

$$\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f_x(x, y)\,dx = f(x, y)\Big]_{h_1(y)}^{h_2(y)} = f(h_2(y), y) - f(h_1(y), y) \qquad \text{Con respecto a } x.$$

$$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f_y(x, y)\,dy = f(x, y)\Big]_{g_1(x)}^{g_2(x)} = f(x, g_2(x)) - f(x, g_1(x)) \qquad \text{Con respecto a } y.$$

Nótese que la variable de integración no puede aparecer en ninguno de los límites de integración. Por ejemplo, no tiene ningún sentido escribir

$$\int_0^x y\,dx.$$

EJEMPLO 1 Integrar con respecto a y

Evaluar $\int_1^x (2x^2y^{-2} + 2y)\, dy$.

Solución Se considera x constante y se integra con respecto a y, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned}\int_1^x (2x^2y^{-2} + 2y)\, dy &= \left[\frac{-2x^2}{y} + y^2\right]_1^x && \text{Integrar con respecto a } y.\\ &= \left(\frac{-2x^2}{x} + x^2\right) - \left(\frac{-2x^2}{1} + 1\right)\\ &= 3x^2 - 2x - 1.\end{aligned}$$

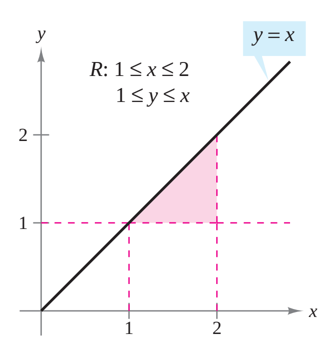
En el ejemplo 1 nótese que la integral define una función de x que puede ser integrada *ella misma*, como se muestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 La integral de una integral

Evaluar $\int_1^2 \left[\int_1^x (2x^2y^{-2} + 2y)\, dy\right] dx$.

Solución Utilizando el resultado del ejemplo 1, se tiene

$$\begin{aligned}\int_1^2 \left[\int_1^x (2x^2y^{-2} + 2y)\, dy\right] dx &= \int_1^2 (3x^2 - 2x - 1)\, dx\\ &= \left[x^3 - x^2 - x\right]_1^2 && \text{Integrar con respecto a } x.\\ &= 2 - (-1)\\ &= 3.\end{aligned}$$



La región de integración para

$\int_1^2 \int_1^x f(x, y)\, dy\, dx$

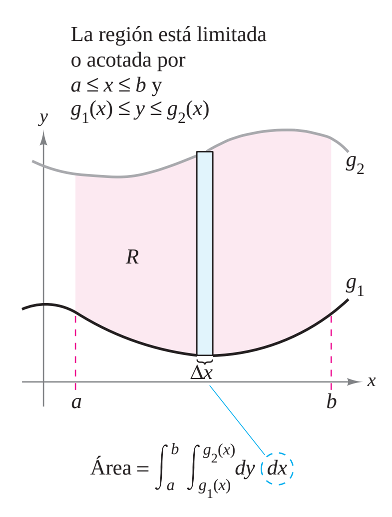
Figura 14.1

La integral del ejemplo 2 es una **integral iterada**. Los corchetes usados en el ejemplo 2 normalmente no se escriben. Las integrales iteradas se escriben normalmente como

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx \quad \text{y} \quad \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Los **límites interiores de integración** pueden ser variables con respecto a la variable exterior de integración. Sin embargo, los **límites exteriores de integración** *deben ser* constantes con respecto a ambas variables de integración. Después de realizar la integración interior, se obtiene una integral definida "ordinaria" y la segunda integración produce un número real. Los límites de integración de una integral iterada definen dos intervalos para las variables. Así, en el ejemplo 2, los límites exteriores indican que x está en el intervalo $1 \le x \le 2$ y los límites interiores indican que y está en el intervalo $1 \le y \le x$. Juntos, estos dos intervalos determinan la **región de integración *R*** de la integral iterada, como se muestra en la figura 14.1.

Como una integral iterada es simplemente un tipo especial de integral definida, en el que el integrando es también una integral, se pueden utilizar las propiedades de las integrales definidas para evaluar integrales iteradas.



Región verticalmente simple
Figura 14.2

Área de una región plana

En el resto de esta sección se verá desde una perspectiva nueva un viejo problema, el de hallar el área de una región plana. Considérese la región plana R acotada por $a \le x \le b$ y $g_1(x) \le y \le g_2(x)$, como se muestra en la figura 14.2. El área de R está dada por la integral definida

$$\int_a^b [g_2(x) - g_1(x)]\, dx. \qquad \text{Área de } R.$$

Usando el teorema fundamental del cálculo, se puede reescribir el integrando $g_2(x) - g_1(x)$ como una integral definida. Concretamente, si se considera x fija y se deja que y varíe desde $g_1(x)$ hasta $g_2(x)$, se puede escribir

$$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy = y\Big]_{g_1(x)}^{g_2(x)} = g_2(x) - g_1(x).$$

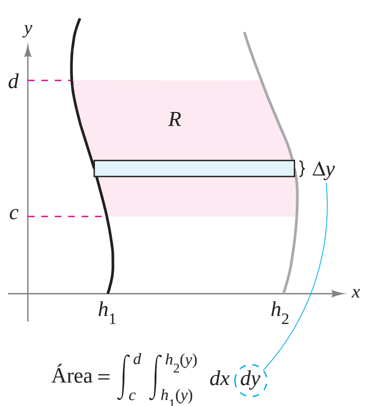
Combinando estas dos integrales, se puede expresar el área de la región R mediante una integral iterada

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\, dx = \int_a^b y\Big]_{g_1(x)}^{g_2(x)} dx \qquad \text{Área de } R.$$

$$= \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)]\, dx.$$

Colocar un rectángulo representativo en la región R ayuda a determinar el orden y los límites de integración. Un rectángulo vertical implica el orden $dy\, dx$, donde los límites interiores corresponden a los límites o cotas superior e inferior del rectángulo, como se muestra en la figura 14.2. Este tipo de región se llama **verticalmente simple**, porque los límites exteriores de integración representan las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.

De manera similar, un rectángulo horizontal implica el orden $dx\, dy$, donde los límites interiores están determinados por los límites o cotas izquierda y derecha del rectángulo, como se muestra en la figura 14.3. Este tipo de región se llama **horizontalmente simple**, porque los límites exteriores representan las rectas horizontales $y = c$ y $y = d$. Las integrales iteradas utilizadas en estos dos tipos de regiones simples se resumen como sigue.



Región horizontalmente simple
Figura 14.3

ÁREA DE UNA REGIÓN EN EL PLANO

1. Si R está definida por $a \le x \le b$ y $g_1(x) \le y \le g_2(x)$, donde g_1 y g_2 son continuas en $[a, b]$, R está dada por

$$A = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\, dx. \qquad \text{Figura 14.2 (verticalmente simple).}$$

2. Si R está definida por $c \le y \le d$ y $h_1(y) \le x \le h_2(y)$, donde h_1 y h_2 son continuas en $[c, d]$, entonces el área de R está dada por

$$A = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx\, dy. \qquad \text{Figura 14.3 (horizontalmente simple).}$$

NOTA Hay que observar que en estas dos integrales el orden de integración es diferente; el orden $dy\, dx$ corresponde a una región verticalmente simple, y el orden $dx\, dy$ corresponde a una región horizontalmente simple. ■

Si los cuatro límites de integración son constantes, la región de integración es rectangular, como ocurre en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Área de una región rectangular

Utilizar una integral iterada para representar el área del rectángulo que se muestra en la figura 14.4.

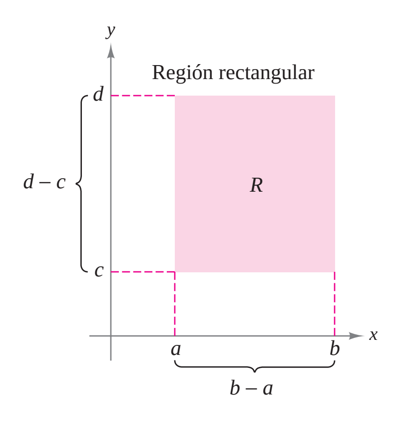


Figura 14.4

Solución La región de la figura 14.4 es verticalmente simple y horizontalmente simple, por tanto se puede emplear cualquier orden de integración. Eligiendo el orden $dy\,dx$, se obtiene lo siguiente.

$$\int_a^b \int_c^d dy\,dx = \int_a^b y\Big]_c^d dx \qquad \text{Integrar con respecto a } y.$$

$$= \int_a^b (d - c)\,dx$$

$$= \Big[(d - c)x\Big]_a^b \qquad \text{Integrar con respecto a } x.$$

$$= (d - c)(b - a)$$

Nótese que esta respuesta es consistente con los conocimientos de la geometría.

EJEMPLO 4 Hallar el área por medio de una integral iterada

Utilizar una integral iterada para hallar el área de la región limitada o acotada por las gráficas de

$$f(x) = \operatorname{sen} x \qquad \text{La curva seno constituye el límite o cota superior.}$$

$$g(x) = \cos x \qquad \text{La curva coseno constituye el límite o cota inferior.}$$

entre $x = \pi/4$ y $x = 5\pi/4$.

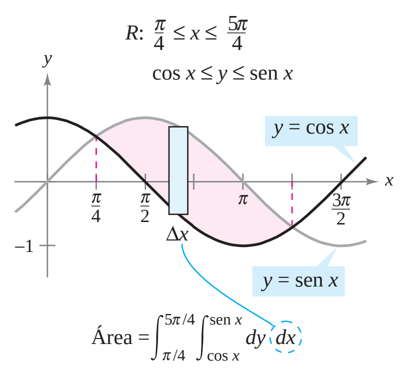


Figura 14.5

Solución Como f y g se dan como funciones de x, es conveniente un rectángulo representativo vertical, y se puede elegir $dy\,dx$ como orden de integración, como se muestra en la figura 14.5. Los límites exteriores de integración son $\pi/4 \le x \le 5\pi/4$. Dado que el rectángulo está limitado o acotado, superiormente por $f(x) = \operatorname{sen} x$ e inferiormente por $g(x) = \cos x$, se tiene

$$\text{Área de } R = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \int_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} dy\,dx$$

$$= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} y\Big]_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} dx \qquad \text{Integrar con respecto a } y.$$

$$= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\operatorname{sen} x - \cos x)\,dx$$

$$= \Big[-\cos x - \operatorname{sen} x\Big]_{\pi/4}^{5\pi/4} \qquad \text{Integrar con respecto a } x.$$

$$= 2\sqrt{2}.$$

NOTA La región de integración en una integral iterada no necesariamente debe estar acotada por rectas. Por ejemplo, la región de integración que se muestra en la figura 14.5 es *verticalmente simple* aun cuando no tiene rectas verticales como fronteras izquierda y derecha. Lo que hace que la región sea verticalmente simple es que está limitada o acotada superiormente e inferiormente por gráficas de *funciones de x*. ■

Con frecuencia, uno de los órdenes de integración hace que un problema de integración resulte más sencillo de como resulta con el otro orden de integración. Por ejemplo, hacer de nuevo el ejemplo 4 con el orden *dx dy*; sorprenderá ver que la tarea es formidable. Sin embargo, si se llega al resultado, se verá que la respuesta es la misma. En otras palabras, el orden de integración afecta la complejidad de la integración, pero no el valor de la integral.

EJEMPLO 5 Comparación de diferentes órdenes de integración

Dibujar la región cuya área está representada por la integral

$$\int_0^2 \int_{y^2}^4 dx\, dy.$$

Después hallar otra integral iterada que utilice el orden *dy dx* para representar la misma área y mostrar que ambas integrales dan el mismo valor.

Solución De acuerdo con los límites de integración dados, se sabe que

$$y^2 \leq x \leq 4 \qquad \text{Límites interiores de integración.}$$

lo cual significa que la región R está limitada o acotada a la izquierda por la parábola $x = y^2$ y a la derecha por la recta $x = 4$. Además, como

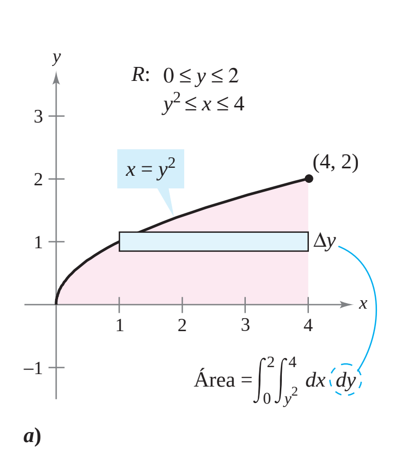
$$0 \leq y \leq 2 \qquad \text{Límites exteriores de integración.}$$

se sabe que R está limitada o acotada inferiormente por el eje x, como se muestra en la figura 14.6*a*. El valor de esta integral es

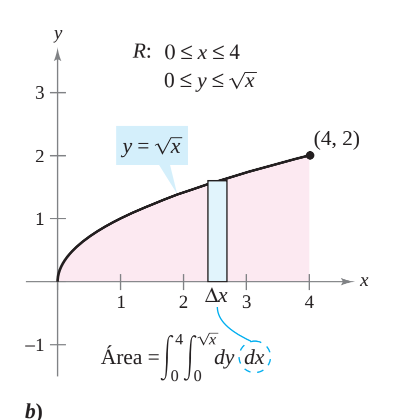
$$\int_0^2 \int_{y^2}^4 dx\, dy = \int_0^2 x \Big]_{y^2}^4 dy \qquad \text{Integrar con respecto a } x.$$

$$= \int_0^2 (4 - y^2)\, dy$$

$$= \left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \frac{16}{3}. \qquad \text{Integrar con respecto a } y.$$



a)



b)

Figura 14.6

Para cambiar el orden de integración a *dy dx*, se coloca un rectángulo vertical en la región, como se muestra en la figura 14.6*b*. Con esto se puede ver que los límites o cotas constantes $0 \leq x \leq 4$ sirven como límites exteriores de integración. Despejando y de la ecuación $x = y^2$, se concluye que los límites interiores son $0 \leq y \leq \sqrt{x}$. Por tanto, el área de la región también se puede representar por

$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} dy\, dx.$$

Evaluando esta integral, se ve que tiene el mismo valor que la integral original.

$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} dy\, dx = \int_0^4 y \Big]_0^{\sqrt{x}} dx \qquad \text{Integrar con respecto a } y.$$

$$= \int_0^4 \sqrt{x}\, dx$$

$$= \frac{2}{3} x^{3/2} \Big]_0^4 = \frac{16}{3} \qquad \text{Integrar con respecto a } x.$$

Algunas veces no es posible calcular el área de una región con una sola integral iterada. En estos casos se divide la región en subregiones de manera que el área de cada subregión pueda calcularse por medio de una integral iterada. El área total es entonces la suma de las integrales iteradas.

TECNOLOGÍA Algunos paquetes de software pueden efectuar integración simbólica de integrales como las del ejemplo 6. Tales programas se pueden utilizar para evaluar las integrales de los ejercicios y ejemplos dados en esta sección.

EJEMPLO 6 Un área representada por dos integrales iteradas

Hallar el área de la región R que se encuentra bajo la parábola

$$y = 4x - x^2 \qquad \text{La parábola forma el límite o cota superior.}$$

sobre el eje x, y sobre la recta

$$y = -3x + 6. \qquad \text{La recta y el eje } x \text{ forman el límite o cota inferior.}$$

Solución Para empezar se divide R en dos subregiones R_1 y R_2 como se muestra en la figura 14.7.

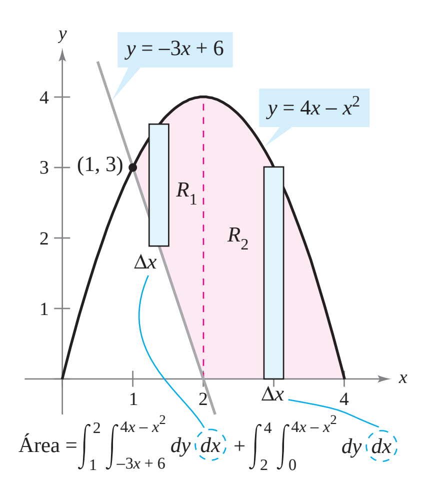


Figura 14.7

En ambas regiones es conveniente usar rectángulos verticales y se tiene

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= \int_1^2 \int_{-3x+6}^{4x-x^2} dy\,dx + \int_2^4 \int_0^{4x-x^2} dy\,dx \\
&= \int_1^2 (4x - x^2 + 3x - 6)\,dx + \int_2^4 (4x - x^2)\,dx \\
&= \left[\frac{7x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 6x\right]_1^2 + \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_2^4 \\
&= \left(14 - \frac{8}{3} - 12 - \frac{7}{2} + \frac{1}{3} + 6\right) + \left(32 - \frac{64}{3} - 8 + \frac{8}{3}\right) = \frac{15}{2}.
\end{aligned}$$

El área de la región es 15/2 unidades cuadradas. Tratar de comprobar el resultado usando el procedimiento para hallar el área entre dos curvas, que se presentó en la sección 7.1.

NOTA En los ejemplos 3 a 6, hay que observar la ventaja de dibujar la región de integración. Se recomienda desarrollar el hábito de hacer dibujos como ayuda para determinar los límites de integración de todas las integrales iteradas de este capítulo.

En este punto, uno se puede preguntar para qué se necesitan las integrales iteradas. Después de todo, ya se sabe usar la integración convencional para hallar el área de una región en el plano. (Por ejemplo, comparar la solución del ejemplo 4 de esta sección con la del ejemplo 3 en la sección 7.1.) La necesidad de las integrales iteradas será más clara en la sección siguiente. En esta sección se presta especial atención a los procedimientos para determinar los límites de integración de las integrales iteradas, y el conjunto de ejercicios siguiente está diseñado para adquirir práctica en este procedimiento importante.

14.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 10, evaluar la integral.

1. $\displaystyle\int_0^x (x+2y)\,dy$

2. $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{y}{x}\,dy$

3. $\displaystyle\int_1^{2y} \frac{y}{x}\,dx, \quad y>0$

4. $\displaystyle\int_0^{\cos y} y\,dx$

5. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{4-x^2}} x^2y\,dy$

6. $\displaystyle\int_{x^3}^{\sqrt{x}} (x^2+3y^2)\,dy$

7. $\displaystyle\int_{e^y}^{y} \frac{y\ln x}{x}\,dx, \quad y>0$

8. $\displaystyle\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2+y^2)\,dx$

9. $\displaystyle\int_0^{x^3} ye^{-y/x}\,dy$

10. $\displaystyle\int_y^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x\cos y\,dx$

En los ejercicios 11 a 30, evaluar la integral iterada.

11. $\displaystyle\int_0^1\int_0^2 (x+y)\,dy\,dx$

12. $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{-2}^2 (x^2-y^2)\,dy\,dx$

13. $\displaystyle\int_1^2\int_0^4 (x^2-2y^2)\,dx\,dy$

14. $\displaystyle\int_{-1}^2\int_1^3 (x+y^2)\,dx\,dy$

15. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^1 y\cos x\,dy\,dx$

16. $\displaystyle\int_0^{\ln 4}\int_0^{\ln 3} e^{x+y}\,dy\,dx$

17. $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\operatorname{sen} x} (1+\cos x)\,dy\,dx$

18. $\displaystyle\int_1^4\int_1^{\sqrt{x}} 2ye^{-x}\,dy\,dx$

19. $\displaystyle\int_0^1\int_0^x \sqrt{1-x^2}\,dy\,dx$

20. $\displaystyle\int_{-4}^4\int_0^{x^2} \sqrt{64-x^3}\,dy\,dx$

21. $\displaystyle\int_{-1}^5\int_0^{3y}\left(3+x^2+\frac{1}{4}y^2\right)dx\,dy$

22. $\displaystyle\int_0^2\int_y^{2y} (10+2x^2+2y^2)\,dx\,dy$

23. $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x+y)\,dx\,dy$

24. $\displaystyle\int_0^2\int_{3y^2-6y}^{2y-y^2} 3y\,dx\,dy$

25. $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}} \frac{2}{\sqrt{4-y^2}}\,dx\,dy$

26. $\displaystyle\int_1^3\int_0^y \frac{4}{x^2+y^2}\,dx\,dy$

27. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r\,dr\,d\theta$

28. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}\cos\theta} r\,dr\,d\theta$

29. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\operatorname{sen}\theta} \theta r\,dr\,d\theta$

30. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_0^{\cos\theta} 3r^2\operatorname{sen}\theta\,dr\,d\theta$

En los ejercicios 31 a 34, evaluar la integral iterada impropia.

31. $\displaystyle\int_1^{\infty}\int_0^{1/x} y\,dy\,dx$

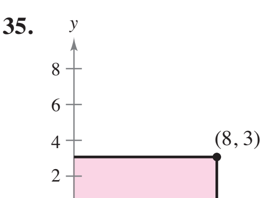
32. $\displaystyle\int_0^3\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+y^2}\,dy\,dx$

33. $\displaystyle\int_1^{\infty}\int_1^{\infty} \frac{1}{xy}\,dx\,dy$

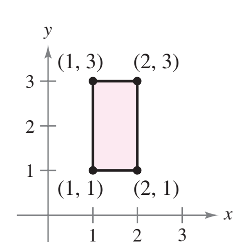
34. $\displaystyle\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} xye^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$

En los ejercicios 35 a 38, utilizar una integral iterada para hallar el área de la región.

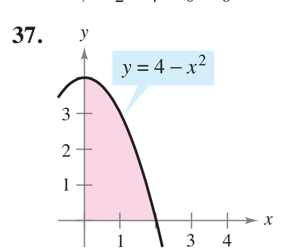
35.



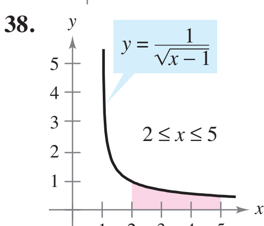
36.



37.



38.



En los ejercicios 39 a 46, utilizar una integral iterada para calcular el área de la región limitada o acotada por las gráficas de las ecuaciones.

39. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2, \quad x=0, \quad y=0$

40. $y=x^{3/2}, \quad y=2x$

41. $2x-3y=0, \quad x+y=5, \quad y=0$

42. $xy=9, \quad y=x, \quad y=0, \quad x=9$

43. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

44. $y=x, \quad y=2x, \quad x=2$

45. $y=4-x^2, \quad y=x+2$

46. $x^2+y^2=4, \quad x=0, \quad y=0$

En los ejercicios 47 a 54, dibujar la región *R* de integración y cambiar el orden de integración.

47. $\displaystyle\int_0^4\int_0^y f(x,y)\,dx\,dy$

48. $\displaystyle\int_0^4\int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)\,dx\,dy$

49. $\displaystyle\int_{-2}^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$

50. $\displaystyle\int_0^2\int_0^{4-x^2} f(x,y)\,dy\,dx$

51. $\displaystyle\int_1^{10}\int_0^{\ln y} f(x,y)\,dx\,dy$

52. $\displaystyle\int_{-1}^2\int_0^{e^{-x}} f(x,y)\,dy\,dx$

53. $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{x^2}^1 f(x,y)\,dy\,dx$

54. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\cos x} f(x,y)\,dy\,dx$

En los ejercicios 55 a 64, dibujar la región *R* cuya área está dada por la integral iterada. Después cambiar el orden de integración y mostrar que ambos órdenes dan la misma área.

55. $\displaystyle\int_0^1\int_0^2 dy\,dx$

56. $\displaystyle\int_1^2\int_2^4 dx\,dy$

57. $\displaystyle\int_0^1\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx\,dy$

58. $\displaystyle\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy\,dx$

59. $\displaystyle\int_0^2\int_0^x dy\,dx + \int_2^4\int_0^{4-x} dy\,dx$

60. $\displaystyle\int_0^4\int_0^{x/2} dy\,dx + \int_4^6\int_0^{6-x} dy\,dx$

61. $\displaystyle\int_0^2\int_{x/2}^1 dy\,dx$

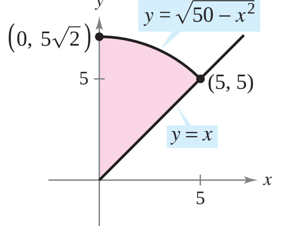
62. $\displaystyle\int_0^9\int_{\sqrt{x}}^3 dy\,dx$

63. $\displaystyle\int_0^1\int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} dx\,dy$

64. $\displaystyle\int_{-2}^2\int_0^{4-y^2} dx\,dy$

65. ***Para pensar*** **Dar un argumento geométrico para la igualdad. Verificar la igualdad analíticamente.**

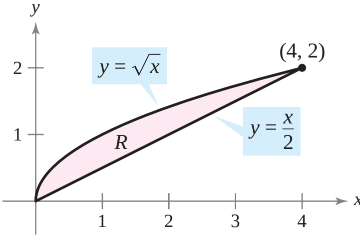
$$\int_0^5\int_x^{\sqrt{50-x^2}} x^2y^2\,dy\,dx =$$
$$\int_0^5\int_0^y x^2y^2\,dx\,dy + \int_5^{5\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{50-y^2}} x^2y^2\,dx\,dy$$



Para discusión

66. ***Para pensar*** Completar las integrales iteradas en forma tal que cada una represente el área de la región R (ver la figura). Entonces demostrar que ambas integrales tienen la misma área.

a) Área $= \displaystyle\int\int dx\,dy$ *b)* Área $= \displaystyle\int\int dy\,dx$



En los ejercicios 67 a 72, trazar la región de integración. Después evaluar la integral iterada. (Observar que es necesario cambiar el orden de integración.)

67. $\displaystyle\int_0^2\int_x^2 x\sqrt{1+y^3}\,dy\,dx$

68. $\displaystyle\int_0^4\int_{\sqrt{x}}^2 \frac{3}{2+y^3}\,dy\,dx$

69. $\displaystyle\int_0^1\int_{2x}^2 4e^{y^2}\,dy\,dx$

70. $\displaystyle\int_0^2\int_x^2 e^{-y^2}\,dy\,dx$

71. $\displaystyle\int_0^1\int_y^1 \operatorname{sen} x^2\,dx\,dy$

72. $\displaystyle\int_0^2\int_{y^2}^4 \sqrt{x}\operatorname{sen} x\,dx\,dy$

CAS **En los ejercicios 73 a 76, utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar la integral iterada.**

73. $\displaystyle\int_0^2\int_{x^2}^{2x} (x^3 + 3y^2)\,dy\,dx$

74. $\displaystyle\int_0^1\int_y^{2y} \operatorname{sen}(x+y)\,dx\,dy$

75. $\displaystyle\int_0^4\int_0^y \frac{2}{(x+1)(y+1)}\,dx\,dy$

76. $\displaystyle\int_0^a\int_0^{a-x} (x^2 + y^2)\,dy\,dx$

CAS **En los ejercicios 77 y 78, *a*) dibujar la región de integración, *b*) cambiar el orden de integración y *c*) usar un sistema algebraico por computadora y mostrar que ambos órdenes dan el mismo valor.**

77. $\displaystyle\int_0^2\int_{y^3}^{4\sqrt{2y}} (x^2y - xy^2)\,dx\,dy$

78. $\displaystyle\int_0^2\int_{\sqrt{4-x^2}}^{4-x^2/4} \frac{xy}{x^2+y^2+1}\,dy\,dx$

CAS **En los ejercicios 79 a 82, usar un sistema algebraico por computadora y aproximar la integral iterada.**

79. $\displaystyle\int_0^2\int_0^{4-x^2} e^{xy}\,dy\,dx$

80. $\displaystyle\int_0^2\int_x^2 \sqrt{16 - x^3 - y^3}\,dy\,dx$

81. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} 6r^2\cos\theta\,dr\,d\theta$

82. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{1+} 15\theta r\,dr\,d\theta$

Desarrollo de conceptos

83. Explicar qué se quiere decir con una integral iterada. ¿Cómo se evalúa?

84. Describir regiones que sean verticalmente simples y regiones que sean horizontalmente simples.

85. Dar una descripción geométrica de la región de integración si los límites interiores y exteriores de integración son constantes.

86. Explicar por qué algunas veces es una ventaja cambiar el orden de integración.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 87 y 88, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.**

87. $\displaystyle\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$

88. $\displaystyle\int_0^1\int_0^x f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^y f(x,y)\,dx\,dy$

14.2 Integrales dobles y volumen

- **Utilizar una integral doble para representar el volumen de una región sólida.**
- **Utilizar las propiedades de las integrales dobles.**
- **Evaluar una integral doble como una integral iterada.**
- **Hallar el valor promedio de una función sobre una región.**

Integrales dobles y volumen de una región sólida

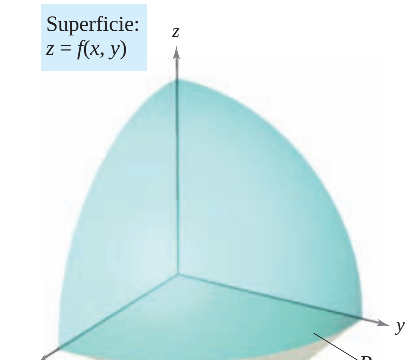


Figura 14.8

Se sabe que una integral definida sobre un *intervalo* utiliza un proceso de límite para asignar una medida a cantidades como el área, el volumen, la longitud de arco y la masa. En esta sección, se usará un proceso similar para definir la **integral doble** de una función de dos variables sobre una *región en el plano*.

Considérese una función continua f tal que $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) en una región R del plano xy. El objetivo es hallar el volumen de la región sólida comprendida entre la superficie dada por

$$z = f(x, y) \qquad \text{Superficie sobre el plano } xy.$$

y el plano xy, como se muestra en la figura 14.8. Para empezar se sobrepone una red o cuadrícula rectangular sobre la región, como se muestra en la figura 14.9. Los rectángulos que se encuentran completamente dentro de R forman una **partición interior** Δ, cuya **norma** $\|\Delta\|$ está definida como la longitud de la diagonal más larga de los n rectángulos. Después, se elige un punto (x_i, y_i) en cada rectángulo y se forma el prisma rectangular cuya altura es $f(x_i, y_i)$, como se muestra en la figura 14.10. Como el área del i-ésimo rectángulo es

$$\Delta A_i \qquad \text{Área del rectángulo } i\text{-ésimo.}$$

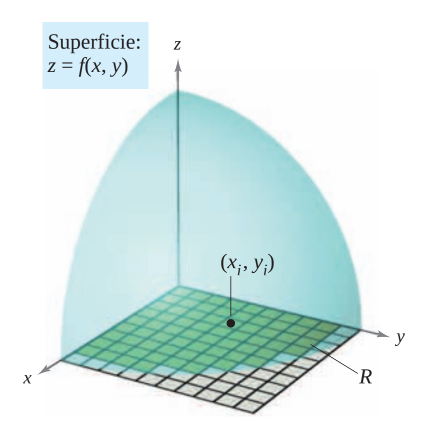
se sigue que el volumen del prisma i-ésimo es

$$f(x_i, y_i)\,\Delta A_i \qquad \text{Volumen del prisma } i\text{-ésimo.}$$

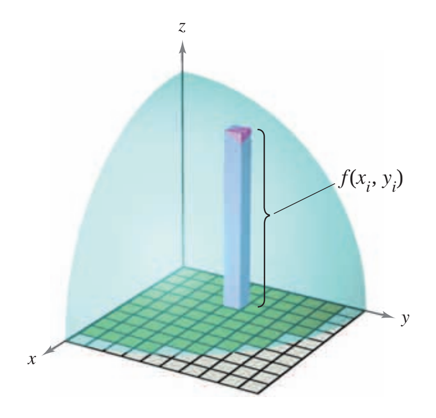
y el volumen de la región sólida se puede aproximar por la suma de Riemann de los volúmenes de todos los n prismas,

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta A_i \qquad \text{Suma de Riemann.}$$

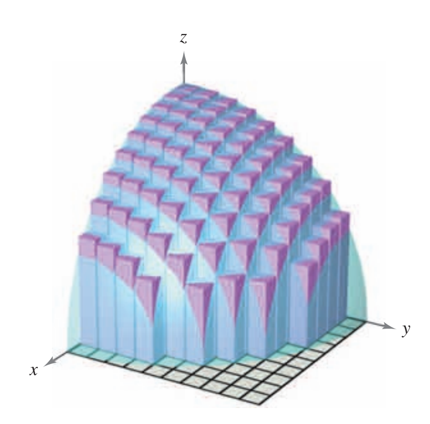
como se muestra en la figura 14.11. Esta aproximación se puede mejorar tomando redes o cuadrículas con rectángulos más y más pequeños, como se muestra en el ejemplo 1.



Los rectángulos que se encuentran dentro de R forman una partición interior de R
Figura 14.9



Prisma rectangular cuya base tiene un área de ΔA_i y cuya altura es $f(x_i, y_i)$
Figura 14.10



Volumen aproximado por prismas rectangulares
Figura 14.11

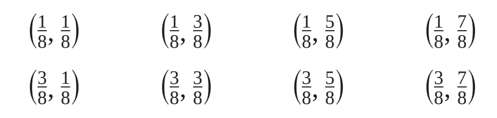
EJEMPLO 1 Aproximar el volumen de un sólido

Aproximar el volumen del sólido comprendido entre el paraboloide

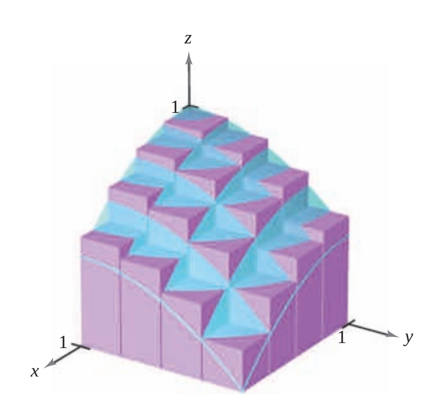
$$f(x, y) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$$

y la región cuadrada R dada por $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Utilizar una partición formada por los cuadrados cuyos lados tengan una longitud de $\frac{1}{4}$.

Solución Para empezar se forma la partición especificada de R. En esta partición, es conveniente elegir los centros de las subregiones como los puntos en los que se evalúa $f(x, y)$.



$$\begin{array}{cccc} \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right) & \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right) & \left(\frac{1}{8}, \frac{5}{8}\right) & \left(\frac{1}{8}, \frac{7}{8}\right) \\ \left(\frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right) & \left(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right) & \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right) & \left(\frac{3}{8}, \frac{7}{8}\right) \\ \left(\frac{5}{8}, \frac{1}{8}\right) & \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right) & \left(\frac{5}{8}, \frac{5}{8}\right) & \left(\frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right) \\ \left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}\right) & \left(\frac{7}{8}, \frac{3}{8}\right) & \left(\frac{7}{8}, \frac{5}{8}\right) & \left(\frac{7}{8}, \frac{7}{8}\right) \end{array}$$



Superficie:
$f(x, y) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$

Figura 14.12

Como el área de cada cuadrado es $\Delta A_i = \frac{1}{16}$, el volumen se puede aproximar por la suma

$$\sum_{i=1}^{16} f(x_i, y_i)\,\Delta A_i = \sum_{i=1}^{16} \left(1 - \frac{1}{2}x_i^2 - \frac{1}{2}y_i^2\right)\left(\frac{1}{16}\right) \approx 0.672.$$

Esta aproximación se muestra gráficamente en la figura 14.12. El volumen exacto del sólido es $\frac{2}{3}$ (ver el ejemplo 2). Se obtiene una mejor aproximación si se usa una partición más fina. Por ejemplo, con una partición con cuadrados con lados de longitud $\frac{1}{10}$, la aproximación es 0.668.

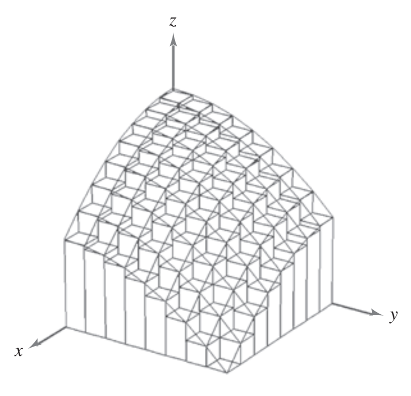


Figura 14.13

TECNOLOGÍA Algunas herramientas de graficación tridimensionales pueden representar figuras como la mostrada en la figura 14.12. La gráfica mostrada en la figura 14.13 se dibujó con una herramienta de graficación. En esta gráfica, obsérvese que cada uno de los prismas rectangulares está dentro de la región sólida.

En el ejemplo 1, hay que observar que, usando particiones más finas, se obtienen mejores aproximaciones al volumen. Esta observación sugiere que se podría obtener el volumen exacto tomando un límite. Es decir,

$$\text{Volumen} = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta A_i.$$

El significado exacto de este límite es que el límite es igual a L si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\left| L - \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta A_i \right| < \varepsilon$$

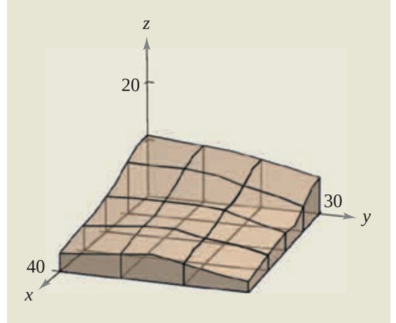
para toda partición Δ de la región plana R (que satisfaga $\|\Delta\| < \delta$) y para toda elección posible de x_i y y_i en la región i-ésima.

El uso del límite de una suma de Riemann para definir un volumen es un caso especial del uso del límite para definir una **integral doble**. Sin embargo, el caso general no requiere que la función sea positiva o continua.

EXPLORACIÓN

Las cantidades en la tabla representan la profundidad (en unidades de 10 yardas) de la tierra en el centro de cada cuadrado de la figura.

x \ y	1	2	3
1	10	9	7
2	7	7	4
3	5	5	4
4	4	5	3



Aproximar el número de yardas cúbicas de tierra en el primer octante. (Esta exploración la sugirió Robert Vojack, Ridgewood High School, Ridgewood, NJ.)

DEFINICIÓN DE INTEGRAL DOBLE

Si f está definida en una región cerrada y acotada R del plano xy, entonces la **integral doble de f sobre R** está dada por

$$\int_R\int f(x, y)\,dA = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta A_i$$

siempre que el límite exista. Si existe el límite, entonces f es **integrable** sobre R.

NOTA Una vez definidas las integrales dobles, se verá que una integral definida ocasionalmente se llama **integral simple**. ■

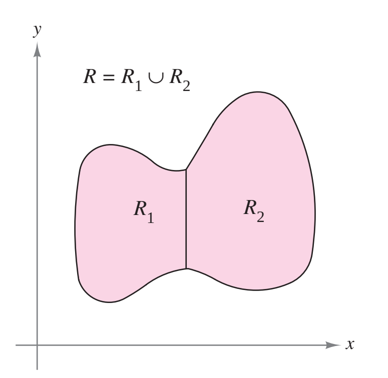
Para que la integral doble de f en la región R exista es suficiente que R pueda expresarse como la unión de un número finito de subregiones que no se sobrepongan (ver la figura 14.14) y que sean vertical u horizontalmente simples, y que f sea continua en la región R.

Una integral doble se puede usar para hallar el volumen de una región sólida que se encuentra entre el plano xy y la superficie dada por $z = f(x, y)$.

VOLUMEN DE UNA REGIÓN SÓLIDA

Si f es integrable sobre una región plana R y $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) en R, entonces el volumen de la región sólida que se encuentra sobre R y bajo la gráfica de f se define como

$$V = \int_R\int f(x, y)\,dA.$$



Dos regiones no se sobreponen si su intersección es un conjunto de área 0. En esta figura, el área del segmento de la recta común a R_1 y R_2 es 0

Figura 14.14

Propiedades de las integrales dobles

Las integrales dobles tienen muchas de las propiedades de las integrales simples.

TEOREMA 14.1 PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES DOBLES

Sean f y g continuas en una región cerrada y acotada R del plano, y sea c una constante.

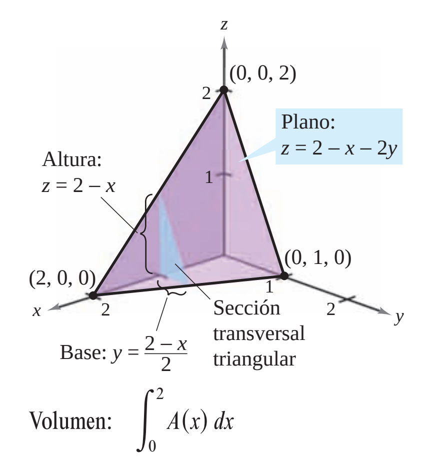
1. $\displaystyle\int_R\int cf(x, y)\,dA = c\int_R\int f(x, y)\,dA$

2. $\displaystyle\int_R\int [f(x, y) \pm g(x, y)]\,dA = \int_R\int f(x, y)\,dA \pm \int_R\int g(x, y)\,dA$

3. $\displaystyle\int_R\int f(x, y)\,dA \geq 0, \qquad \text{si } f(x, y) \geq 0$

4. $\displaystyle\int_R\int f(x, y)\,dA \geq \int_R\int g(x, y)\,dA, \qquad \text{si } f(x, y) \geq g(x, y)$

5. $\displaystyle\int_R\int f(x, y)\,dA = \int_{R_1}\int f(x, y)\,dA + \int_{R_2}\int f(x, y)\,dA$, donde R es la unión de dos subregiones R_1 y R_2 que no se sobreponen.



Volumen: $\int_0^2 A(x)\, dx$

Figura 14.15

Evaluación de integrales dobles

Normalmente, el primer paso para evaluar una integral doble es reescribirla como una integral iterada. Para mostrar cómo se hace esto, se utiliza el modelo geométrico de una integral doble: el volumen de un sólido.

Considérese la región sólida acotada por el plano $z = f(x, y) = 2 - x - 2y$ y por los tres planos coordenados, como se muestra en la figura 14.15. Cada sección transversal vertical paralela al plano yz es una región triangular cuya base tiene longitud $y = (2 - x)/2$ y cuya altura es $z = 2 - x$. Esto implica que para un valor fijo de x, el área de la sección transversal triangular es

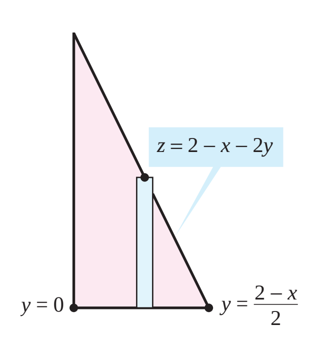
$$A(x) = \frac{1}{2}(\text{base})(\text{altura}) = \frac{1}{2}\left(\frac{2-x}{2}\right)(2-x) = \frac{(2-x)^2}{4}.$$

De acuerdo con la fórmula para el volumen de un sólido de secciones transversales conocidas (sección 7.2), el volumen del sólido es

$$\begin{aligned}\text{Volumen} &= \int_a^b A(x)\, dx \\ &= \int_0^2 \frac{(2-x)^2}{4}\, dx \\ &= -\frac{(2-x)^3}{12}\Bigg]_0^2 = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Este procedimiento funciona sin importar cómo se obtenga $A(x)$. En particular, $A(x)$ se puede hallar por integración, como se muestra en la figura 14.16. Es decir, se considera x constante, y se integra $z = 2 - x - 2y$ desde 0 hasta $(2 - x)/2$ para obtener

$$\begin{aligned}A(x) &= \int_0^{(2-x)/2} (2 - x - 2y)\, dy \\ &= \Big[(2-x)y - y^2\Big]_0^{(2-x)/2} \\ &= \frac{(2-x)^2}{4}.\end{aligned}$$

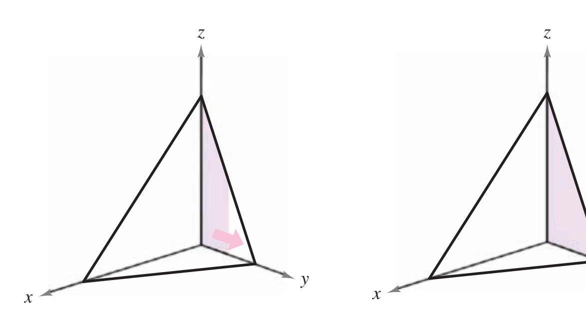


Sección transversal triangular
Figura 14.16

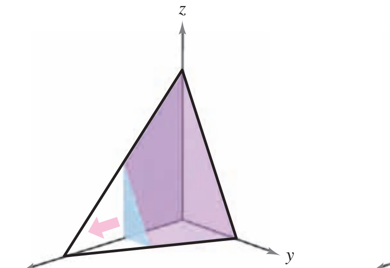
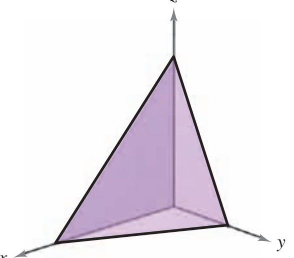
Combinando estos resultados, se tiene la *integral iterada*

$$\text{Volumen} = \iint_R f(x, y)\, dA = \int_0^2 \int_0^{(2-x)/2} (2 - x - 2y)\, dy\, dx.$$

Para comprender mejor este procedimiento, se puede imaginar la integración como dos barridos. En la integración interior, una recta vertical barre el área de una sección transversal. En la integración exterior, la sección transversal triangular barre el volumen, como se muestra en la figura 14.17.



Integrar con respecto a y para obtener el área de la sección transversal

Integrar con respecto a x para obtener el volumen del sólido

Figura 14.17

El teorema siguiente lo demostró el matemático italiano Guido Fubini (1879-1943). El teorema establece que si R es vertical u horizontalmente simple y f es continua en R, la integral doble de f en R es igual a una integral iterada.

TEOREMA 14.2 TEOREMA DE FUBINI

Sea f continua en una región plana R.

1. Si R está definida por $a \leq x \leq b$ y $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, donde g_1 y g_2 son continuas en $[a, b]$, entonces

$$\int_R\int f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx.$$

2. Si R está definida por $c \leq y \leq d$ y $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$, donde h_1 y h_2 son continuas en $[c, d]$, entonces

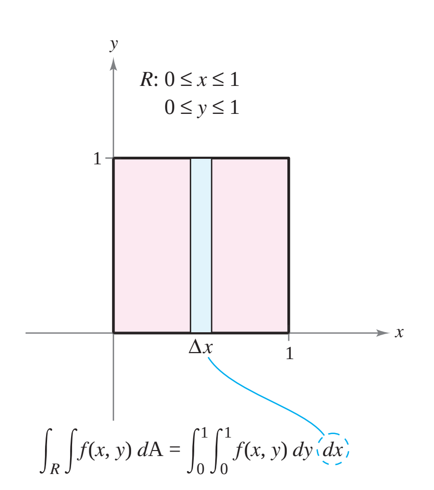
$$\int_R\int f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

EJEMPLO 2 Evaluación de una integral doble como integral iterada

Evaluar

$$\int_R\int \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2\right) dA$$

donde R es la región dada por $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.



El volumen de la región sólida es $\frac{2}{3}$
Figura 14.18

Solución Como la región R es un cuadrado, es vertical y horizontalmente simple y se puede emplear cualquier orden de integración. Se elige $dy\, dx$ colocando un rectángulo representativo vertical en la región, como se muestra en la figura 14.18. Con esto se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned}
\int_R\int \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2\right) dA &= \int_0^1 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2\right) dy\, dx \\
&= \int_0^1 \left[\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right)y - \frac{y^3}{6}\right]_0^1 dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2}x^2\right) dx \\
&= \left[\frac{5}{6}x - \frac{x^3}{6}\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

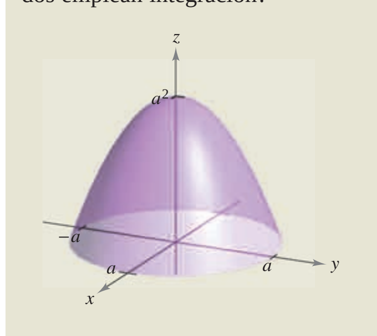
La integral doble evaluada en el ejemplo 2 representa el volumen de la región sólida que fue aproximado en el ejemplo 1. Nótese que la aproximación obtenida en el ejemplo 1 es buena $\left(0.672 \text{ contra } \frac{2}{3}\right)$ aun cuando se empleó una partición que constaba sólo en 16 cuadrados. El error se debe a que se usaron los centros de las subregiones cuadradas como los puntos para la aproximación. Esto es comparable a la aproximación de una integral simple con la regla del punto medio.

EXPLORACIÓN

El volumen de un sector de paraboloide
El sólido del ejemplo 3 tiene una base elíptica (no circular). Considerar la región limitada o acotada por el paraboloide circular

$$z = a^2 - x^2 - y^2, \quad a > 0$$

y el plano xy. ¿Cuántas maneras de hallar el volumen de este sólido se conocen ahora? Por ejemplo, se podría usar el método del disco para encontrar el volumen como un sólido de revolución. ¿Todos los métodos emplean integración?



La dificultad para evaluar una integral simple $\int_a^b f(x)\,dx$ depende normalmente de la función f, y no del intervalo $[a, b]$. Ésta es una diferencia importante entre las integrales simples y las integrales dobles. En el ejemplo siguiente se integra una función similar a la de los ejemplos 1 y 2. Nótese que una variación en la región R lleva a un problema de integración mucho más difícil.

EJEMPLO 3 Hallar el volumen por medio de una integral doble

Hallar el volumen de la región sólida acotada por el paraboloide $z = 4 - x^2 - 2y^2$ y el plano xy.

Solución Haciendo $z = 0$, se ve que la base de la región, en el plano xy, es la elipse $x^2 + 2y^2 = 4$, como se muestra en la figura 14.19*a*. Esta región plana es vertical y horizontalmente simple, por tanto el orden $dy\,dx$ es apropiado.

Límites o cotas variables para y: $-\sqrt{\dfrac{(4 - x^2)}{2}} \le y \le \sqrt{\dfrac{(4 - x^2)}{2}}$

Límites o cotas constantes para x: $-2 \le x \le 2$

El volumen está dado por

$$V = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} (4 - x^2 - 2y^2)\,dy\,dx \qquad \text{Ver figura 14.19}b.$$

$$= \int_{-2}^{2}\left[(4 - x^2)y - \frac{2y^3}{3}\right]_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} dx$$

$$= \frac{4}{3\sqrt{2}}\int_{-2}^{2}(4 - x^2)^{3/2}\,dx$$

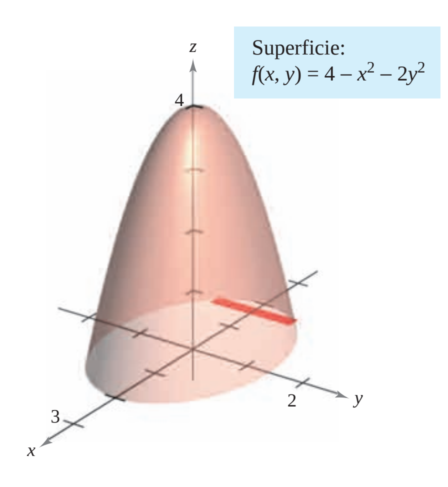
$$= \frac{4}{3\sqrt{2}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 16\cos^4\theta\,d\theta \qquad x = 2\text{ sen }\theta.$$

$$= \frac{64}{3\sqrt{2}}(2)\int_{0}^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta$$

$$= \frac{128}{3\sqrt{2}}\left(\frac{3\pi}{16}\right) \qquad \text{Fórmula de Wallis.}$$

$$= 4\sqrt{2}\pi.$$

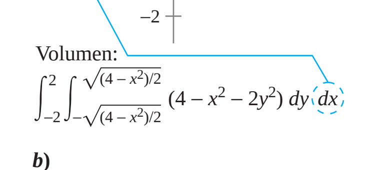
NOTA En el ejemplo 3, observar la utilidad de la fórmula de Wallis para evaluar $\int_0^{\pi/2}\cos^n\theta\,d\theta$. Esta fórmula se puede consultar en la sección 8.3. ■



a)

Base: $-2 \le x \le 2$
$-\sqrt{(4 - x^2)/2} \le y \le \sqrt{(4 - x^2)/2}$

y, 2, 1, −1, −2, x, −1, 1, Δx

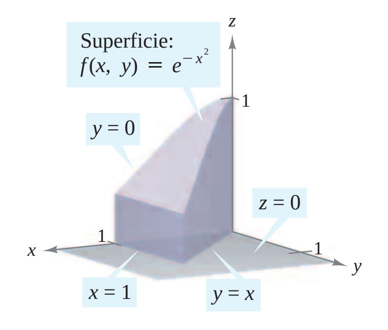


b)

Figura 14.19

En los ejemplos 2 y 3, los problemas se podrían haber resuelto empleando cualquiera de los órdenes de integración porque las regiones eran vertical y horizontalmente simples. En caso de haber usado el orden $dx\,dy$ se habrían obtenido integrales con dificultad muy parecida. Sin embargo, hay algunas ocasiones en las que uno de los órdenes de integración es mucho más conveniente que otro. El ejemplo 4 muestra uno de estos casos.

EJEMPLO 4 Comparación de diferentes órdenes de integración



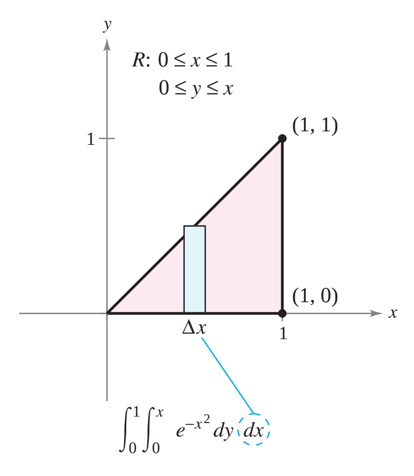
La base está acotada por $y = 0$, $y = x$ y $x = 1$
Figura 14.20

Hallar el volumen de la región sólida R acotada por la superficie

$$f(x, y) = e^{-x^2} \qquad \text{Superficie.}$$

y los planos $z = 0$, $y = 0$, $y = x$ y $x = 1$, como se muestra en la figura 14.20.

Solución La base de R en el plano xy está acotada por las rectas $y = 0$, $x = 1$ y $y = x$. Los dos posibles órdenes de integración se muestran en la figura 14.21.



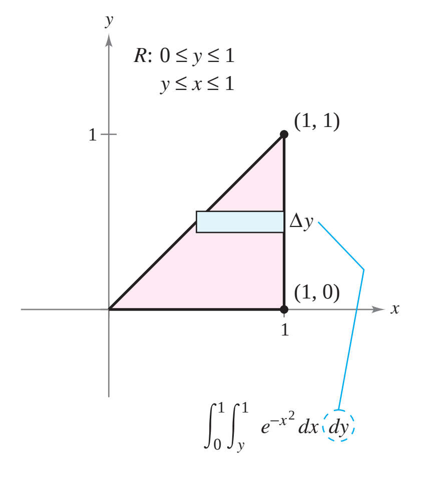


Figura 14.21

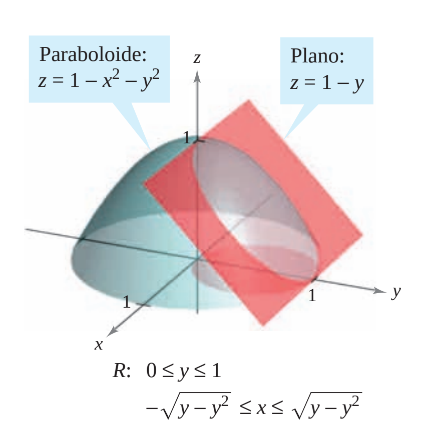
Estableciendo las integrales iteradas correspondientes, se ve que el orden $dx\,dy$ requiere la primitiva (o antiderivada) $\int e^{-x^2}\,dx$, la cual no es una función elemental. Por otro lado con el orden $dy\,dx$ se obtiene la integral

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^x e^{-x^2}\,dy\,dx &= \int_0^1 e^{-x^2}y\Big]_0^x\,dx \\
&= \int_0^1 xe^{-x^2}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big]_0^1 \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e} - 1\right) \\
&= \frac{e-1}{2e} \\
&\approx 0.316.
\end{aligned}$$

NOTA Tratar de utilizar un integrador simbólico para evaluar la integral del ejemplo 4.

EJEMPLO 5 Volumen de una región acotada por dos superficies

Hallar el volumen de la región sólida R acotada superiormente por el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ e inferiormente por el plano $z = 1 - y$, como se muestra en la figura 14.22.



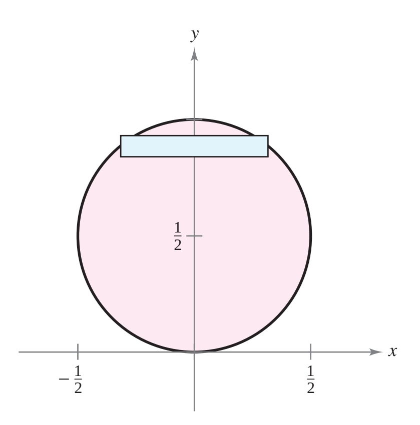
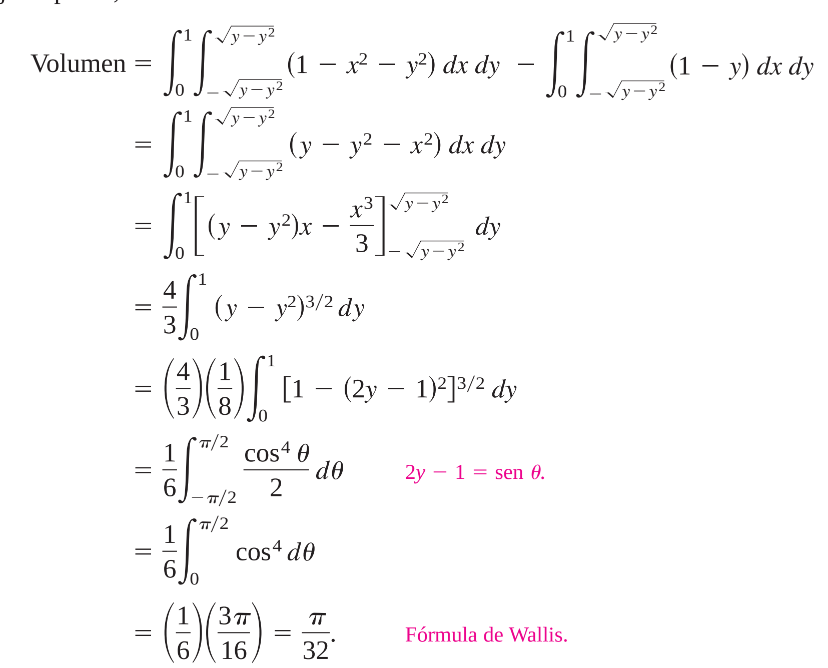


Figura 14.22

Solución Igualando los valores z, se determina que la intersección de las dos superficies se produce en el cilindro circular recto dado por

$$1 - y = 1 - x^2 - y^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = y - y^2.$$

Como el volumen de R es la diferencia entre el volumen bajo el paraboloide y el volumen bajo el plano, se tiene



$$\begin{aligned}
\text{Volumen} &= \int_0^1 \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} (1 - x^2 - y^2)\, dx\, dy - \int_0^1 \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} (1 - y)\, dx\, dy \\
&= \int_0^1 \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} (y - y^2 - x^2)\, dx\, dy \\
&= \int_0^1 \left[(y - y^2)x - \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} dy \\
&= \frac{4}{3} \int_0^1 (y - y^2)^{3/2}\, dy \\
&= \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{1}{8}\right) \int_0^1 [1 - (2y - 1)^2]^{3/2}\, dy \\
&= \frac{1}{6} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^4 \theta}{2}\, d\theta \qquad 2y - 1 = \operatorname{sen} \theta. \\
&= \frac{1}{6} \int_0^{\pi/2} \cos^4 d\theta \\
&= \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{3\pi}{16}\right) = \frac{\pi}{32}. \qquad \text{Fórmula de Wallis.}
\end{aligned}$$

Valor promedio de una función

Recordar de la sección 4.4 que para una función f en una variable, el valor promedio de f sobre $[a, b]$ es

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

Dada una función de f en dos variables, se puede encontrar el valor de f sobre la región R como se muestra en la siguiente definición.

DEFINICIÓN DEL VALOR PROMEDIO DE UNA FUNCIÓN SOBRE UNA REGIÓN

Si f es integrable sobre la región plana R, entonces el **valor promedio** de f sobre R es

$$\frac{1}{A} \int_R \int f(x, y)\, dA$$

donde A es el área de R.

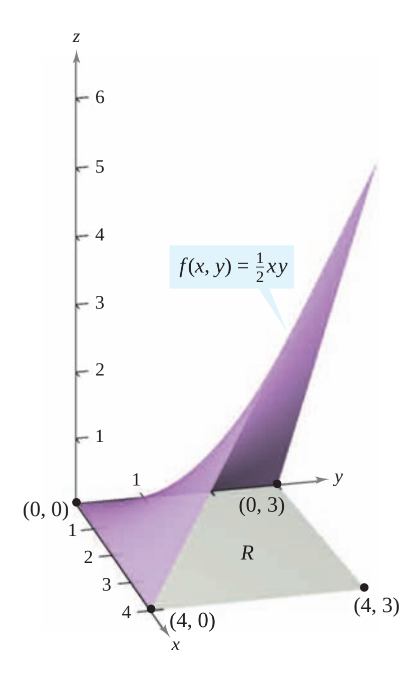


Figura 14.23

EJEMPLO 6 Encontrar el valor promedio de una función

Encontrar el valor promedio de $f(x, y) = \frac{1}{2}xy$ sobre la región R, donde R es un rectángulo con vértices (0, 0), (4, 0), (4, 3) y (0, 3).

Solución El área de la región rectangular R es $A = 12$ (ver la figura 14.23). El valor promedio está dado por

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{A}\int_R\int f(x, y)\, dA &= \frac{1}{12}\int_0^4\int_0^3 \frac{1}{2}xy\, dy\, dx \\
&= \frac{1}{12}\int_0^4 \frac{1}{4}xy^2\Big]_0^3\, dx \\
&= \left(\frac{1}{12}\right)\left(\frac{9}{4}\right)\int_0^4 x\, dx \\
&= \frac{3}{16}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4 \\
&= \left(\frac{3}{16}\right)(8) \\
&= \frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

14.2 Ejercicios

Aproximación **En los ejercicios 1 a 4, aproximar la integral $\int_R\int f(x, y)\, dA$ dividiendo el rectángulo R con vértices (0, 0), (4, 0), (4, 2) y (0, 2) en ocho cuadrados iguales y hallando la suma $\sum_{i=1}^{8} f(x_i, y_i)\,\Delta A_i$ donde (x_i, y_i) es el centro del cuadrado i-ésimo. Evaluar la integral iterada y compararla con la aproximación.**

1. $\displaystyle\int_0^4\int_0^2 (x + y)\, dy\, dx$

2. $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^4\int_0^2 x^2y\, dy\, dx$

3. $\displaystyle\int_0^4\int_0^2 (x^2 + y^2)\, dy\, dx$

4. $\displaystyle\int_0^4\int_0^2 \frac{1}{(x + 1)(y + 1)}\, dy\, dx$

5. ***Aproximación*** La tabla muestra valores de una función f sobre una región cuadrada R. Dividir la región en 16 cuadrados iguales y elegir (x_i, y_i) como el punto más cercano al origen en el cuadrado i-ésimo. Comparar esta aproximación con la obtenida usando el punto más lejano al origen en el cuadrado i-ésimo.

$\int_0^4\int_0^4 f(x, y)\, dy\, dx$

x \ y	0	1	2	3	4
0	32	31	28	23	16
1	31	30	27	22	15
2	28	27	24	19	12
3	23	22	19	14	7
4	16	15	12	7	0

6. ***Aproximación*** La figura muestra las curvas de nivel de una función f en una región cuadrada R. Aproximar la integral empleando cuatro cuadrados y tomando el punto medio de cada cuadrado como (x_i, y_i).

$\displaystyle\int_0^2\int_0^2 f(x, y)\, dy\, dx$

En los ejercicios 7 a 12, dibujar la región R y evaluar la integral iterada $\int_R\int f(x, y)\, dA$.

7. $\displaystyle\int_0^2\int_0^1 (1 + 2x + 2y)\, dy\, dx$

8. $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\cos^2 y\, dy\, dx$

9. $\displaystyle\int_0^6\int_{y/2}^3 (x + y)\, dx\, dy$

10. $\displaystyle\int_0^4\int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}} x^2y^2\, dx\, dy$

11. $\displaystyle\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} (x + y)\, dy\, dx$

12. $\displaystyle\int_0^1\int_{y-1}^0 e^{x+y}\, dx\, dy + \int_0^1\int_0^{1-y} e^{x+y}\, dx\, dy$

En los ejercicios 13 a 20, dar una integral para cada orden de integración y utilizar el orden más conveniente para evaluar la integral en la región R.

13. $\displaystyle\int_R\int xy\,dA$

R: rectángulo con vértices $(0, 0)$, $(0, 5)$, $(3, 5)$, $(3, 0)$

14. $\displaystyle\int_R\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y\,dA$

R: rectángulo con vértices $(-\pi, 0)$, $(\pi, 0)$, $(\pi, \pi/2)$, $(-\pi, \pi/2)$

15. $\displaystyle\int_R\int \frac{y}{x^2 + y^2}\,dA$

R: triángulo acotado por $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$, $x = 2$

16. $\displaystyle\int_R\int xe^y\,dA$

R: triángulo acotado por $y = 4 - x$, $y = 0$, $x = 0$

17. $\displaystyle\int_R\int -2y\,dA$

R: región acotada por $y = 4 - x^2$, $y = 4 - x$

18. $\displaystyle\int_R\int \frac{y}{1 + x^2}\,dA$

R: región acotada por $y = 0$, $y = \sqrt{x}$, $x = 4$

19. $\displaystyle\int_R\int x\,dA$

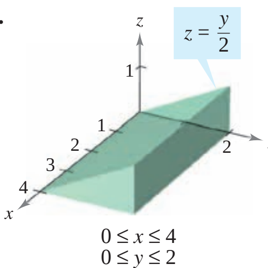
R: el sector circular en el primer cuadrante acotado por $y = \sqrt{25 - x^2}$, $3x - 4y = 0$, $y = 0$

20. $\displaystyle\int_R\int (x^2 + y^2)\,dA$

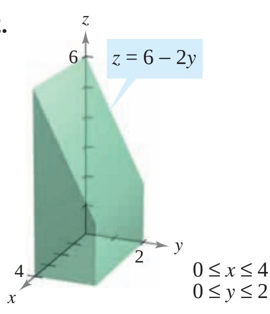
R: semicírculo acotado por $y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = 0$

En los ejercicios 21 a 30, utilizar una integral doble para hallar el volumen del sólido indicado.

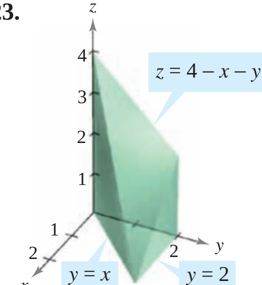
21.



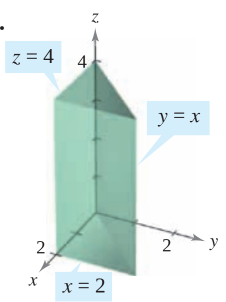
22.



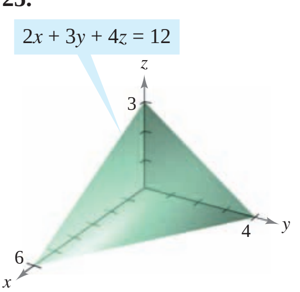
23.



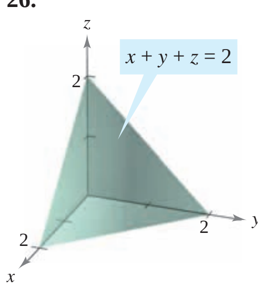
24.



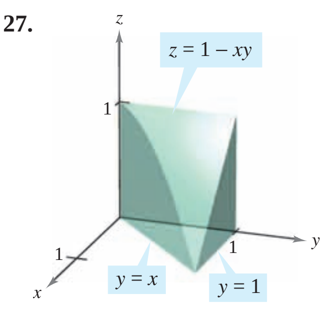
25.



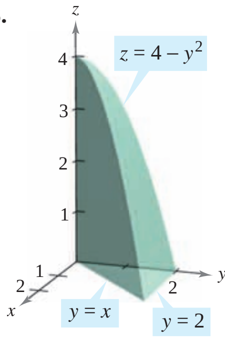
26.



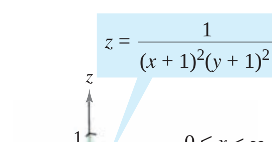
27.



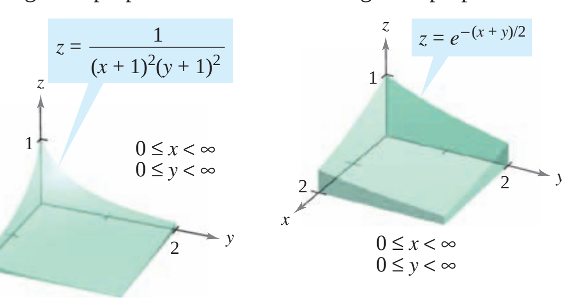
28.



29. Integral impropia



30. Integral impropia

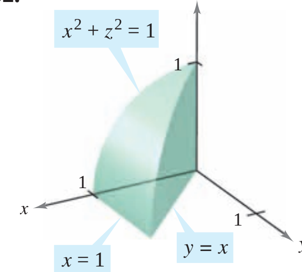


CAS **En los ejercicios 31 y 32, utilizar un sistema algebraico por computadora y hallar el volumen del sólido.**

31.

$z = \sqrt{8 - x^2 - y^2}$

32.



En los ejercicios 33 a 40, dar una integral doble para hallar el volumen del sólido limitado o acotado por las gráficas de las ecuaciones.

33. $z = xy$, $z = 0$, $y = x$, $x = 1$, primer octante

34. $y = 0$, $z = 0$, $y = x$, $z = x$, $x = 0$, $x = 5$

35. $z = 0$, $z = x^2$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 4$

36. $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

37. $x^2 + z^2 = 1,\ y^2 + z^2 = 1$, primer octante

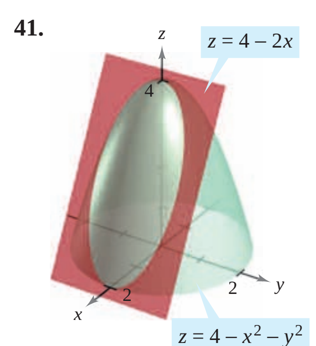
38. $y = 4 - x^2,\ z = 4 - x^2$, primer octante

39. $z = x + y,\ x^2 + y^2 = 4$, primer octante

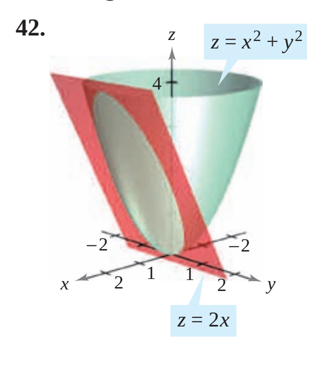
40. $z = \dfrac{1}{1 + y^2},\ x = 0,\ x = 2,\ y \geq 0$

En los ejercicios 41 a 46, establecer una integral doble para encontrar el volumen de una región sólida limitada por las gráficas de las ecuaciones. No evaluar la integral.

41.



42.



43. $z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 = 4,\ z = 0$

44. $z = \text{sen}^2\, x,\ z = 0,\ 0 \leq x \leq \pi,\ 0 \leq y \leq 5$

45. $z = x^2 + 2y^2,\ z = 4y$

46. $z = x^2 + y^2,\ z = 18 - x^2 - y^2$

CAS **En los ejercicios 47 a 50, utilizar un sistema algebraico por computadora y hallar el volumen del sólido limitado o acotado por las gráficas de las ecuaciones.**

47. $z = 9 - x^2 - y^2,\ z = 0$

48. $x^2 = 9 - y,\ z^2 = 9 - y$, primer octante

49. $z = \dfrac{2}{1 + x^2 + y^2},\ z = 0,\ y = 0,\ x = 0,\ y = -0.5x + 1$

50. $z = \ln(1 + x + y),\ z = 0,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 4 - \sqrt{y}$

51. Si f es una función continua tal que $0 \leq f(x, y) \leq 1$ en una región R de área 1, demostrar que $0 \leq \int_R\int f(x, y)\, dA \leq 1$.

52. Hallar el volumen del sólido que se encuentra en el primer octante, acotado por los planos coordenados y el plano $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$, donde $a > 0$, $b > 0$ y $c > 0$.

En los ejercicios 53 a 58, trazar la región de integración. Después evaluar la integral iterada y, si es necesario, cambiar el orden de integración.

53. $\displaystyle\int_0^1\int_{y/2}^{1/2} e^{-x^2}\, dx\, dy$

54. $\displaystyle\int_0^{\ln 10}\int_{e^x}^{10} \frac{1}{\ln y}\, dy\, dx$

55. $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4 - y^2}\, dy\, dx$

56. $\displaystyle\int_0^3\int_{y/3}^{1} \frac{1}{1 + x^4}\, dx\, dy$

57. $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\arccos y} \text{sen}\, x\sqrt{1 + \text{sen}^2\, x}\, dx\, dy$

58. $\displaystyle\int_0^2\int_{(1/2)x^2}^{2} \sqrt{y}\cos y\, dy\, dx$

Valor promedio **En los ejercicios 59 a 64, encontrar el valor promedio de $f(x, y)$ sobre la región R.**

59. $f(x, y) = x$
R: rectángulo con vértices (0, 0), (4, 0), (4, 2), (0, 2)

60. $f(x, y) = 2xy$
R: rectángulo con vértices (0, 0), (5, 0), (5, 3), (0, 3)

61. $f(x, y) = x^2 + y^2$
R: cuadrado con vértices (0, 0), (2, 0), (2, 2), (0, 2)

62. $f(x, y) = \dfrac{1}{x + y}$
R: triángulo con vértices (0, 0), (1, 0), (1, 1)

63. $f(x, y) = e^{x+y}$
R: triángulo con vértices (0, 0), (0, 1), (1, 1)

64. $f(x, y) = \text{sen}(x + y)$
R: rectángulo con vértices (0, 0), $(\pi, 0)$, (π, π), $(0, \pi)$

65. ***Producción promedio*** La función de producción Cobb-Douglas para un fabricante de automóviles es $f(x, y) = 100x^{0.6}y^{0.4}$ donde x es el número de unidades de trabajo y y es el número de unidades de capital. Estimar el nivel promedio de producción si el número x de unidades de trabajo varía entre 200 y 250 y el número y de unidades de capital varía entre 300 y 325.

66. ***Temperatura promedio*** La temperatura en grados Celsius sobre la superficie de una placa metálica es $T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2$, donde x y y están medidas en centímetros. Estimar la temperatura promedio si x varía entre 0 y 2 centímetros y y varía entre 0 y 4 centímetros.

Desarrollo de conceptos

67. Enunciar la definición de integral doble. Dar la interpretación geométrica de una integral doble si el integrando es una función no negativa sobre la región de integración.

68. Sea R una región en el plano xy cuya área es B. Si $f(x, y) = k$ para todo punto (x, y) en R, ¿cuál es el valor de $\int_R\int f(x, y)\, dA$? Explicar.

69. Sea R un condado en la parte norte de Estados Unidos, y sea $f(x, y)$ la precipitación anual de nieve en el punto (x, y) de R. Interpretar cada uno de los siguientes.

a) $\displaystyle\int_R\int f(x, y)\, dA$ *b)* $\dfrac{\displaystyle\int_R\int f(x, y)\, dA}{\displaystyle\int_R\int dA}$

70. Identificar la expresión que es inválida. Explicar el razonamiento.

a) $\displaystyle\int_0^2\int_0^3 f(x, y)\, dy\, dx$ *b)* $\displaystyle\int_0^2\int_0^y f(x, y)\, dy\, dx$

c) $\displaystyle\int_0^2\int_x^3 f(x, y)\, dy\, dx$ *d)* $\displaystyle\int_0^2\int_0^x f(x, y)\, dy\, dx$

71. Sea la región plana R un círculo unitario y el máximo valor de f sobre R sea 6. ¿Es el valor más grande posible de $\int_R\int f(x, y)\, dy\, dx$ igual a 6? ¿Por qué sí o por qué no? Si es no, ¿cuál es el valor más grande posible?

Para discusión

72. Las siguientes integrales iteradas representan la solución al mismo problema. ¿Cuál integral iterada es más fácil de evaluar? Explicar el razonamiento.

$$\int_0^4 \int_{x/2}^2 \text{sen } y^2 \, dy \, dx = \int_0^2 \int_0^{2y} \text{sen } y^2 \, dx \, dy$$

Probabilidad **Una función de densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias continuas x y y es una función $f(x, y)$ que satisface las propiedades siguientes.**

a) **$f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y)** ***b)*** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dA = 1$

c) $\displaystyle P[(x, y) \in R] = \int\!\!\int_R f(x, y)\, dA$

En los ejercicios 73 a 76, mostrar que la función es una función de densidad de probabilidad conjunta y hallar la probabilidad requerida.

73. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & 0 \leq x \leq 5,\ 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{en cualquier otro punto} \end{cases}$

$P(0 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 2)$

74. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}xy, & 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{en cualquier otro punto} \end{cases}$

$P(0 \leq x \leq 1,\ 1 \leq y \leq 2)$

75. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{27}(9 - x - y), & 0 \leq x \leq 3,\ 3 \leq y \leq 6 \\ 0, & \text{en cualquier otro punto} \end{cases}$

$P(0 \leq x \leq 1,\ 4 \leq y \leq 6)$

76. $f(x, y) = \begin{cases} e^{-x-y}, & x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 0, & \text{en cualquier otro punto} \end{cases}$

$P(0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq 1)$

77. ***Aproximación*** En una fábrica de cemento la base de un montón de arena es rectangular con dimensiones aproximadas de 20 por 30 metros. Si la base se coloca en el plano xy con un vértice en el origen, las coordenadas de la superficie del montón son (5, 5, 3), (15, 5, 6), (25, 5, 4), (5, 15, 2), (15, 15, 7) y (25, 15, 3). Aproximar el volumen de la arena en el montón.

78. ***Programación*** Considerar una función continua $f(x, y)$ sobre la región rectangular R con vértices (a, c), (b, c), (a, d) y (b, d) donde $a < b$ y $c < d$. Dividir los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$ en m y n subintervalos, de modo que los subintervalos en una dirección dada sean de igual longitud. Escribir un programa para que una herramienta de graficación calcule la suma

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j)\,\Delta A_i \approx \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dA$$

donde (x_i, y_j) es el centro de un rectángulo representativo en R.

CAS ***Aproximación*** **En los ejercicios 79 a 82, *a*) utilizar un sistema algebraico por computadora y aproximar la integral iterada, y *b*) utilizar el programa del ejercicio 78 para aproximar la integral iterada con los valores dados de *m* y *n*.**

79. $\displaystyle\int_0^1\int_0^2 \text{sen}\sqrt{x + y}\, dy\, dx$

$m = 4,\ n = 8$

80. $\displaystyle\int_0^2\int_0^4 20e^{-x^3/8} dy\, dx$

$m = 10,\ n = 20$

81. $\displaystyle\int_4^6\int_0^2 y \cos\sqrt{x}\, dx\, dy$

$m = 4,\ n = 8$

82. $\displaystyle\int_1^4\int_1^2 \sqrt{x^3 + y^3}\, dx\, dy$

$m = 6,\ n = 4$

Aproximación **En los ejercicios 83 y 84, determinar qué valor aproxima mejor el volumen del sólido entre el plano *xy* y la función sobre la región. (Hacer la elección con base en un dibujo del sólido y *sin* realizar ningún cálculo.)**

83. $f(x, y) = 4x$

R: cuadrado con vértices (0, 0), (4, 0), (4, 4), (0, 4)

a) -200 *b*) 600 *c*) 50 *d*) 125 *e*) 1 000

84. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

R: círculo acotado por $x^2 + y^2 = 9$

a) 50 *b*) 500 *c*) -500 *d*) 5 *e*) 5 000

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 85 y 86, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.**

85. El volumen de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ está dado por la integral

$$V = 8\int_0^1\int_0^1 \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dx\, dy.$$

86. Si $f(x, y) \leq g(x, y)$ para todo (x, y) en R, y f y g son continuas en R, entonces $\int_R\!\int f(x, y)\, dA \leq \int_R\!\int g(x, y)\, dA$.

87. Sea $f(x) = \int_1^x e^{t^2}\, dt$. Hallar el valor promedio de f en el intervalo $[0, 1]$.

88. Hallar $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}\, dx.$ $\left(\textit{Sugerencia:}\text{ Evaluar } \displaystyle\int_1^2 e^{-xy}\, dy.\right)$

89. Determinar la región R en el plano xy que maximiza el valor de $\int_R\!\int (9 - x^2 - y^2)\, dA$.

90. Determinar la región R en el plano xy que minimiza el valor de $\int_R\!\int (x^2 + y^2 - 4)\, dA$.

91. Hallar $\int_0^2 [\arctan(\pi x) - \arctan x]\, dx$. (*Sugerencia:* Convertir la integral en una integral doble.)

92. Utilizar un argumento geométrico para mostrar que

$$\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-y^2}} \sqrt{9 - x^2 - y^2}\, dx\, dy = \frac{9\pi}{2}.$$

Preparación del examen Putnam

93. Evaluar $\int_0^a \int_0^b e^{\text{máx}\{b^2x^2,\, a^2y^2\}}\, dy\, dx$, donde a y b son positivos.

94. Probar que si $\lambda > \frac{1}{2}$ no existe una función real u tal que, para todo x en el intervalo cerrado $0 \leq x \leq 1$, $u(x) = 1 + \lambda\int_x^1 u(y)u(y - x)\, dy$.

14.3 Cambio de variables: coordenadas polares

- **Expresar y evaluar integrales dobles en coordenadas polares.**

Integrales dobles en coordenadas polares

Algunas integrales dobles son *mucho* más fáciles de evaluar en forma polar que en forma rectangular. Esto es así especialmente cuando se trata de regiones circulares, cardioides y pétalos de una curva rosa, y de integrandos que contienen $x^2 + y^2$.

En la sección 10.4 se vio que las coordenadas polares (r, θ) de un punto están relacionadas con las coordenadas rectangulares (x, y) del punto, de la manera siguiente.

$$x = r\cos\theta \quad \text{y} \quad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{y} \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

EJEMPLO 1 Utilizar coordenadas polares para describir una región

Utilizar coordenadas polares para describir cada una de las regiones mostradas en la figura 14.24.

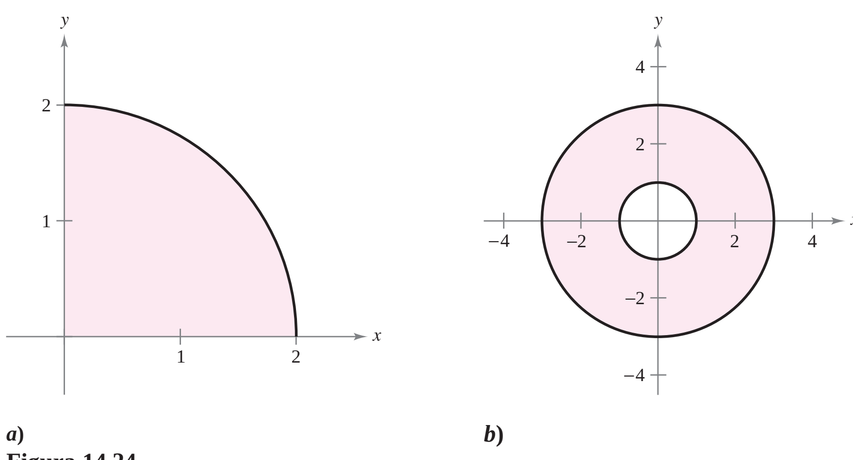


Figura 14.24

Solución

a) La región R es un cuarto del círculo de radio 2. Esta región se describe en coordenadas polares como

$$R = \{(r, \theta): 0 \le r \le 2, \quad 0 \le \theta \le \pi/2\}.$$

b) La región R consta de todos los puntos comprendidos entre los círculos concéntricos de radios 1 y 3. Esta región se describe en coordenadas polares como

$$R = \{(r, \theta): 1 \le r \le 3, \quad 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$

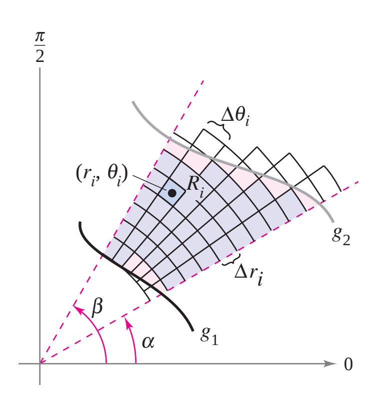
Sector polar
Figura 14.25

Las regiones del ejemplo 1 son casos especiales de **sectores polares**

$$R = \{(r, \theta): r_1 \le r \le r_2, \quad \theta_1 \le \theta \le \theta_2\}$$

Sector polar.

como el mostrado en la figura 14.25.



La red o cuadrícula polar se sobrepone sobre la región R
Figura 14.26

Para definir una integral doble de una función continua $z = f(x, y)$ en coordenadas polares, considerar una región R limitada o acotada por las gráficas de $r = g_1(\theta)$ y $r = g_2(\theta)$ y las rectas $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$. En lugar de hacer una partición de R en rectángulos pequeños, se utiliza una partición en sectores polares pequeños. A R se le superpone una red o cuadrícula polar formada por rayos o semirrectas radiales y arcos circulares, como se muestra en la figura 14.26. Los sectores polares R_i que se encuentran completamente dentro de R forman una **partición polar interna** Δ, cuya **norma** $\|\Delta\|$ es la longitud de la diagonal más larga en los n sectores polares.

Considerar un sector polar específico R_i, como se muestra en la figura 14.27. Se puede mostrar (ver ejercicio 75) que el área de R_i es

$$\Delta A_i = r_i \Delta r_i \Delta\theta_i \qquad \text{Área de } R_i.$$

donde $\Delta r_i = r_2 - r_1$ y $\Delta\theta_i = \theta_2 - \theta_1$. Esto implica que el volumen del sólido de altura $f(r_i \cos\theta_i, r_i \operatorname{sen}\theta_i)$ sobre R_i es aproximadamente

$$f(r_i \cos\theta_i, r_i \operatorname{sen}\theta_i) r_i \Delta r_i \Delta\theta_i$$

y se tiene

$$\int_R\int f(x, y)\, dA \approx \sum_{i=1}^{n} f(r_i \cos\theta_i, r_i \operatorname{sen}\theta_i) r_i \Delta r_i \Delta\theta_i.$$

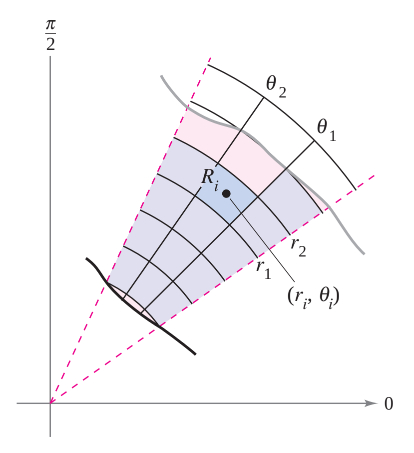
La suma de la derecha se puede interpretar como una suma de Riemann para $f(r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)r$. La región R corresponde a una región S *horizontalmente simple* en el plano $r\theta$, como se muestra en la figura 14.28. Los sectores polares R_i corresponden a los rectángulos S_i, y el área ΔA_i de S_i es $\Delta r_i \Delta\theta_i$. Por tanto, el lado derecho de la ecuación corresponde a la integral doble

$$\int_S\int f(r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta) r\, dA.$$

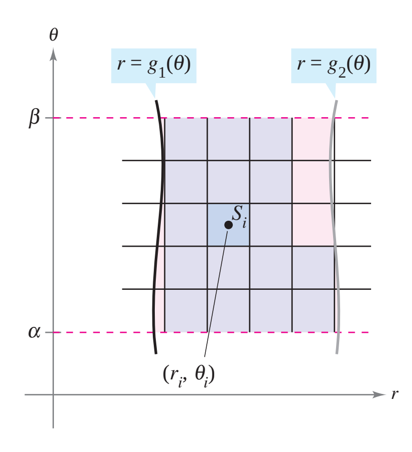
A partir de esto, se puede aplicar el teorema 14.2 para escribir

$$\begin{aligned}\int_R\int f(x, y)\, dA &= \int_S\int f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) r\, dA\\ &= \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) r\, dr\, d\theta.\end{aligned}$$

Esto sugiere el teorema siguiente, cuya demostración se verá en la sección 14.8.



El sector polar R_i es el conjunto de todos los puntos (r, θ) tal que $r_1 \le r \le r_2$ y $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$.
Figura 14.27



Región S horizontalmente simple
Figura 14.28

TEOREMA 14.3 CAMBIO DE VARIABLES A LA FORMA POLAR

Sea R una región plana que consta de todos los puntos $(x, y) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$ que satisfacen las condiciones $0 \le g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$, donde $0 \le (\beta - \alpha) \le 2\pi$. Si g_1 y g_2 son continuas en $[\alpha, \beta]$ y f es continua en R, entonces

$$\int_R\int f(x, y)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)r\,dr\,d\theta.$$

EXPLORACIÓN

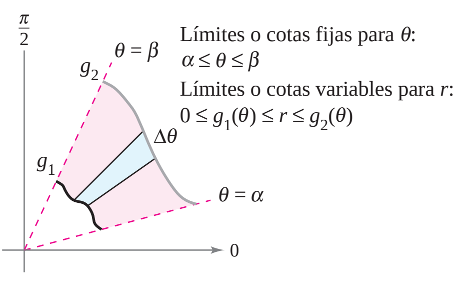
Volumen de un sector paraboloide En la exploración de la página 997 se pidió resumir los diferentes métodos hasta ahora estudiados para calcular el volumen del sólido limitado o acotado por el paraboloide

$$z = a^2 - x^2 - y^2, \quad a > 0$$

y el plano xy. Ahora se conoce un método más. Utilizarlo para encontrar el volumen del sólido.

NOTA Si $z = f(x, y)$ es no negativa en R, entonces la integral del teorema 14.3 puede interpretarse como el volumen de la región sólida entre la gráfica de f y la región R. Cuando se usa la integral en el teorema 14.3, asegurarse de no omitir el factor extra de r en el integrando. ■

La región R puede ser de dos tipos básicos, regiones ***r*-simples** y regiones ***θ*-simples**, como se muestra en la figura 14.29.



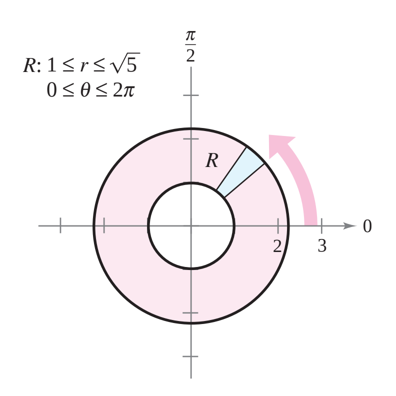
Región *r*-simple
Figura 14.29

π/2
Límites o cotas variables para θ:
$0 \le h_1(r) \le \theta \le h_2(r)$
Límites o cotas fijas para r:
$r_1 \le r \le r_2$
h_2 h_1 Δr $r = r_1$ $r = r_2$ 0

Región *θ*-simple

EJEMPLO 2 Evaluar una integral usando coordenadas polares doble

Sea R la región anular comprendida entre los dos círculos $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 5$. Evaluar la integral $\int_R\int (x^2 + y)\,dA$.



Región *r*-simple
Figura 14.30

Solución Los límites o cotas polares son $1 \le r \le \sqrt{5}$ y $0 \le \theta \le 2\pi$, como se muestra en la figura 14.30. Además, $x^2 = (r\cos\theta)^2$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$. Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned}
\int_R\int (x^2 + y)\,dA &= \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{5}} (r^2\cos^2\theta + r\operatorname{sen}\theta)r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{5}} (r^3\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}\theta)\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^4}{4}\cos^2\theta + \frac{r^3}{3}\operatorname{sen}\theta\right)\Bigg]_1^{\sqrt{5}} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(6\cos^2\theta + \frac{5\sqrt{5} - 1}{3}\operatorname{sen}\theta\right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(3 + 3\cos 2\theta + \frac{5\sqrt{5} - 1}{3}\operatorname{sen}\theta\right) d\theta \\
&= \left(3\theta + \frac{3\operatorname{sen} 2\theta}{2} - \frac{5\sqrt{5} - 1}{3}\cos\theta\right)\Bigg]_0^{2\pi} \\
&= 6\pi.
\end{aligned}$$

En el ejemplo 2, notar el factor extra de r en el integrando. Esto proviene de la fórmula para el área de un sector polar. En notación diferencial, se puede escribir

$$dA = r\,dr\,d\theta$$

lo que indica que el área de un sector polar aumenta al alejarse del origen.

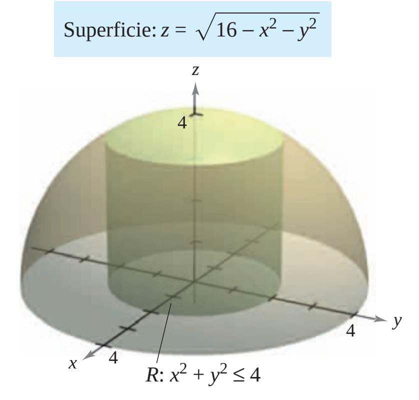


Figura 14.31

EJEMPLO 3 Cambio de variables a coordenadas polares

Utilizar las coordenadas polares para hallar el volumen de la región sólida limitada superiormente por el hemisferio

$$z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$$ Hemisferio que forma la superficie superior.

e inferiormente por la región circular R dada por

$$x^2 + y^2 \le 4$$ Región circular que forma la superficie inferior.

como se muestra en la figura 14.31.

Solución En la figura 14.31 se puede ver que R tiene como límites o cotas

$$-\sqrt{4 - y^2} \le x \le \sqrt{4 - y^2}, \quad -2 \le y \le 2$$

y que $0 \le z \le \sqrt{16 - x^2 - y^2}$. En coordenadas polares, las cotas son

$$0 \le r \le 2 \quad \text{y} \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

con altura $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} = \sqrt{16 - r^2}$. Por consiguiente, el volumen V está dado por

$$\begin{aligned}
V = \int\!\!\int_R f(x, y)\,dA &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{16 - r^2}\,r\,dr\,d\theta \\
&= -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} (16 - r^2)^{3/2}\Big]_0^2\,d\theta \\
&= -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \left(24\sqrt{3} - 64\right)d\theta \\
&= -\frac{8}{3}\left(3\sqrt{3} - 8\right)\theta\Big]_0^{2\pi} \\
&= \frac{16\pi}{3}\left(8 - 3\sqrt{3}\right) \approx 46.979.
\end{aligned}$$

NOTA Para ver la ventaja de las coordenadas polares en el ejemplo 3, hay que tratar de evaluar la integral iterada rectangular correspondiente

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{16 - x^2 - y^2}\,dx\,dy.$$

TECNOLOGÍA Todo sistema algebraico por computadora que calcula integrales dobles en coordenadas rectangulares también calcula integrales dobles en coordenadas polares. La razón es que una vez que se ha formado la integral iterada, su valor no cambia al usar variables diferentes. En otras palabras, si se usa un sistema algebraico por computadora para evaluar

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{16 - x^2}\,x\,dx\,dy$$

se deberá obtener el mismo valor que se obtuvo en el ejemplo 3.

Así como ocurre con coordenadas rectangulares, la integral doble

$$\int\!\!\int_R dA$$

puede usarse para calcular el área de una región en el plano.

EJEMPLO 4 Hallar áreas de regiones polares

Utilizar una integral doble para hallar el área encerrada por la gráfica de $r = 3\cos 3\theta$.

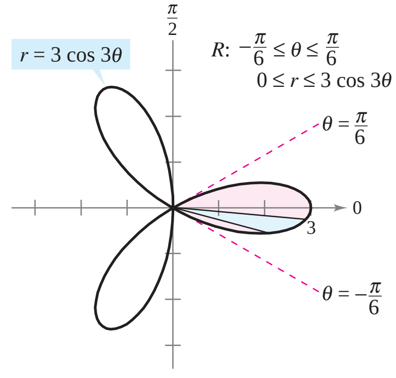


Figura 14.32

Solución Sea R un pétalo de la curva mostrada en la figura 14.32. Esta región es r-simple y los límites son los siguientes.

$$-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \qquad \text{Límites o cotas fijas para } \theta.$$

$$0 \leq r \leq 3\cos 3\theta \qquad \text{Límites o cotas variables para } r.$$

Por tanto, el área de un pétalo es

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}A = \int\!\!\int_R dA &= \int_{-\pi/6}^{\pi/6}\int_0^{3\cos 3\theta} r\,dr\,d\theta \\
&= \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{r^2}{2}\bigg]_0^{3\cos 3\theta} d\theta \\
&= \frac{9}{2}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos^2 3\theta\,d\theta \\
&= \frac{9}{4}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} (1 + \cos 6\theta)\,d\theta = \frac{9}{4}\bigg[\theta + \frac{1}{6}\operatorname{sen} 6\theta\bigg]_{-\pi/6}^{\pi/6} = \frac{3\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Así, el área total es $A = 9\pi/4$.

Como se ilustra en el ejemplo 4, el área de una región en el plano puede representarse mediante

$$A = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} r\,dr\,d\theta.$$

Si $g_1(\theta) = 0$, se obtiene

$$A = \int_\alpha^\beta \int_0^{g_2(\theta)} r\,dr\,d\theta = \int_\alpha^\beta \frac{r^2}{2}\bigg]_0^{g_2(\theta)} d\theta = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}(g_2(\theta))^2\,d\theta$$

lo cual concuerda con el teorema 10.13.

Hasta ahora en esta sección, todos los ejemplos de integrales iteradas en forma polar han sido de la forma

$$\int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)r\,dr\,d\theta$$

en donde el orden de integración es primero con respecto a r. Algunas veces se puede simplificar el problema de integración cambiando el orden de integración, como se ilustra en el ejemplo siguiente.



EJEMPLO 5 Cambio del orden de integración

Hallar el área de la región acotada superiormente por la espiral $r = \pi/(3\theta)$ e inferiormente por el eje polar, entre $r = 1$ y $r = 2$.

Solución La región se muestra en la figura 14.33. Las cotas o límites polares de la región son

$$1 \leq r \leq 2 \quad \text{y} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3r}.$$

Por tanto, el área de la región puede evaluarse como sigue.

$$A = \int_1^2 \int_0^{\pi/(3r)} r\,d\theta\,dr = \int_1^2 r\theta\bigg]_0^{\pi/(3r)} dr = \int_1^2 \frac{\pi}{3}\,dr = \frac{\pi r}{3}\bigg]_1^2 = \frac{\pi}{3}$$

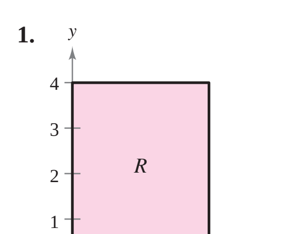
$\frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\theta = \frac{\pi}{6}$, $r = \frac{\pi}{3\theta}$, 0, 1, 2

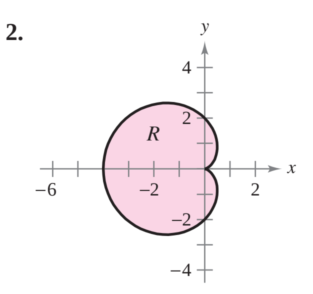
R: $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3r}$
$1 \leq r \leq 2$

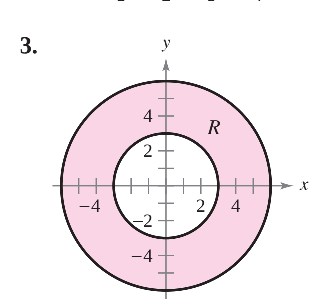
Región θ-simple
Figura 14.33

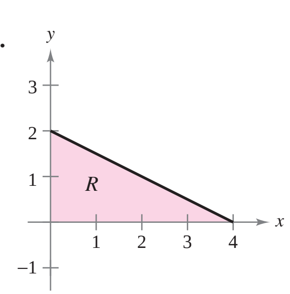
14.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4 se muestra la región R para la integral $\int_R\int f(x, y)\, dA$. Decir si serían más convenientes coordenadas rectangulares o polares para evaluar la integral.

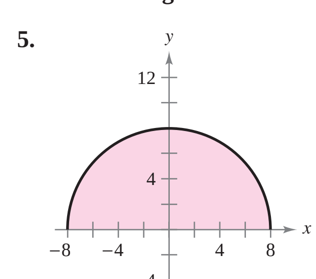
1. 

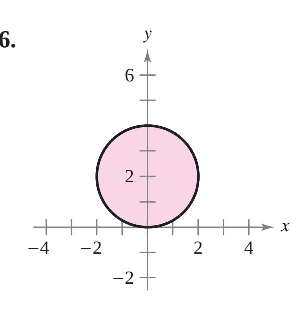
2. 

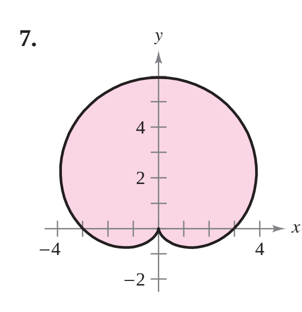
3. 

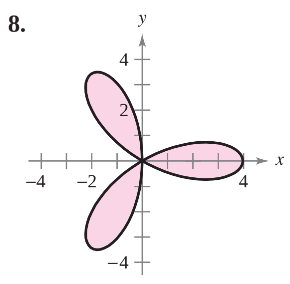
4. 

En los ejercicios 5 a 8, utilizar las coordenadas polares para describir la región mostrada.

5. 

6. 

7. 

8. 

En los ejercicios 9 a 16, evaluar la integral doble $\int_R\int f(r, \theta)\, dA$, y dibujar la región R.

9. $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\cos\theta} r\, dr\, d\theta$

10. $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\operatorname{sen}\theta} r^2\, dr\, d\theta$

11. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{6} 3r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta$

12. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_0^{4} r^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta\, dr\, d\theta$

13. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_2^{3} \sqrt{9-r^2}\, r\, dr\, d\theta$

14. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{3} re^{-r^2}\, dr\, d\theta$

15. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{1+\operatorname{sen}\theta} \theta r\, dr\, d\theta$

16. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{1-\cos\theta} (\operatorname{sen}\theta) r\, dr\, d\theta$

En los ejercicios 17 a 26, evaluar la integral iterada pasando a coordenadas polares.

17. $\displaystyle\int_0^{a}\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} y\, dx\, dy$

18. $\displaystyle\int_0^{a}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} x\, dy\, dx$

19. $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^2+y^2)\, dy\, dx$

20. $\displaystyle\int_0^{1}\int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} (x^2+y^2)\, dy\, dx$

21. $\displaystyle\int_0^{3}\int_0^{\sqrt{9-x^2}} (x^2+y^2)^{3/2}\, dy\, dx$

22. $\displaystyle\int_0^{2}\int_y^{\sqrt{8-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$

23. $\displaystyle\int_0^{2}\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} xy\, dy\, dx$

24. $\displaystyle\int_0^{4}\int_0^{\sqrt{4y-y^2}} x^2\, dx\, dy$

25. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \cos(x^2+y^2)\, dy\, dx$

26. $\displaystyle\int_0^{2}\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2}\, dy\, dx$

En los ejercicios 27 y 28, combinar la suma de las dos integrales iteradas en una sola integral iterada pasando a coordenadas polares. Evaluar la integral iterada resultante.

27. $\displaystyle\int_0^{2}\int_0^{x} \sqrt{x^2+y^2}\, dy\, dx + \int_2^{2\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{8-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dy\, dx$

28. $\displaystyle\int_0^{5\sqrt{2}/2}\int_0^{x} xy\, dy\, dx + \int_{5\sqrt{2}/2}^{5}\int_0^{\sqrt{25-x^2}} xy\, dy\, dx$

En los ejercicios 29 a 32, utilizar coordenadas polares para escribir y evaluar la integral doble $\int_R\int f(x, y)\, dA$.

29. $f(x, y) = x + y$, R: $x^2 + y^2 \le 4$, $x \ge 0$, $y \ge 0$

30. $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)/2}$, R: $x^2 + y^2 \le 25$, $x \ge 0$

31. $f(x, y) = \arctan \dfrac{y}{x}$, R: $x^2 + y^2 \ge 1$, $x^2 + y^2 \le 4$, $0 \le y \le x$

32. $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$, R: $x^2 + y^2 \le 9$, $x \ge 0$, $y \ge 0$

Volumen **En los ejercicios 33 a 38, utilizar una integral doble en coordenadas polares para hallar el volumen del sólido limitado o acotado por las gráficas de las ecuaciones.**

33. $z = xy$, $x^2 + y^2 = 1$, primer octante

34. $z = x^2 + y^2 + 3$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$

35. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 25$

36. $z = \ln(x^2 + y^2)$, $z = 0$, $x^2 + y^2 \ge 1$, $x^2 + y^2 \le 4$

37. Interior al hemisferio $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ e interior al cilindro $x^2 + y^2 - 4x = 0$

38. Interior al hemisferio $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ y exterior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$

39. ***Volumen*** Hallar a tal que el volumen en el interior del hemisferio $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ y en el exterior del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ sea la mitad del volumen del hemisferio.

40. ***Volumen*** Utilizar una integral doble en coordenadas polares para hallar el volumen de una esfera de radio a.

41. ***Volumen*** Determinar el diámetro de un orificio cavado verticalmente a través del centro del sólido limitado o acotado por las gráficas de las ecuaciones $z = 25e^{-(x^2+y^2)/4}$, $z = 0$, y $x^2 + y^2 = 16$ si se elimina la décima parte del volumen del sólido.

CAS **42.** ***Diseño industrial*** Las superficies de una leva de doble lóbulo se representan por las desigualdades $\frac{1}{4} \leq r \leq \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta)$ y

$$\frac{-9}{4(x^2 + y^2 + 9)} \leq z \leq \frac{9}{4(x^2 + y^2 + 9)}$$

donde todas las medidas se dan en pulgadas.

a) Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la leva.

b) Utilizar un sistema algebraico por computadora y aproximar el perímetro de la curva polar

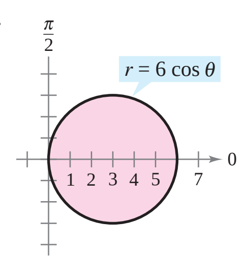
$$r = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta).$$

Ésta es la distancia que recorre una pieza en contacto con la leva durante un giro completo de ésta.

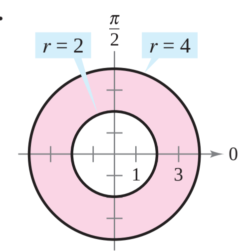
c) Utilizar un sistema algebraico por computadora y hallar el volumen del acero en la leva.

Área **En los ejercicios 43 a 48, utilizar una integral doble para calcular el área de la región sombreada.**

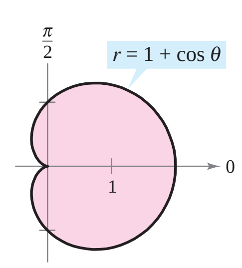
43.



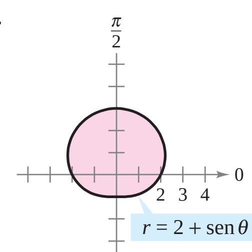
44.



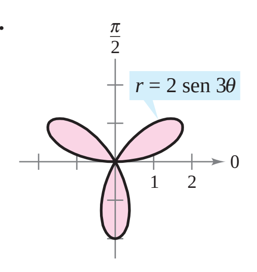
45.



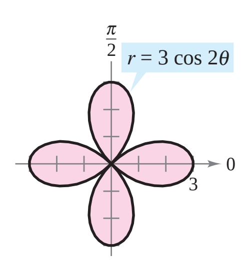
46.



47.



48.



Área **En los ejercicios 49 a 54, trazar una gráfica de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones. Después, usar una integral doble para encontrar el área de la región.**

49. Dentro del círculo $r = 2 \cos \theta$ y fuera del círculo $r = 1$.

50. Dentro de la cardioide $r = 2 + 2 \cos \theta$ y fuera del círculo $r = 1$.

51. Dentro del círculo $r = 3 \cos \theta$ y fuera de la cardioide $r = 1 + \cos \theta$.

52. Dentro de la cardioide $r = 1 + \cos \theta$ y fuera del círculo $r = 3 \cos \theta$.

53. Dentro de la curva rosa $r = 4 \operatorname{sen} 3\theta$ y fuera del círculo $r = 2$.

54. Dentro del círculo $r = 2$ y fuera de la cardioide $r = 2 - 2 \cos \theta$.

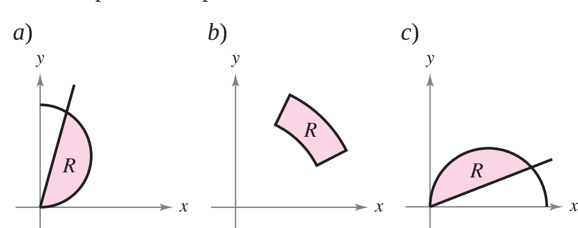
Desarrollo de conceptos

55. Describir la partición de la región de integración R en el plano xy cuando se utilizan coordenadas polares para evaluar una integral doble.

56. Explicar cómo pasar de coordenadas rectangulares a coordenadas polares en una integral doble.

57. Con sus propias palabras, describir regiones r-simples y regiones θ-simples.

58. Cada figura muestra una región de integración para la integral doble $\int_R\int f(x, y)\, dA$. Para cada región, decir si es más fácil obtener los límites de integración con elementos representativos horizontales, elementos representativos verticales o con sectores polares. Explicar el razonamiento.



59. Sea R la región limitada por el círculo $x^2 + y^2 = 9$.

a) Establecer la integral $\int_R\int f(x, y)\, dA$.

b) Convertir la integral en el inciso *a*) a coordenadas polares.

c) ¿Qué integral debería elegirse para evaluar? ¿Por qué?

Para discusión

60. ***Para pensar*** Sin desarrollar cálculos, identificar la integral doble que represente la integral de $f(x) = x^2 + y^2$ sobre un círculo de radio 4. Explicar el razonamiento.

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^4 r^2\, dr\, d\theta$ *b*) $\displaystyle\int_0^4\int_0^{2\pi} r^3\, dr\, d\theta$

c) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^4 r^3\, dr\, d\theta$ *d*) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_{-4}^4 r^3\, dr\, d\theta$

61. ***Para pensar*** Considerar el programa escrito en el ejercicio 78 de la sección 14.2 para aproximar integrales dobles en coordenadas rectangulares. Si el programa se usa para aproximar la integral doble

$$\int_R\int f(r, \theta)\, dA$$

en coordenadas polares, ¿cómo hay que modificar f para introducirla al programa? Como los límites de integración son constantes, describir la región plana de integración.

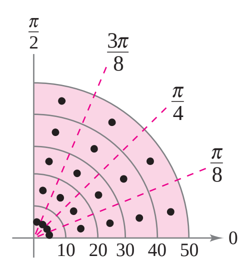
62. ***Aproximación*** Las secciones transversales horizontales de un bloque de hielo desprendido de un glaciar tienen forma de un cuarto de un círculo con radio aproximado de 50 pies. La base se divide en 20 subregiones como se muestra en la figura. En el centro de cada subregión, se mide la altura del hielo, dando los puntos siguientes en coordenadas cilíndricas.

$\left(5, \frac{\pi}{16}, 7\right), \left(15, \frac{\pi}{16}, 8\right), \left(25, \frac{\pi}{16}, 10\right), \left(35, \frac{\pi}{16}, 12\right), \left(45, \frac{\pi}{16}, 9\right),$
$\left(5, \frac{3\pi}{16}, 9\right), \left(15, \frac{3\pi}{16}, 10\right), \left(25, \frac{3\pi}{16}, 14\right), \left(35, \frac{3\pi}{16}, 15\right), \left(45, \frac{3\pi}{16}, 10\right),$
$\left(5, \frac{5\pi}{16}, 9\right), \left(15, \frac{5\pi}{16}, 11\right), \left(25, \frac{5\pi}{16}, 15\right), \left(35, \frac{5\pi}{16}, 18\right), \left(45, \frac{5\pi}{16}, 14\right),$
$\left(5, \frac{7\pi}{16}, 5\right), \left(15, \frac{7\pi}{16}, 8\right), \left(25, \frac{7\pi}{16}, 11\right), \left(35, \frac{7\pi}{16}, 16\right), \left(45, \frac{7\pi}{16}, 12\right)$

a) Aproximar el volumen del sólido.

b) El hielo pesa aproximadamente 57 libras por pie cúbico. Aproximar el peso del sólido.

c) Aproximar el número de galones de agua en el sólido si hay 7.48 galones de agua por pie cúbico.



CAS ***Aproximación*** **En los ejercicios 63 y 64, utilizar un sistema algebraico por computadora y aproximar la integral iterada.**

63. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^5 r\sqrt{1 + r^3}\,\text{sen}\,\sqrt{\theta}\, dr\, d\theta$

64. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_0^4 5re^{\sqrt{r\theta}}\, dr\, d\theta$

Aproximación **En los ejercicios 65 y 66, determinar qué valor se aproxima más al volumen del sólido entre el plano *xy* y la función sobre la región. (Realizar la elección a la vista de un dibujo del sólido y *no* efectuando cálculo alguno.)**

65. $f(x, y) = 15 - 2y$; R: semicírculo: $x^2 + y^2 = 16, y \geq 0$

a) 100 *b*) 200 *c*) 300 *d*) -200 *e*) 800

66. $f(x, y) = xy + 2$; R: cuarto de círculo: $x^2 + y^2 = 9, x \geq 0, y \geq 0$

a) 25 *b*) 8 *c*) 100 *d*) 50 *e*) -30

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 67 y 68, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.**

67. Si $\int_R\int f(r, \theta)\, dA > 0$, entonces $f(r, \theta) > 0$ para todo (r, θ) en R.

68. Si $f(r, \theta)$ es una función constante y el área de la región S es el doble del área de la región R, entonces $2\int_R\int f(r, \theta)\, dA = \int_S\int f(r, \theta)\, dA$.

69. ***Probabilidad*** El valor de la integral $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx$ se requiere en el desarrollo de la función de densidad de probabilidad normal.

a) Utilizar coordenadas polares para evaluar la integral impropia.

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\, dy\right)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2}\, dA$$

b) Utilizar el resultado del inciso *a*) para calcular I.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre este problema, ver el artículo "Integrating e^{-x^2} Without Polar Coordinates" de William Dunham en *Mathematics Teacher*.

70. Utilizar el resultado del ejercicio 69 y un cambio de variables para evaluar cada una de las integrales siguientes. No se requiere hacer ninguna integración.

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$ *b*) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4x^2}\, dx$

71. ***Población*** La densidad de población en una ciudad se aproxima mediante el modelo $f(x, y) = 4\,000e^{-0.01(x^2+y^2)}$, $x^2 + y^2 \leq 49$, donde x y y se miden en millas. Integrar la función de densidad sobre la región circular indicada para aproximar la población de la ciudad.

72. ***Probabilidad*** Hallar k tal que la función

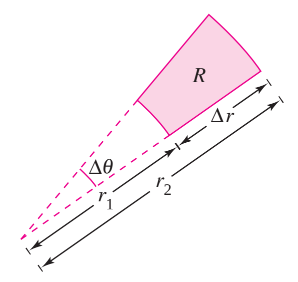
$$f(x, y) = \begin{cases} ke^{-(x^2+y^2)}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

sea una función de densidad de probabilidad.

73. ***Para pensar*** Considerar la región limitada o acotada por las gráficas de $y = 2$, $y = 4$, $y = x$ y $y = \sqrt{3}x$ y la integral doble $\int_R\int f\, dA$. Determinar los límites de integración si la región R está dividida en *a*) elementos representativos horizontales, *b*) elementos representativos verticales y *c*) sectores polares.

74. Repetir el ejercicio 73 con una región R limitada o acotada por la gráfica de la ecuación $(x - 2)^2 + y^2 = 4$.

75. Mostrar que el área A del sector polar R (ver la figura) es $A = r\Delta r\Delta\theta$, donde $r = (r_1 + r_2)/2$ es el radio promedio de R.



14.4 Centro de masa y momentos de inercia

- **Hallar la masa de una lámina plana utilizando una integral doble.**
- **Hallar el centro de masa de una lámina plana utilizando integrales dobles.**
- **Hallar los momentos de inercia utilizando integrales dobles.**

Masa

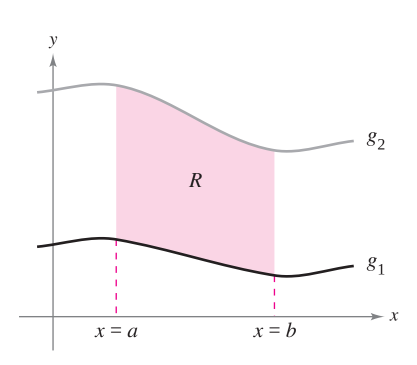


Lámina de densidad constante ρ
Figura 14.34

En la sección 7.6 se analizaron varias aplicaciones de la integración en las que se tenía una lámina plana de densidad *constante* ρ. Por ejemplo, si la lámina que corresponde a la región R, que se muestra en la figura 14.34, tiene una densidad constante ρ, entonces la masa de la lámina está dada por

$$\text{Masa} = \rho A = \rho \int_R\int dA = \int_R\int \rho\, dA. \qquad \text{Densidad constante.}$$

Si no se especifica otra cosa, se supone que una lámina tiene densidad constante. En esta sección, se extiende la definición del término *lámina* para abarcar también placas delgadas de densidad *variable*. Las integrales dobles pueden usarse para calcular la masa de una lámina de densidad variable, donde la densidad en (x, y) está dada por la **función de densidad ρ**.

DEFINICIÓN DE MASA DE UNA LÁMINA PLANA DE DENSIDAD VARIABLE

Si ρ es una función de densidad continua sobre la lámina que corresponde a una región plana R, entonces la masa m de la lámina está dada por

$$m = \int_R\int \rho(x, y)\, dA. \qquad \text{Densidad variable.}$$

NOTA La densidad se expresa normalmente como masa por unidad de volumen. Sin embargo, en una lámina plana la densidad es masa por unidad de área de superficie. ■

EJEMPLO 1 Hallar la masa de una lámina plana

Hallar la masa de la lámina triangular con vértices (0, 0), (0, 3) y (2, 3), dado que la densidad en (x, y) es $\rho(x, y) = 2x + y$.

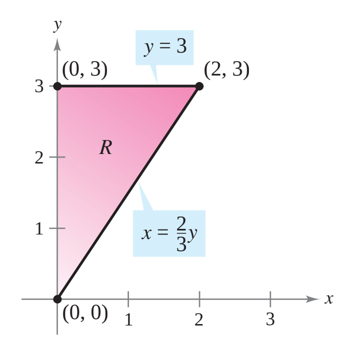


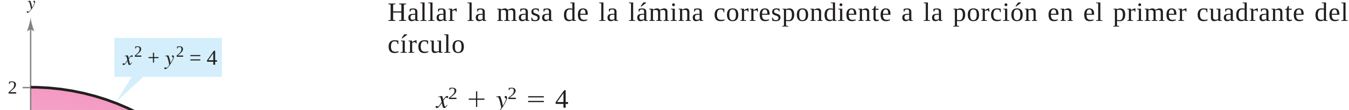
Lámina de densidad variable
$\rho(x, y) = 2x + y$
Figura 14.35

Solución Como se muestra en la figura 14.35, la región R tiene como fronteras $x = 0$, $y = 3$ y $y = 3x/2$ (o $x = 2y/3$). Por consiguiente, la masa de la lámina es

$$\begin{aligned} m = \int_R\int (2x + y)\, dA &= \int_0^3 \int_0^{2y/3} (2x + y)\, dx\, dy \\ &= \int_0^3 \Big[x^2 + xy \Big]_0^{2y/3} dy \\ &= \frac{10}{9}\int_0^3 y^2\, dy \\ &= \frac{10}{9}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^3 \\ &= 10. \end{aligned}$$

NOTA En la figura 14.35, nótese que la lámina plana está sombreada; el sombreado más oscuro corresponde a la parte más densa. ■

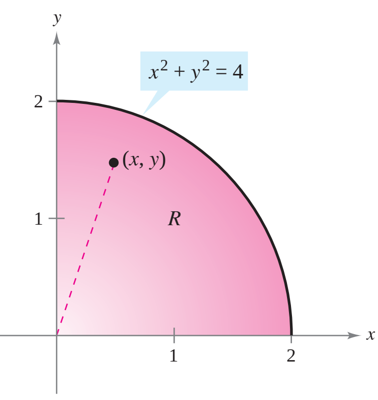
EJEMPLO 2 Hallar la masa empleando coordenadas polares



Hallar la masa de la lámina correspondiente a la porción en el primer cuadrante del círculo

$$x^2 + y^2 = 4$$

donde la densidad en el punto (x, y) es proporcional a la distancia entre el punto y el origen, como se muestra en la figura 14.36.



Densidad en (x, y): $\rho(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$
Figura 14.36

Solución En todo punto (x, y), la densidad de la lámina es

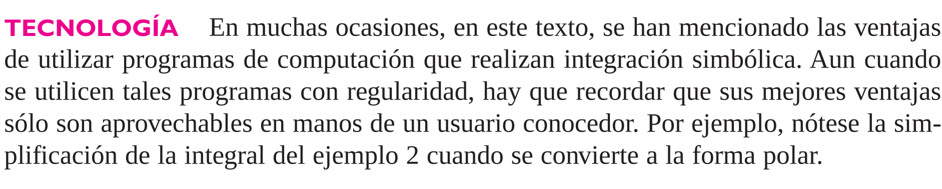
$$\begin{aligned}\rho(x, y) &= k\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}\\ &= k\sqrt{x^2 + y^2}.\end{aligned}$$

Como $0 \leq x \leq 2$ y $0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$, la masa está dada por

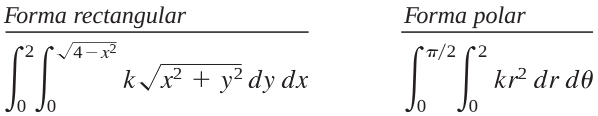
$$\begin{aligned}m &= \iint_R k\sqrt{x^2 + y^2}\, dA\\ &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} k\sqrt{x^2 + y^2}\, dy\, dx.\end{aligned}$$

Para simplificar la integración, se puede convertir a coordenadas polares, utilizando los límites o cotas $0 \leq \theta \leq \pi/2$ y $0 \leq r \leq 2$. Por tanto, la masa es

$$\begin{aligned}m = \iint_R k\sqrt{x^2 + y^2}\, dA &= \int_0^{\pi/2} \int_0^2 k\sqrt{r^2}\, r\, dr\, d\theta\\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^2 kr^2\, dr\, d\theta\\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{kr^3}{3}\Big]_0^2\, d\theta\\ &= \frac{8k}{3}\int_0^{\pi/2} d\theta\\ &= \frac{8k}{3}\Big[\theta\Big]_0^{\pi/2}\\ &= \frac{4\pi k}{3}.\end{aligned}$$

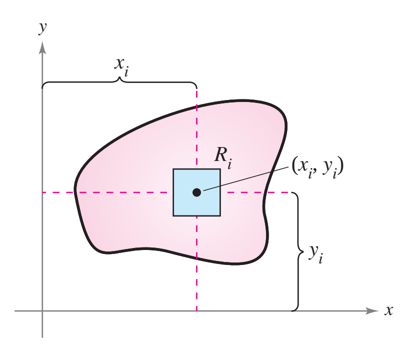


TECNOLOGÍA En muchas ocasiones, en este texto, se han mencionado las ventajas de utilizar programas de computación que realizan integración simbólica. Aun cuando se utilicen tales programas con regularidad, hay que recordar que sus mejores ventajas sólo son aprovechables en manos de un usuario conocedor. Por ejemplo, nótese la simplificación de la integral del ejemplo 2 cuando se convierte a la forma polar.



Forma rectangular	*Forma polar*
$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} k\sqrt{x^2 + y^2}\, dy\, dx$	$\int_0^{\pi/2} \int_0^2 kr^2\, dr\, d\theta$

Si se tiene acceso a programas que realicen integración simbólica, se recomienda utilizarlos para evaluar ambas integrales. Algunos programas no pueden manejar la primera integral, pero cualquier programa que calcule integrales dobles puede evaluar la segunda integral.



$M_x = (\text{masa})(y_i)$
$M_y = (\text{masa})(x_i)$
Figura 14.37

Momentos y centros de masa

En láminas de densidad variable, los momentos de masa se definen de manera similar a la empleada en el caso de densidad uniforme. Dada una partición Δ de una lámina, correspondiente a una región plana R, considerar el rectángulo i-ésimo R_i de área ΔA_i, como se muestra en la figura 14.37. Suponer que la masa de R_i se concentra en uno de sus puntos interiores (x_i, y_i). El momento de masa de R_i respecto al eje x puede aproximarse por medio de

$$(\text{Masa})(y_i) \approx [\rho(x_i, y_i)\,\Delta A_i](y_i).$$

De manera similar, el momento de masa con respecto al eje y puede aproximarse por medio de

$$(\text{Masa})(x_i) \approx [\rho(x_i, y_i)\,\Delta A_i](x_i).$$

Formando la suma de Riemann de todos estos productos y tomando límites cuando la norma de Δ se aproxima a 0, se obtienen las definiciones siguientes de momentos de masa con respecto a los ejes x y y.

MOMENTOS Y CENTRO DE MASA DE UNA LÁMINA PLANA DE DENSIDAD VARIABLE

Sea ρ una función de densidad continua sobre la lámina plana R. Los **momentos de masa** con respecto a los ejes x y y son

$$M_x = \int_R\int y\rho(x, y)\,dA \quad \text{y} \quad M_y = \int_R\int x\rho(x, y)\,dA.$$

Si m es la masa de la lámina, entonces el **centro de masa** es

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m}\right).$$

Si R representa una región plana simple en lugar de una lámina, el punto $(\bar{x}, \bar{y})$ se llama el **centroide** de la región.

En algunas láminas planas con densidad constante ρ, se puede determinar el centro de masa (o una de sus coordenadas) utilizando la simetría en lugar de usar integración. Por ejemplo, considerar las láminas de densidad constante mostradas en la figura 14.38. Utilizando la simetría, se puede ver que $\bar{y} = 0$ en la primera lámina y $\bar{x} = 0$ en la segunda lámina.

R: $0 \le x \le 1$
$-\sqrt{1 - x^2} \le y \le \sqrt{1 - x^2}$

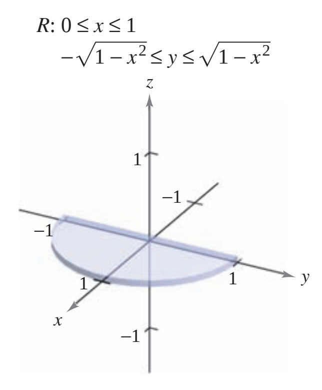


Lámina de densidad constante y simétrica con respecto al eje x

Figura 14.38

R: $-\sqrt{1 - y^2} \le x \le \sqrt{1 - y^2}$
$0 \le y \le 1$

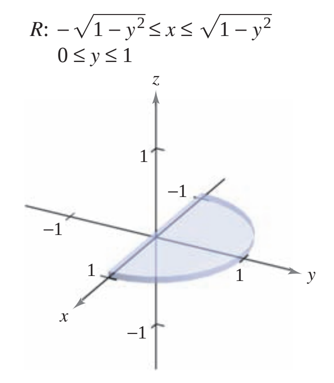
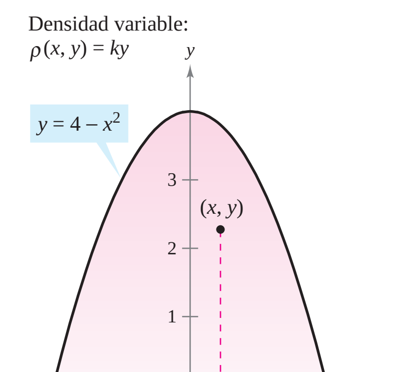


Lámina de densidad constante y simétrica con respecto al eje y

EJEMPLO 3 Hallar el centro de masa



Región parabólica de densidad variable
Figura 14.39

Hallar el centro de masa de la lámina que corresponde a la región parabólica

$$0 \leq y \leq 4 - x^2 \qquad \text{Región parabólica.}$$

donde la densidad en el punto (x, y) es proporcional a la distancia entre (x, y) y el eje x, como se muestra en la figura 14.39.

Solución Como la lámina es simétrica con respecto al eje y y

$$\rho(x, y) = ky$$

el centro de masa está en el eje y. Así, $\bar{x} = 0$. Para hallar $\bar{y}$, primero calcular la masa de la lámina.

$$\begin{aligned}
\text{Masa} = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2} ky\,dy\,dx &= \frac{k}{2}\int_{-2}^{2} y^2\Big]_0^{4-x^2} dx \\
&= \frac{k}{2}\int_{-2}^{2} (16 - 8x^2 + x^4)\,dx \\
&= \frac{k}{2}\left[16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{2} \\
&= k\left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5}\right) \\
&= \frac{256k}{15}
\end{aligned}$$

Después se halla el momento con respecto al eje x.

$$\begin{aligned}
M_x = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2} (y)(ky)\,dy\,dx &= \frac{k}{3}\int_{-2}^{2} y^3\Big]_0^{4-x^2} dx \\
&= \frac{k}{3}\int_{-2}^{2} (64 - 48x^2 + 12x^4 - x^6)\,dx \\
&= \frac{k}{3}\left[64x - 16x^3 + \frac{12x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\right]_{-2}^{2} \\
&= \frac{4\,096k}{105}
\end{aligned}$$

Así,

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{4\,096k/105}{256k/15} = \frac{16}{7}$$

y el centro de masa es $\left(0, \frac{16}{7}\right)$.

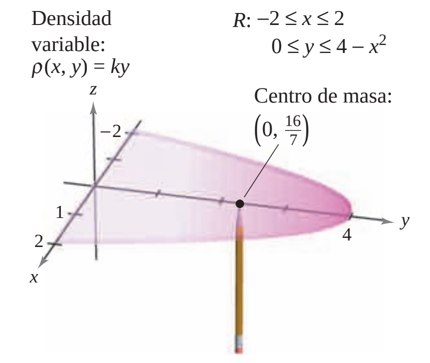


Figura 14.40

Aunque los momentos M_x y M_y se pueden interpretar como una medida de la tendencia a girar en torno a los ejes x o y, el cálculo de los momentos normalmente es un paso intermedio hacia una meta más tangible. El uso de los momentos M_x y M_y es encontrar el centro de masa. La determinación del centro de masa es útil en muchas aplicaciones, ya que permite tratar una lámina como si su masa se concentrara en un solo punto. Intuitivamente, se puede concebir el centro de masa como el punto de equilibrio de la lámina. Por ejemplo, la lámina del ejemplo 3 se mantendrá en equilibrio sobre la punta de un lápiz colocado en $\left(0, \frac{16}{7}\right)$, como se muestra en la figura 14.40.

Momentos de inercia

Los momentos M_x y M_y utilizados en la determinación del centro de masa de una lámina se suelen llamar **primeros momentos** con respecto a los ejes x y y. En cada uno de los casos, el momento es el producto de una masa por una distancia.

$$M_x = \int_R\int (y)\underbrace{\rho(x, y)\,dA} \qquad M_y = \int_R\int (x)\underbrace{\rho(x, y)\,dA}$$

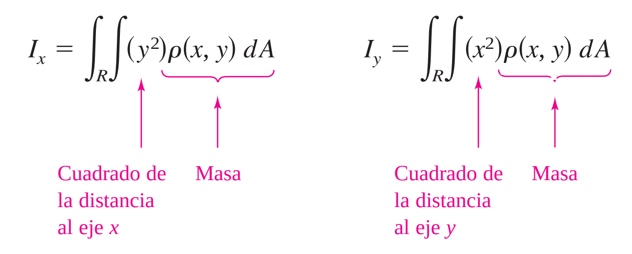
Distancia al eje x — Masa; Distancia al eje y — Masa

Ahora se introducirá otro tipo de momento, el **segundo momento** o **momento de inercia** de una lámina respecto de una recta. Del mismo modo que la masa es una medida de la tendencia de la materia a resistirse a cambios en el movimiento rectilíneo, el momento de inercia respecto de una recta es una *medida de la tendencia de la materia a resistirse a cambios en el movimiento de rotación*. Por ejemplo, si una partícula de masa m está a una distancia d de una recta fija, su momento de inercia respecto de la recta se define como

$$I = md^2 = (\text{masa})(\text{distancia})^2.$$

Igual que ocurre con los momentos de masa, se puede generalizar este concepto para obtener los momentos de inercia de una lámina de densidad variable respecto de los ejes x y y. Estos segundos momentos se denotan por I_x e I_y, y en cada caso el momento es el producto de una masa por el cuadrado de una distancia.

$$I_x = \int_R\int (y^2)\underbrace{\rho(x, y)\,dA} \qquad I_y = \int_R\int (x^2)\underbrace{\rho(x, y)\,dA}$$



A la suma de los momentos I_x e I_y se le llama el **momento polar de inercia** y se denota por I_0.

NOTA En el caso de una lámina en el plano xy, I_0 representa el momento de inercia de la lámina con respecto al eje z. El término "momento polar de inercia" se debe a que en el cálculo se utiliza el cuadrado de la distancia polar r.

$$I_0 = \int_R\int (x^2 + y^2)\rho(x, y)\,dA = \int_R\int r^2\rho(x, y)\,dA$$

EJEMPLO 4 Hallar el momento de inercia

Hallar el momento de inercia respecto del eje x de la lámina del ejemplo 3.

Solución De acuerdo con la definición de momento de inercia, se tiene

$$\begin{aligned}
I_x &= \int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2} y^2(ky)\,dy\,dx \\
&= \frac{k}{4}\int_{-2}^{2} y^4\Big]_0^{4-x^2} dx \\
&= \frac{k}{4}\int_{-2}^{2} (256 - 256x^2 + 96x^4 - 16x^6 + x^8)\,dx \\
&= \frac{k}{4}\left[256x - \frac{256x^3}{3} + \frac{96x^5}{5} - \frac{16x^7}{7} + \frac{x^9}{9}\right]_{-2}^{2} \\
&= \frac{32\,768k}{315}.
\end{aligned}$$

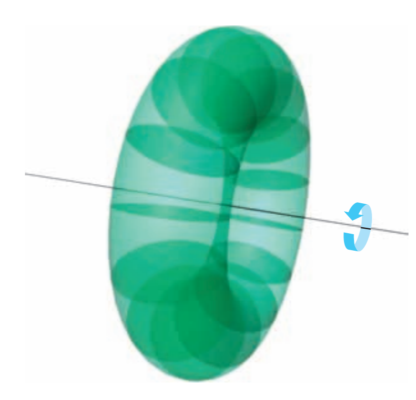


Lámina plana girando a ω radianes por segundo
Figura 14.41

El momento de inercia I de una lámina en rotación puede utilizarse para medir su energía cinética. Por ejemplo, consideremos una lámina plana que gira en torno a una recta con una **velocidad angular** de ω radianes por segundo, como se muestra en la figura 14.41. La energía cinética E de la lámina en rotación es

$$E = \frac{1}{2} I\omega^2. \quad \text{Energía cinética del movimiento giratorio.}$$

Por otro lado, la energía cinética E de una masa m que se mueve en línea recta a una velocidad v es

$$E = \frac{1}{2} mv^2. \quad \text{Energía cinética del movimiento rectilíneo.}$$

Por lo tanto, la energía cinética de una masa que se mueve en línea recta es proporcional a su masa, pero la energía cinética de una masa que gira en torno a un eje es proporcional a su momento de inercia.

El **radio de giro** $\bar{\bar{r}}$ de una masa en rotación m con momento de inercia I se define como

$$\bar{\bar{r}} = \sqrt{\frac{I}{m}}. \quad \text{Radio de giro.}$$

Si toda la masa se localizara a una distancia $\bar{\bar{r}}$ de su eje de giro o eje de rotación, tendría el mismo momento de inercia y, por consiguiente, la misma energía cinética. Por ejemplo, el radio de giro de la lámina del ejemplo 4 respecto al eje x está dado por

$$\bar{\bar{y}} = \sqrt{\frac{I_x}{m}} = \sqrt{\frac{32\,768k/315}{256k/15}} = \sqrt{\frac{128}{21}} \approx 2.469.$$

EJEMPLO 5 Cálculo del radio de giro

Hallar el radio de giro con respecto al eje y de la lámina que corresponde a la región R: $0 \le y \le \operatorname{sen} x$, $0 \le x \le \pi$, donde la densidad en (x, y) está dada por $\rho(x, y) = x$.

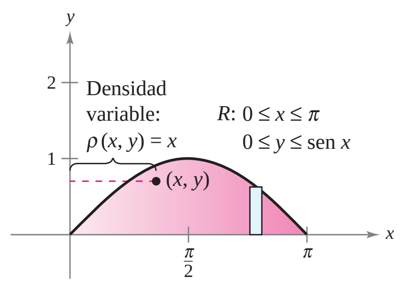


Figura 14.42

Solución La región R se muestra en la figura 14.42. Integrando $\rho(x, y) = x$ sobre la región R, se puede determinar que la masa de la región es π. El momento de inercia con respecto al eje y es

$$\begin{aligned} I_y &= \int_0^{\pi}\int_0^{\operatorname{sen} x} x^3\,dy\,dx \\ &= \int_0^{\pi} x^3 y \Big]_0^{\operatorname{sen} x} dx \\ &= \int_0^{\pi} x^3 \operatorname{sen} x\,dx \\ &= \Big[(3x^2 - 6)(\operatorname{sen} x) - (x^3 - 6x)(\cos x)\Big]_0^{\pi} \\ &= \pi^3 - 6\pi. \end{aligned}$$

Por tanto, el radio de giro con respecto al eje y es

$$\begin{aligned} \bar{\bar{x}} &= \sqrt{\frac{I_y}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{\pi^3 - 6\pi}{\pi}} \\ &= \sqrt{\pi^2 - 6} \approx 1.967. \end{aligned}$$

14.4 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, hallar la masa de la lámina descrita por las desigualdades, dado que su densidad es $\rho(x, y) = xy$. (*Sugerencia:* Algunas de las integrales son más simples en coordenadas polares.)

1. $0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2$
2. $0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 9 - x^2$
3. $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}$
4. $x \geq 0,\ 3 \leq y \leq 3 + \sqrt{9 - x^2}$

En los ejercicios 5 a 8, hallar la masa y el centro de masa de la lámina con cada densidad.

5. R: cuadrado con vértices $(0, 0), (a, 0), (0, a), (a, a)$
   a) $\rho = k$ *b)* $\rho = ky$ *c)* $\rho = kx$
6. R: rectángulo con vértices $(0, 0),\ (a, 0),\ (0, b),\ (a, b)$
   a) $\rho = kxy$ *b)* $\rho = k(x^2 + y^2)$
7. R: triángulo con vértices $(0, 0), (0, a), (a, a)$
   a) $\rho = k$ *b)* $\rho = ky$ *c)* $\rho = kx$
8. R: triángulo con vértices $(0, 0), (a/2, a), (a, 0)$
   a) $\rho = k$ *b)* $\rho = kxy$

9. ***Traslaciones en el plano*** Trasladar la lámina del ejercicio 5 cinco unidades a la derecha y determinar el centro de masa resultante.
10. ***Conjetura*** Utilizar el resultado del ejercicio 9 para formular una conjetura acerca del cambio en el centro de masa cuando una lámina de densidad constante se traslada c unidades horizontalmente o d unidades verticalmente. ¿Es la conjetura verdadera si la densidad no es constante? Explicar.

En los ejercicios 11 a 22, hallar la masa y el centro de masa de la lámina limitada o acotada por las gráficas de las ecuaciones con la densidad o densidades que se especifican. (*Sugerencia:* Algunas de las integrales son más sencillas en coordenadas polares.)

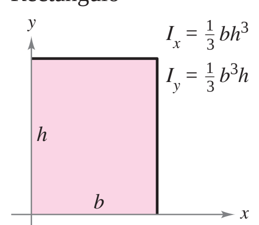
11. $y = \sqrt{x},\ y = 0,\ x = 1,\ \rho = ky$
12. $y = x^2,\ y = 0,\ x = 2,\ \rho = kxy$
13. $y = 4/x,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 4,\ \rho = kx^2$
14. $y = \dfrac{1}{1 + x^2},\ y = 0,\ x = -1,\ x = 1,\ \rho = k$
15. $y = e^x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$
    a) $\rho = k$ *b)* $\rho = ky$
16. $y = e^{-x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$
    a) $\rho = ky$ *b)* $\rho = ky^2$
17. $y = 4 - x^2,\ y = 0,\ \rho = ky$
18. $x = 9 - y^2,\ x = 0,\ \rho = kx$
19. $y = \operatorname{sen} \dfrac{\pi x}{L},\ y = 0,\ x = 0,\ x = L,\ \rho = k$
20. $y = \cos \dfrac{\pi x}{L},\ y = 0,\ x = 0,\ x = \dfrac{L}{2},\ \rho = ky$
21. $y = \sqrt{a^2 - x^2},\ 0 \leq y \leq x,\ \rho = k$
22. $x^2 + y^2 = a^2,\ 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ \rho = k(x^2 + y^2)$

CAS **En los ejercicios 23 a 26, utilizar un sistema algebraico por computadora para hallar la masa y el centro de masa de la lámina limitada o acotada por las gráficas de las ecuaciones con la densidad dada.**

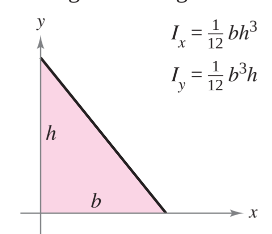
23. $y = e^{-x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 2,\ \rho = ky$
24. $y = \ln x,\ y = 0,\ x = 1,\ x = e,\ \rho = \frac{k}{x}$
25. $r = 2 \cos 3\theta,\ -\dfrac{\pi}{6} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{6},\ \rho = k$
26. $r = 1 + \cos \theta,\ \rho = k$

En los ejercicios 27 a 32, verificar los momentos de inercia dados y hallar $\bar{\bar{x}}$ y $\bar{\bar{y}}$. Suponer que la densidad de cada lámina es $\rho = 1$ gramos por centímetro cuadrado. (Estas regiones son formas de uso común empleadas en diseño.)

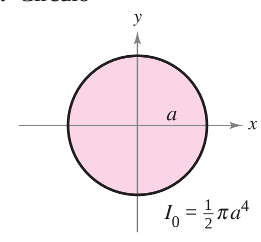
27. Rectángulo



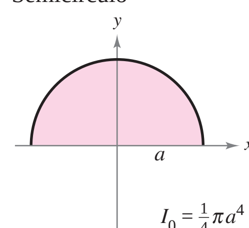
28. Triángulo rectángulo



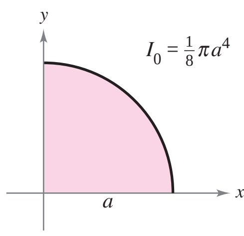
29. Círculo



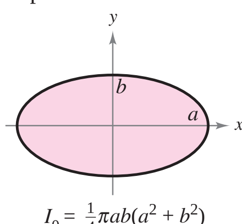
30. Semicírculo



31. Cuarto del círculo



32. Elipse



CAS **En los ejercicios 33 a 40, hallar I_x, I_y, I_0, $\bar{\bar{x}}$, y $\bar{\bar{y}}$ para la lámina limitada o acotada por las gráficas de las ecuaciones. Utilizar un sistema algebraico por computadora a fin de evaluar las integrales dobles.**

33. $y = 0,\ y = b,\ x = 0,\ x = a,\ \rho = ky$
34. $y = \sqrt{a^2 - x^2},\ y = 0,\ \rho = ky$
35. $y = 4 - x^2,\ y = 0,\ x > 0,\ \rho = kx$
36. $y = x,\ y = x^2,\ \rho = kxy$
37. $y = \sqrt{x},\ y = 0,\ x = 4,\ \rho = kxy$
38. $y = x^2,\ y^2 = x,\ \rho = x^2 + y^2$
39. $y = x^2,\ y^2 = x,\ \rho = kx$
40. $y = x^3,\ y = 4x,\ \rho = k|y|$

CAS **En los ejercicios 41 a 46, dar la integral doble requerida para hallar el momento de inercia I, con respecto a la recta dada, de la lámina limitada o acotada por las gráficas de las ecuaciones. Utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar la integral doble.**

41. $x^2 + y^2 = b^2,\ \rho = k$, recta: $x = a\ (a > b)$

42. $y = 0,\ y = 2,\ x = 0,\ x = 4,\ \rho = k$, recta: $x = 6$

43. $y = \sqrt{x},\ y = 0,\ x = 4,\ \rho = kx$, recta: $x = 6$

44. $y = \sqrt{a^2 - x^2},\ y = 0,\ \rho = ky$, recta: $y = a$

45. $y = \sqrt{a^2 - x^2},\ y = 0,\ x \geq 0,\ \rho = k(a - y)$, recta: $y = a$

46. $y = 4 - x^2,\ y = 0,\ \rho = k$, recta: $y = 2$

Desarrollo de conceptos

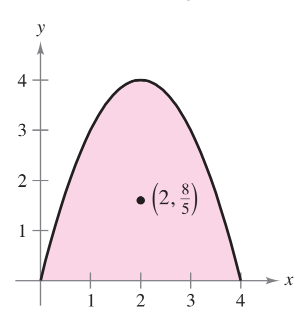
47. Dar las fórmulas para hallar los momentos y el centro de masa de una lámina plana de densidad variable.

48. Dar las fórmulas para hallar los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y de una lámina plana de densidad variable.

49. Con las propias palabras, describir qué mide el radio de giro.

Para discusión

50. El centro de masa de la lámina de densidad constante mostrado en la figura es $\left(2, \frac{8}{5}\right)$. Hacer una conjetura acerca de cómo cambiará el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ si la densidad $\rho(x, y)$ no es constante. Explicar. (Hacer la conjetura *sin* realizar cálculo alguno.)



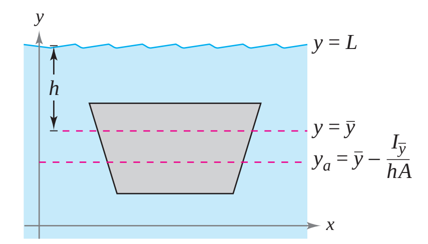
a) $\rho(x, y) = ky$ *b)* $\rho(x, y) = k|2 - x|$

c) $\rho(x, y) = kxy$ *d)* $\rho(x, y) = k(4 - x)(4 - y)$

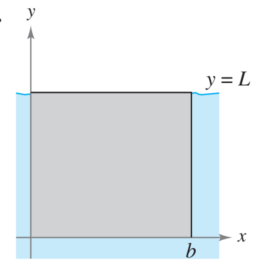
Hidráulica **En los ejercicios 51 a 54, determinar la posición del eje horizontal y_a en el que debe situarse una compuerta vertical en una presa para lograr que no haya momento que ocasione la rotación bajo la carga indicada (ver la figura). El modelo para y_a es**

$$y_a = \bar{y} - \frac{I_{\bar{y}}}{hA}$$

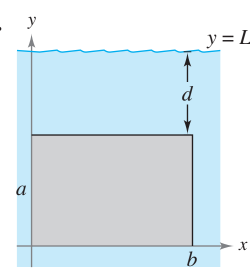
donde $\bar{y}$ es la coordenada y del centroide de la compuerta, $I_{\bar{y}}$ es el momento de inercia de la compuerta con respecto a la recta $y = \bar{y}$, h es la profundidad del centroide bajo la superficie y A es el área de la compuerta.



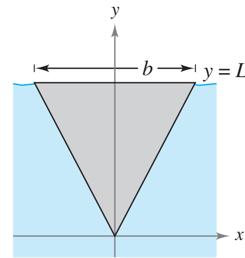
51.



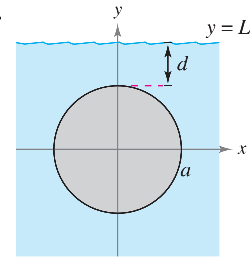
52.



53.



54.



55. Demostrar el teorema de Pappus siguiente: sea R una región plana y sea L una recta en el mismo plano tal que L no corta el interior de R. Si r es la distancia entre el centroide de R y la recta, entonces el volumen V del sólido de revolución generado por revolución de R en torno a la recta está dado por $V = 2\pi rA$, donde A es el área de R.

PROYECTO DE TRABAJO

Centro de presión sobre una vela

El centro de presión sobre una vela es aquel punto (x_p, y_p) en el cual puede suponerse que actúa la fuerza aerodinámica total. Si la vela se representa mediante una región plana R, el centro de presión es

$$x_p = \frac{\int_R\int xy\, dA}{\int_R\int y\, dA} \quad \text{y} \quad y_p = \frac{\int_R\int y^2\, dA}{\int_R\int y\, dA}.$$

Considerar una vela triangular con vértices en (0, 0), (2, 1) y (0, 5). Verificar los valores de cada integral.

a) $\displaystyle\int_R\int y\, dA = 10$ *b)* $\displaystyle\int_R\int xy\, dA = \frac{35}{6}$ *c)* $\displaystyle\int_R\int y^2\, dA = \frac{155}{6}$

Calcular las coordenadas (x_p, y_p) del centro de presión. Dibujar una gráfica de la vela e indicar la localización del centro de presión.

14.5 Área de una superficie

- **Utilizar una integral doble para hallar el área de una superficie.**

Área de una superficie

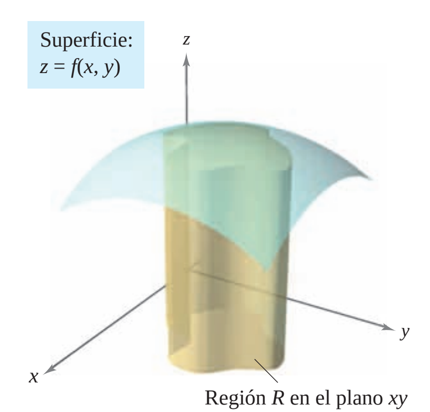


Figura 14.43

En este punto ya se tiene una gran cantidad de conocimientos acerca de la región sólida que se encuentra entre una superficie y una región R en el plano xy cerrada y limitada o acotada, como se muestra en la figura 14.43. Por ejemplo, se sabe cómo hallar los extremos de f en R (sección 13.8), el área de la base R del sólido (sección 14.1), el volumen del sólido (sección 14.2) y el centroide de la base de R (sección 14.4).

En esta sección se verá cómo hallar el **área de la superficie** superior del sólido. Más adelante se aprenderá a calcular el centroide del sólido (sección 14.6) y el área de la superficie lateral (sección 15.2).

Para empezar, considerar una superficie S dada por

$$z = f(x, y)$$ Superficie definida sobre una región R.

definida sobre una región R. Suponer que R es cerrada y acotada y que f tiene primeras derivadas parciales continuas. Para hallar el área de la superficie, se construye una partición interna de R que consiste en n rectángulos donde el área del rectángulo i-ésimo R_i es $\Delta A_i = \Delta x_i \Delta y_i$, como se muestra en la figura 14.44. En cada R_i sea (x_i, y_i) el punto más próximo al origen. En el punto $(x_i, y_i, z_i) = (x_i, y_i, f(x_i, y_i))$ de la superficie S, se construye un plano tangente T_i. El área de la porción del plano tangente que se encuentra directamente sobre R_i es aproximadamente igual al área de la superficie que se encuentra directamente sobre R_i. Es decir, $\Delta T_i \approx \Delta S_i$. Por tanto, el área de la superficie de S está dada por

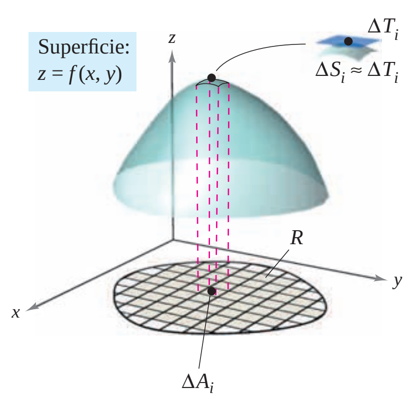


Figura 14.44

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta T_i.$$

Para hallar el área del paralelogramo ΔT_i, notar que sus lados están dados por los vectores

$$\mathbf{u} = \Delta x_i \mathbf{i} + f_x(x_i, y_i)\,\Delta x_i \mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{v} = \Delta y_i \mathbf{j} + f_y(x_i, y_i)\,\Delta y_i \mathbf{k}.$$

De acuerdo con el teorema 11.8, el área de ΔT_i está dada por $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$, donde

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta x_i & 0 & f_x(x_i, y_i)\,\Delta x_i \\ 0 & \Delta y_i & f_y(x_i, y_i)\,\Delta y_i \end{vmatrix} \\ &= -f_x(x_i, y_i)\,\Delta x_i \Delta y_i \mathbf{i} - f_y(x_i, y_i)\,\Delta x_i \Delta y_i \mathbf{j} + \Delta x_i \Delta y_i \mathbf{k} \\ &= (-f_x(x_i, y_i)\mathbf{i} - f_y(x_i, y_i)\mathbf{j} + \mathbf{k})\,\Delta A_i.\end{aligned}$$

Por tanto, el área de ΔT_i es $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \sqrt{[f_x(x_i, y_i)]^2 + [f_y(x_i, y_i)]^2 + 1}\,\Delta A_i$, y

$$\begin{aligned}\text{El área de la superficie de } &\approx \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \\ &\approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f_x(x_i, y_i)]^2 + [f_y(x_i, y_i)]^2}\,\Delta A_i.\end{aligned}$$

Esto sugiere la definición siguiente de área de una superficie.

DEFINICIÓN DEL ÁREA DE UNA SUPERFICIE

Si f y sus primeras derivadas parciales son continuas en la región cerrada R en el plano xy, entonces el **área de la superficie** S dada por $z = f(x, y)$ sobre R está dada por

$$\text{Área de la superficie} = \int_R\int dS$$
$$= \int_R\int \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\, dA.$$

Para memorizar la integral doble para el área de una superficie, es útil notar su semejanza con la integral de la longitud del arco.

Longitud sobre el eje x: $\displaystyle\int_a^b dx$

Longitud de arco en el plano xy: $\displaystyle\int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$

Área en el plano xy: $\displaystyle\int_R\int dA$

Área de una superficie en el espacio: $\displaystyle\int_R\int dS = \int_R\int \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\, dA$

Igual que las integrales para la longitud de arco, las integrales para el área de una superficie son a menudo muy difíciles de calcular. Sin embargo, en el ejemplo siguiente se muestra un tipo que se evalúa con facilidad.

EJEMPLO 1 El área de la superficie de una región plana

Hallar el área de la superficie de la porción del plano

$$z = 2 - x - y$$

que se encuentra sobre el círculo $x^2 + y^2 \leq 1$ en el primer cuadrante, como se muestra en la figura 14.45.

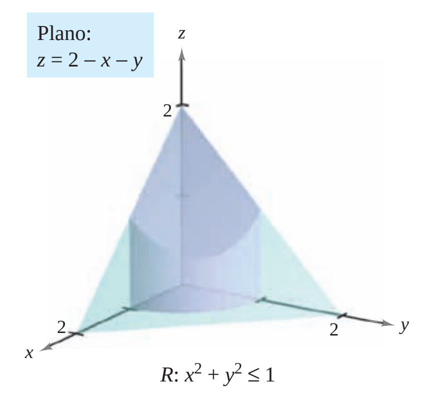


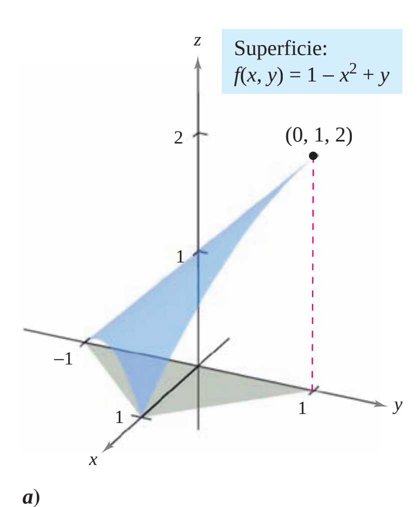
Figura 14.45

Solución Como $f_x(x, y) = -1$ y $f_y(x, y) = -1$, el área de la superficie está dada por

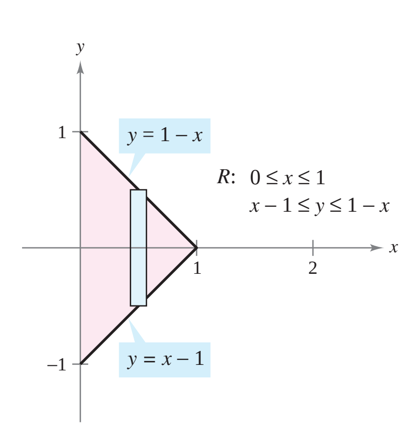
$$S = \int_R\int \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\, dA \qquad \text{Fórmula para el área de la superficie.}$$
$$= \int_R\int \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2}\, dA \qquad \text{Sustituir.}$$
$$= \int_R\int \sqrt{3}\, dA$$
$$= \sqrt{3}\int_R\int dA.$$

Observar que la última integral es simplemente $\sqrt{3}$ por el área de la región R. R es un cuarto del círculo de radio 1, cuya área es $\frac{1}{4}\pi(1^2)$ o $\pi/4$. Por tanto, el área de S es

$$S = \sqrt{3}\,(\text{área de } R)$$
$$= \sqrt{3}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3}\,\pi}{4}.$$



a)



b)

Figura 14.46

EJEMPLO 2 Hallar el área de una superficie

Hallar el área de la porción de la superficie

$$f(x, y) = 1 - x^2 + y$$

que se encuentra sobre la región triangular cuyos vértices son $(1, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$ y $(0, 1, 0)$, como se muestra en la figura 14.46*a*.

Solución Como $f_x(x, y) = -2x$ y $f_y(x, y) = 1$, se tiene

$$S = \int_R\int \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\, dA = \int_R\int \sqrt{1 + 4x^2 + 1}\, dA.$$

En la figura 14.46*b* se ve que los límites o cotas de R son $0 \le x \le 1$ y $x - 1 \le y \le 1 - x$. Por lo que la integral será

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^1 \int_{x-1}^{1-x} \sqrt{2 + 4x^2}\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 y\sqrt{2 + 4x^2}\Big]_{x-1}^{1-x} dx \\
&= \int_0^1 \left[(1 - x)\sqrt{2 + 4x^2} - (x - 1)\sqrt{2 + 4x^2}\right] dx \\
&= \int_0^1 \left(2\sqrt{2 + 4x^2} - 2x\sqrt{2 + 4x^2}\right) dx \\
&= \left[x\sqrt{2 + 4x^2} + \ln\left(2x + \sqrt{2 + 4x^2}\right) - \frac{(2 + 4x^2)^{3/2}}{6}\right]_0^1 \\
&= \sqrt{6} + \ln\left(2 + \sqrt{6}\right) - \sqrt{6} - \ln\sqrt{2} + \frac{1}{3}\sqrt{2} \approx 1.618.
\end{aligned}$$

Tablas de integración (apéndice B). Fórmula 26 y regla de la potencia.

EJEMPLO 3 Cambio de variables a coordenadas polares

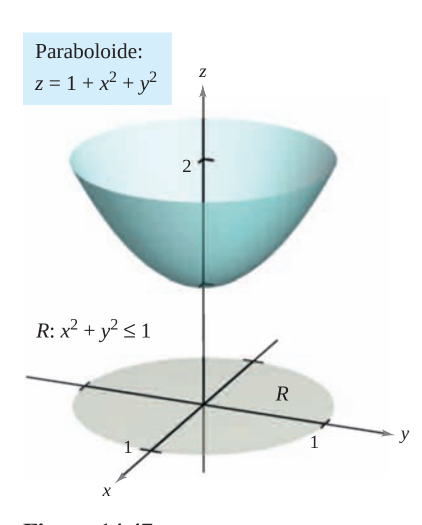


Figura 14.47

Hallar el área de la superficie del paraboloide $z = 1 + x^2 + y^2$ que se encuentra sobre el círculo unidad o unitario, como se muestra en la figura 14.47.

Solución Como $f_x(x, y) = 2x$ y $f_y(x, y) = 2y$, se tiene

$$S = \int_R\int \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\, dA = \int_R\int \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dA.$$

Se puede pasar a coordenadas polares haciendo $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$. Entonces, como la región R está acotada por $0 \le r \le 1$ y $0 \le \theta \le 2\pi$, se tiene

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{12}(1 + 4r^2)^{3/2}\Big]_0^1 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{5\sqrt{5} - 1}{12}\, d\theta \\
&= \frac{5\sqrt{5} - 1}{12}\,\theta\Big]_0^{2\pi} \\
&= \frac{\pi\left(5\sqrt{5} - 1\right)}{6} \\
&\approx 5.33.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Hallar el área de una superficie

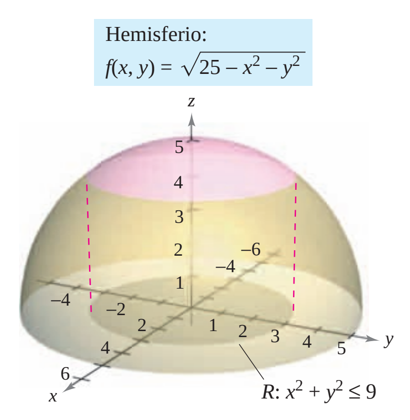


Figura 14.48

Hallar el área de la superficie S correspondiente a la porción del hemisferio

$$f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2} \qquad \text{Hemisferio.}$$

que se encuentra sobre la región R limitada o acotada por el círculo $x^2 + y^2 \le 9$, como se muestra en la figura 14.48.

Solución Las primeras derivadas parciales de f son

$$f_x(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}} \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$$

y, de acuerdo con la fórmula para el área de una superficie, se tiene

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\, dA \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}\right)^2}\, dA \\ &= \frac{5}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}\, dA. \end{aligned}$$

Así, el área de la superficie es

$$S = \iint_R \frac{5}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}\, dA.$$

Se puede pasar a coordenadas polares haciendo $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$. Entonces, como la región R está acotada por $0 \le r \le 3$ y $0 \le \theta \le 2\pi$, se obtiene

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi}\int_0^3 \frac{5}{\sqrt{25 - r^2}}\, r\, dr\, d\theta \\ &= 5\int_0^{2\pi} -\sqrt{25 - r^2}\Big]_0^3\, d\theta \\ &= 5\int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 10\pi. \end{aligned}$$

El procedimiento utilizado en el ejemplo 4 puede extenderse para hallar el área de la superficie de una esfera utilizando la región R limitada o acotada por el círculo $x^2 + y^2 \le a^2$, donde $0 < a < 5$, como se muestra en la figura 14.49. Se puede mostrar que el área de la superficie de la porción del hemisferio

$$f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

que se encuentra sobre la región circular es

$$\begin{aligned} S &= \iint_R \frac{5}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}\, dA \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{5}{\sqrt{25 - r^2}}\, r\, dr\, d\theta \\ &= 10\pi\left(5 - \sqrt{25 - a^2}\right). \end{aligned}$$

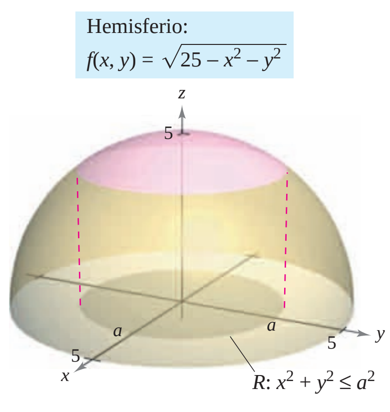


Figura 14.49

Tomando el límite cuando a tiende a 5 y multiplicando el resultado por dos, se obtiene el área total, que es 100π. (El área de la superficie de una esfera de radio r es $S = 4\pi r^2$.)

La regla de Simpson o la regla del trapecio pueden usarse para aproximar el valor de una integral doble, *siempre* que se pueda obtener la primera integral. Esto se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 5 Aproximación del área de una superficie mediante la regla de Simpson

Paraboloide:
$f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$

R: $-1 \leq x \leq 1$
$-1 \leq y \leq 1$

Figura 14.50

Hallar el área de la superficie del paraboloide

$$f(x, y) = 2 - x^2 - y^2 \qquad \text{Paraboloide.}$$

que se encuentra sobre la región cuadrada acotada por $-1 \leq x \leq 1$ y $-1 \leq y \leq 1$, como se muestra en la figura 14.50.

Solución Utilizando las derivadas parciales

$$f_x(x, y) = -2x \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = -2y$$

se tiene que el área de la superficie es

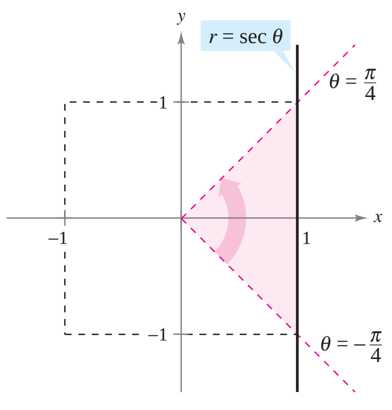
$$\begin{aligned} S &= \int\!\!\int_R \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\, dA \\ &= \int\!\!\int_R \sqrt{1 + (-2x)^2 + (-2y)^2}\, dA \\ &= \int\!\!\int_R \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dA. \end{aligned}$$

En coordenadas polares, la recta $x = 1$ está dada por $r \cos \theta = 1$ o $r = \sec \theta$, y en la figura 14.51 se puede determinar que un cuarto de la región R está limitada o acotada por

$$0 \leq r \leq \sec \theta \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}.$$

Haciendo $x = r \cos \theta$ y $y = r \operatorname{sen} \theta$ se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} S &= \frac{1}{4} \int\!\!\int_R \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dA \\ &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\sec \theta} \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr\, d\theta \\ &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{12}(1 + 4r^2)^{3/2} \Big]_0^{\sec \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{12} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[(1 + 4 \sec^2 \theta)^{3/2} - 1\right] d\theta. \end{aligned}$$



Un cuarto de la región R está acotada por $0 \leq r \leq \sec \theta$ y $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$.

Figura 14.51

Por último, usando la regla de Simpson con $n = 10$, se aproxima esta integral simple

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{3} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[(1 + 4 \sec^2 \theta)^{3/2} - 1\right] d\theta \\ &\approx 7.450. \end{aligned}$$

TECNOLOGÍA La mayor parte de los programas de computación que realizan integración simbólica con integrales múltiples también realizan técnicas de aproximación numéricas. Si se dispone de uno de estos programas, se recomienda usarlo para aproximar el valor de la integral del ejemplo 5.

14.5 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 14, hallar el área de la superficie dada por $z = f(x, y)$ sobre la región R. (*Sugerencia:* Algunas de las integrales son más sencillas en coordenadas polares.)

1. $f(x, y) = 2x + 2y$
   R: triángulo cuyos vértices son (0, 0), (4, 0), (0, 4)
2. $f(x, y) = 15 + 2x - 3y$
   R: cuadrado cuyos vértices son (0, 0), (3, 0), (0, 3), (3, 3)
3. $f(x, y) = 7 + 2x + 2y$
   $R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 4\}$
4. $f(x, y) = 12 + 2x - 3y$
   $R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 9\}$
5. $f(x, y) = 9 - x^2$
   R: cuadrado cuyos vértices son (0, 0), (2, 0), (0, 2), (2, 2)
6. $f(x, y) = y^2$
   R: cuadrado cuyos vértices son (0, 0), (3, 0), (0, 3), (3, 3)
7. $f(x, y) = 3 + x^{3/2}$
   R: rectángulo cuyos vértices son (0, 0), (0, 4), (3, 4), (3, 0)
8. $f(x, y) = 2 + \frac{2}{3}y^{3/2}$
   $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x\}$
9. $f(x, y) = \ln|\sec x|$
   $R = \left\{(x, y): 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq y \leq \tan x\right\}$
10. $f(x, y) = 13 + x^2 - y^2$
    $R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 4\}$
11. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $R = \{(x, y): 0 \leq f(x, y) \leq 1\}$
12. $f(x, y) = xy$, $R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 16\}$
13. $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$
    $R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq b^2, 0 < b < a\}$
14. $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$
    $R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq a^2\}$

En los ejercicios 15 a 18, hallar el área de la superficie.

15. Porción del plano $z = 24 - 3x - 2y$ en el primer octante
16. Porción del paraboloide $z = 16 - x^2 - y^2$ en el primer octante
17. Porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 9$
18. Porción del cono $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 4$

CAS **En los ejercicios 19 a 24, dar una integral doble que represente el área de la superficie $z = f(x, y)$ sobre la región R. Utilizando un sistema algebraico por computadora, evaluar la integral doble.**

19. $f(x, y) = 2y + x^2$
    R: triángulo cuyos vértices son (0, 0), (1, 0), (1, 1)
20. $f(x, y) = 2x + y^2$
    R: triángulo cuyos vértices son (0, 0), (2, 0), (2, 2)
21. $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$
    $R = \{(x, y): 0 \leq f(x, y)\}$
22. $f(x, y) = x^2 + y^2$
    $R = \{(x, y): 0 \leq f(x, y) \leq 16\}$
23. $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$
    $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$
24. $f(x, y) = \frac{2}{3}x^{3/2} + \cos x$
    $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

Aproximación **En los ejercicios 25 y 26, determinar qué valor se aproxima más al área de la superficie $z = f(x, y)$ sobre la región R. (Elegir el valor basándose en un dibujo de la superficie y *no* mediante la utilización de cálculos.)**

25. $f(x, y) = 10 - \frac{1}{2}y^2$
    R: cuadrado cuyos vértices son (0, 0), (4, 0), (4, 4), (0, 4)
    a) 16 *b)* 200 *c)* −100 *d)* 72 *e)* 36
26. $f(x, y) = \frac{1}{4}\sqrt{x^2 + y^2}$
    R: círculo limitado o acotado por $x^2 + y^2 = 9$
    a) −100 *b)* 150 *c)* 9π *d)* 55 *e)* 500

CAS **En los ejercicios 27 y 28, utilizar un sistema algebraico por computadora y aproximar la integral doble que represente el área de la superficie de la gráfica de f sobre la región $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.**

27. $f(x, y) = e^x$
28. $f(x, y) = \frac{2}{5}y^{5/2}$

En los ejercicios 29 a 34, formular una integral doble que proporcione el área de la superficie en la gráfica de f sobre la región R.

29. $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$
    R: cuadrado cuyos vértices son (1, 1), (−1, 1), (−1, −1), (1, −1)
30. $f(x, y) = x^2 - 3xy - y^2$
    $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$
31. $f(x, y) = e^{-x} \operatorname{sen} y$
    $R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 4\}$
32. $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$
    $R = \left\{(x, y): x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{2}\right\}$
33. $f(x, y) = e^{xy}$
    $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 10\}$
34. $f(x, y) = e^{-x} \operatorname{sen} y$
    $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$

Desarrollo de conceptos

35. Enunciar la definición, con integral doble, del área de una superficie S dada por $z = f(x, y)$ sobre una región R en el plano xy.
36. Considerar la superficie $f(x, y) = x^2 + y^2$ y el área de superficie de f sobre cada región R. Sin integrar, ordenar las áreas de superficie desde la menor hasta la mayor. Explicar el razonamiento.
    a) R: rectángulo con vértices (0, 0), (2, 0), (2, 2), (0, 2)
    b) R: triángulo con vértices (0, 0), (2, 0), (0, 2)
    c) $R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 4$ sólo el primer cuadrante$\}$
37. ¿Aumentará el área de superficie de la gráfica de una función $z = f(x, y)$ sobre una región R si la gráfica de f cambió k unidades verticalmente? ¿Por qué sí o por qué no?

Para discusión

38. Responder las siguientes preguntas acerca del área de superficie S sobre una superficie dada por una función positiva $z = f(x, y)$ sobre una región R en el plano xy. Explicar cada respuesta.

a) ¿Es posible para S igualar el área de R?

b) ¿Puede S ser mayor que el área de R?

c) ¿Puede S ser menor que el área de R?

39. Hallar el área de la superficie del sólido intersección de los cilindros $x^2 + z^2 = 1$ y $y^2 + z^2 = 1$ (ver la figura).

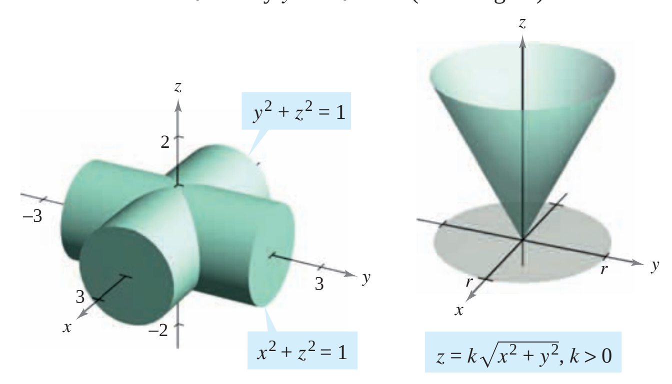
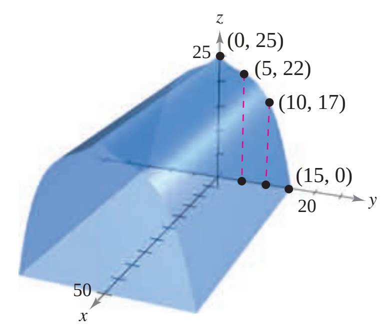


Figura para 39 **Figura para 40**

40. Mostrar que el área de la superficie del cono $z = k\sqrt{x^2 + y^2}$, $k > 0$ sobre la región circular $x^2 + y^2 \leq r^2$ en el plano xy es $\pi r^2\sqrt{k^2 + 1}$ (ver la figura).

41. ***Diseño industrial*** Una empresa produce un objeto esférico de 25 centímetros de radio. Se hace una perforación de 4 centímetros de radio a través del centro del objeto. Calcular *a*) el volumen del objeto y *b*) el área de la superficie exterior del objeto.

42. ***Modelo matemático*** Un ranchero construye un granero de dimensiones 30 por 50 pies. En la figura se muestra la forma simétrica y la altura elegidas para el tejado.



a) Utilizar las funciones de regresión de una herramienta de graficación para hallar un modelo de la forma $z = ay^3 + by^2 + cy + d$ para el perfil del techo.

b) Utilizar las funciones de integración numérica de una herramienta de graficación y el modelo del inciso *a*) para aproximar el volumen del espacio de almacenaje en el granero.

c) Utilizar las funciones de integración numérica de una herramienta de graficación y el modelo del inciso *a*) para aproximar el área de la superficie del techo.

d) Aproximar la longitud de arco de la recta del techo y calcular el área de la superficie del techo multiplicando la longitud de arco por la longitud del granero. Comparar los resultados y las integraciones con los encontrados en el inciso *c*).

PROYECTO DE TRABAJO

Capilaridad

Una propiedad muy conocida de los líquidos se llama “capilaridad”, y consiste en que ascienden por conductos verticales muy estrechos. La figura muestra dos placas que forman una cuña estrecha dentro de un recipiente con líquido. La superficie superior del líquido toma una forma hiperbólica dada por

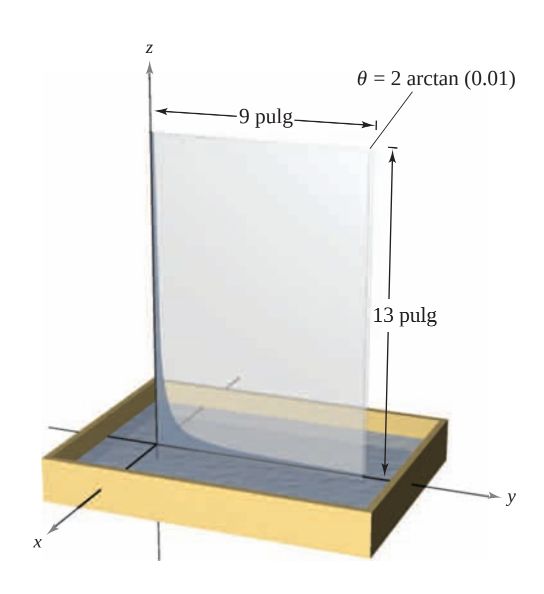
$$z = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

donde x, y y z están medidas en pulgadas. La constante k depende del ángulo de la cuña, del tipo de líquido y del material de las placas.

a) Hallar el volumen del líquido que ha ascendido por la cuña. (Tomar $k = 1$.)

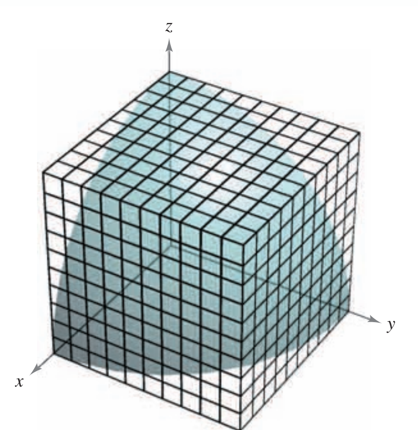
b) Hallar el área de la superficie horizontal del líquido que ha ascendido por la cuña.

Adaptación de un problema sobre capilaridad de “Capillary Phenomena” de Thomas B. Greenslade, Jr., *Physics Teacher*, mayo de 1992. Con autorización del autor.

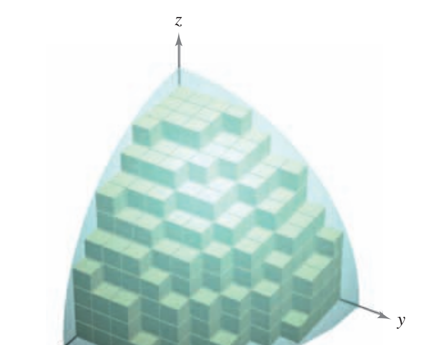


14.6 Integrales triples y aplicaciones

- **Utilizar una integral triple para calcular el volumen de una región sólida.**
- **Hallar el centro de masa y los momentos de inercia de una región sólida.**



Región sólida Q



Volumen de $Q \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$

Figura 14.52

Integrales triples

El procedimiento utilizado para definir una **integral triple** es análogo al utilizarlo para integrales dobles. Considerar una función f en tres variables que es continua sobre una región sólida acotada Q. Entonces, se encierra Q en una red de cubos y se forma una **partición interna** que consta de todos los cubos que quedan completamente dentro de Q, como se muestra en la figura 14.52. El volumen del i-ésimo cubo es

$$\Delta V_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i. \qquad \text{Volumen del } i\text{-ésimo cubo.}$$

La **norma** $\|\Delta\|$ de la partición es la longitud de la diagonal más larga en los n cubos de la partición. En cada cubo se elige un punto (x_i, y_i, z_i) y se forma la suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta V_i.$$

Tomando el límite cuando $\|\Delta\| \to 0$ se llega a la siguiente definición.

DEFINICIÓN DE INTEGRAL TRIPLE

Si f es continua sobre una región sólida acotada Q, entonces la **integral triple de f sobre Q** se define como

$$\iiint_Q f(x, y, z)\, dV = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta V_i$$

siempre que el límite exista. El **volumen** de la región sólida Q está dado por

$$\text{Volumen de } Q = \iiint_Q dV.$$

Algunas de las propiedades de las integrales dobles expuestas en el teorema 14.1 pueden replantearse en términos de integrales triples.

1. $\displaystyle \iiint_Q cf(x, y, z)\, dV = c \iiint_Q f(x, y, z)\, dV$

2. $\displaystyle \iiint_Q [f(x, y, z) \pm g(x, y, z)]\, dV = \iiint_Q f(x, y, z)\, dV \pm \iiint_Q g(x, y, z)\, dV$

3. $\displaystyle \iiint_Q f(x, y, z)\, dV = \iiint_{Q_1} f(x, y, z)\, dV + \iiint_{Q_2} f(x, y, z)\, dV$

En las propiedades dadas arriba, Q es la unión de dos subregiones sólidas que no se sobreponen Q_1 y Q_2. Si la región sólida Q es simple, la integral triple $\iiint f(x, y, z)\, dV$ puede evaluarse con una integral iterada utilizando alguno de los seis posibles órdenes de integración:

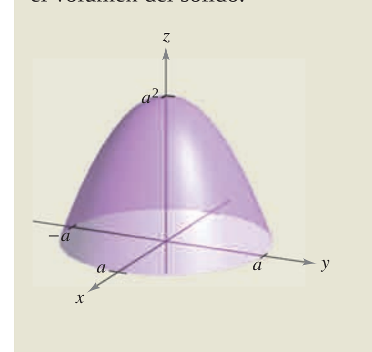
$$dx\,dy\,dz \quad dy\,dx\,dz \quad dz\,dx\,dy \quad dx\,dz\,dy \quad dy\,dz\,dx \quad dz\,dy\,dx.$$

EXPLORACIÓN

Volumen de un sector paraboloide En las páginas 997 y 1006, se pidió resumir las diferentes formas estudiadas hasta ahora para hallar el volumen del sólido limitado o acotado por el paraboloide

$$z = a^2 - x^2 - y^2, \quad a > 0$$

y el plano xy. Ahora se conoce un método más. Utilizarse para hallar el volumen del sólido.



La versión siguiente del teorema de Fubini describe una región que es considerada simple con respecto al orden $dz\,dy\,dx$. Para los otros cinco órdenes pueden formularse descripciones similares.

TEOREMA 14.4 EVALUACIÓN MEDIANTE INTEGRALES ITERADAS

Sea f continua en una región sólida definida por Q

$$a \le x \le b, \quad h_1(x) \le y \le h_2(x), \quad g_1(x, y) \le z \le g_2(x, y)$$

donde h_1, h_2, g_1 y g_2 son funciones continuas. Entonces,

$$\iiint_Q f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx.$$

Para evaluar una integral iterada triple en el orden $dz\,dy\,dx$, se mantienen x y y constantes para la integración más interior. Después, se mantiene x constante para la segunda integración.

EJEMPLO 1 Evaluar una integral iterada triple

Evaluar la integral iterada triple

$$\int_0^2 \int_0^x \int_0^{x+y} e^x(y + 2z)\, dz\, dy\, dx.$$

Solución Para la primera integración, se mantienen x y y constantes y se integra con respecto a z.

$$\begin{aligned}\int_0^2 \int_0^x \int_0^{x+y} e^x(y + 2z)\, dz\, dy\, dx &= \int_0^2 \int_0^x e^x(yz + z^2)\Big]_0^{x+y} dy\, dx \\ &= \int_0^2 \int_0^x e^x(x^2 + 3xy + 2y^2)\, dy\, dx\end{aligned}$$

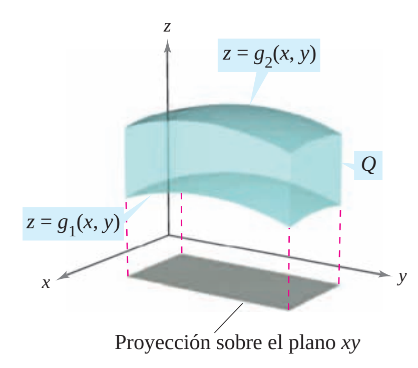
Para la segunda integración, mantener x constante y se integra con respecto a y.

$$\begin{aligned}\int_0^2 \int_0^x e^x(x^2 + 3xy + 2y^2)\, dy\, dx &= \int_0^2 \left[e^x\left(x^2y + \frac{3xy^2}{2} + \frac{2y^3}{3}\right)\right]_0^x dx \\ &= \frac{19}{6}\int_0^2 x^3e^x\, dx\end{aligned}$$

Por último, se integra con respecto a x.

$$\begin{aligned}\frac{19}{6}\int_0^2 x^3e^x\, dx &= \frac{19}{6}\Big[e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)\Big]_0^2 \\ &= 19\left(\frac{e^2}{3} + 1\right) \\ &\approx 65.797\end{aligned}$$

El ejemplo 1 muestra el orden de integración $dz\,dy\,dx$. Con otros órdenes, se puede seguir un procedimiento similar. Por ejemplo, para evaluar una integral iterada triple en el orden $dx\,dy\,dz$, se mantienen y y z constantes para la integración más interior y se integra con respecto a x. Después, para la segunda integración, se mantiene z constante y se integra con respecto a y. Por último, para la tercera integración, se integra con respecto a z.



La región sólida Q se encuentra entre dos superficies
Figura 14.53

Para hallar los límites dado un orden determinado de integración, por lo general se aconseja determinar primero los límites más interiores, que pueden ser funciones de las dos variables exteriores. Después, proyectando el sólido Q sobre el plano coordenado de las dos variables exteriores, se pueden determinar sus límites de integración mediante los métodos usados para las integrales dobles. Por ejemplo, para evaluar

$$\iiint_Q f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

primero se determinan los límites de z, y entonces la integral toma la forma

$$\iint \left[\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz \right] dy\, dx.$$

Proyectando el sólido Q sobre el plano xy, se pueden determinar los límites de x y de y de la misma manera que se hizo en el caso de las integrales dobles, como se muestra en la figura 14.53.

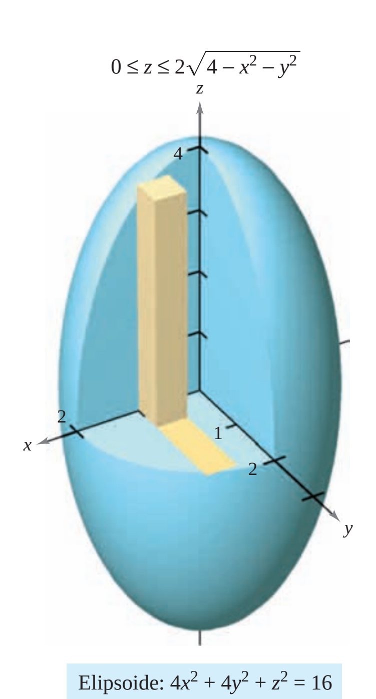


Figura 14.54

EJEMPLO 2 Integral triple para hallar un volumen

Hallar el volumen del elipsoide dado por $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$.

Solución Como en la ecuación x, y y z juegan papeles similares, el orden de integración es probablemente irrelevante, y se puede elegir arbitrariamente $dz\, dy\, dx$. Además, se pueden simplificar los cálculos considerando sólo la porción del elipsoide que se encuentra en el primer octante, como se muestra en la figura 14.54. Para el orden $dz\, dy\, dx$, se determinan primero los límites o cotas de z.

$$0 \le z \le 2\sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

Los límites o cotas de x y y son, como se ve en la figura 14.55, x y y y $0 \le x \le 2$ y $0 \le y \le \sqrt{4 - x^2}$, por lo que el volumen del elipsoide es

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_Q dV \\
&= 8 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{2\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\, dy\, dx \\
&= 8 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} z \Big]_0^{2\sqrt{4-x^2-y^2}} dy\, dx \\
&= 16 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{(4 - x^2) - y^2}\, dy\, dx \\
&= 8 \int_0^2 \left[y\sqrt{4 - x^2 - y^2} + (4 - x^2)\operatorname{arcsen}\left(\frac{y}{\sqrt{4 - x^2}}\right)\right]_0^{\sqrt{4-x^2}} dx \\
&= 8 \int_0^2 [0 + (4 - x^2)\operatorname{arcsen}(1) - 0 - 0]\, dx \\
&= 8 \int_0^2 (4 - x^2)\left(\frac{\pi}{2}\right) dx \\
&= 4\pi \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 \\
&= \frac{64\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Tablas de integración (apéndice B), fórmula 37.

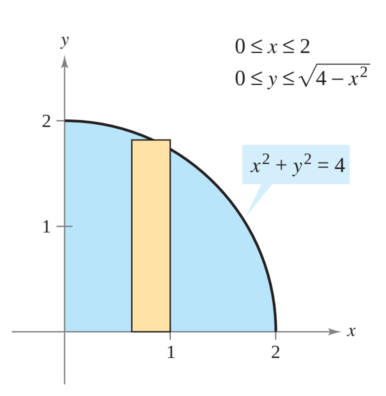


Figura 14.55

El ejemplo 2 es poco usual en el sentido de que con los seis posibles órdenes de integración se obtienen integrales de dificultad comparable. Tratar de emplear algún otro de los posibles órdenes de integración para hallar el volumen del elipsoide. Por ejemplo, con el orden $dx\,dy\,dz$ se obtiene la integral

$$V = 8\int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-z^2}/2} \int_0^{\sqrt{16-4y^2-z^2}/2} dx\,dy\,dz.$$

Si se resuelve esta integral, se obtiene el mismo volumen que en el ejemplo 2. Esto es siempre así; el orden de integración no afecta el valor de la integral. Sin embargo, el orden de integración a menudo afecta la complejidad de la integral. En el ejemplo 3, el orden de integración propuesto no es conveniente, por lo que se puede cambiar el orden para simplificar el problema.

EJEMPLO 3 Cambiar el orden de integración

Evaluar $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_x^{\sqrt{\pi/2}} \int_1^3 \operatorname{sen}(y^2)\,dz\,dy\,dx.$

Solución Obsérvese que después de una integración en el orden dado, se encontraría la integral $2\int \operatorname{sen}(y^2)\,dy$, que no es una función elemental. Para evitar este problema, se cambia el orden de integración a $dz\,dx\,dy$, de manera que y sea la variable exterior. Como se muestra en la figura 14.56, la región sólida Q está dada por

$$0 \le x \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad x \le y \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad 1 \le z \le 3$$

y la proyección de Q en el plano xy proporciona los límites

$$0 \le y \le \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{y} \quad 0 \le x \le y.$$

Por tanto, la evaluación de la integral triple usando el orden $dz\,dx\,dy$ produce

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_0^y \int_1^3 \operatorname{sen}(y^2)\,dz\,dx\,dy &= \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_0^y z\operatorname{sen}(y^2)\Big]_1^3 dx\,dy \\
&= 2\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_0^y \operatorname{sen}(y^2)\,dx\,dy \\
&= 2\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\operatorname{sen}(y^2)\Big]_0^y dy \\
&= 2\int_0^{\sqrt{\pi/2}} y\operatorname{sen}(y^2)\,dy \\
&= -\cos(y^2)\Big]_0^{\sqrt{\pi/2}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

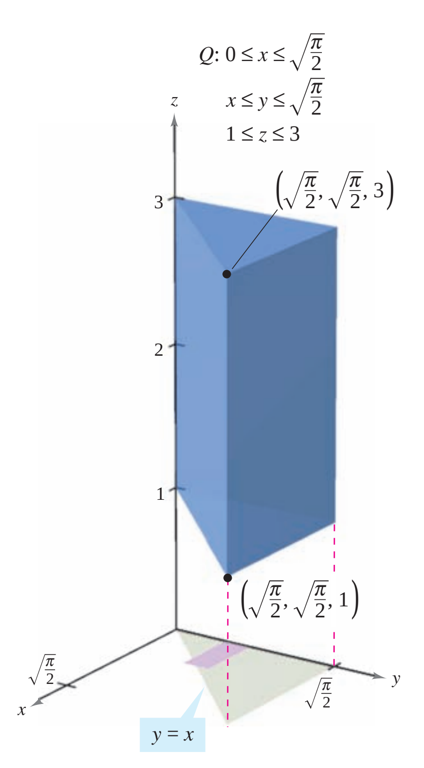
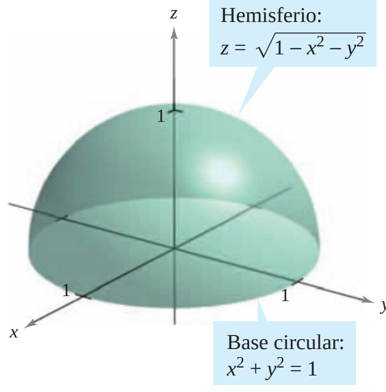


Figura 14.56

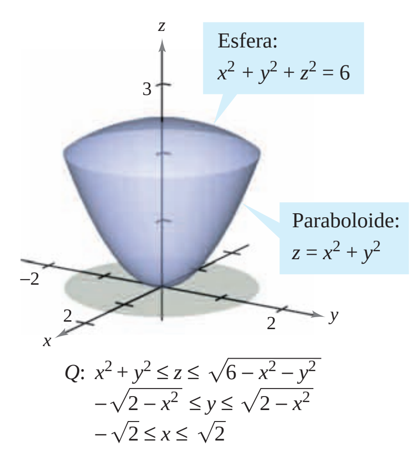
Q: $0 \le z \le 1 - y^2$
$1 - y \le x \le 3 - y$
$0 \le y \le 1$

Figura 14.57



Q: $0 \le z \le \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
$-\sqrt{1 - y^2} \le x \le \sqrt{1 - y^2}$
$-1 \le y \le 1$

Figura 14.58



Q: $x^2 + y^2 \le z \le \sqrt{6 - x^2 - y^2}$
$-\sqrt{2 - x^2} \le y \le \sqrt{2 - x^2}$
$-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$

Figura 14.59

EJEMPLO 4 Determinación de los límites de integración

Dar una integral triple para el volumen de cada una de las regiones sólidas.

a) La región en el primer octante acotada superiormente por el cilindro $z = 1 - y^2$ y comprendida entre los planos verticales $x + y = 1$ y $x + y = 3$

b) El hemisferio superior dado por $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

c) La región acotada inferiormente por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6$

Solución

a) En la figura 14.57, obsérvese que el sólido está acotado inferiormente por el plano xy $(z = 0)$ y superiormente por el cilindro $z = 1 - y^2$. Por tanto,

$$0 \le z \le 1 - y^2. \qquad \text{Límites o cotas para } z.$$

Proyectando la región sobre el plano xy se obtiene un paralelogramo. Como dos de los lados del paralelogramo son paralelos al eje x, se tienen las cotas siguientes:

$$1 - y \le x \le 3 - y \quad \text{y} \quad 0 \le y \le 1.$$

Por tanto, el volumen de la región está dado por

$$V = \iiint_Q dV = \int_0^1 \int_{1-y}^{3-y} \int_0^{1-y^2} dz\, dx\, dy.$$

b) Para el hemisferio superior dado por $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, se tiene

$$0 \le z \le \sqrt{1 - x^2 - y^2}. \qquad \text{Cotas para } z.$$

En la figura 14.58, obsérvese que la proyección del hemisferio sobre el plano xy es el círculo dado por $x^2 + y^2 = 1$, y se puede usar el orden $dx\,dy$ o el orden $dy\,dx$. Eligiendo el primero se obtiene

$$-\sqrt{1 - y^2} \le x \le \sqrt{1 - y^2} \quad \text{y} \quad -1 \le y \le 1$$

lo cual implica que el volumen de la región está dado por

$$V = \iiint_Q dV = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz\, dx\, dy.$$

c) Para la región acotada inferiormente por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, se tiene

$$x^2 + y^2 \le z \le \sqrt{6 - x^2 - y^2}. \qquad \text{Cotas para } z.$$

La esfera y el paraboloide se cortan en $z = 2$. Además, en la figura 14.59 se puede ver que la proyección de la región sólida sobre el plano xy es el círculo dado por $x^2 + y^2 = 2$. Utilizando el orden $dy\,dx$ se obtiene

$$-\sqrt{2 - x^2} \le y \le \sqrt{2 - x^2} \quad \text{y} \quad -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$$

lo cual implica que el volumen de la región está dado por

$$V = \iiint_Q dV = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}} dz\, dy\, dx.$$

Centro de masa y momentos de inercia

EXPLORACIÓN

Dibujar el sólido (de densidad uniforme) limitado o acotado por $z = 0$ y

$$z = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$$

donde $x^2 + y^2 \leq 1$. A partir del dibujo, estimar las coordenadas del centro de masa del sólido. Ahora utilizar un sistema algebraico por computadora y verificar la estimación. ¿Qué se observa?

En el resto de esta sección se analizan dos aplicaciones importantes de las integrales triples a la ingeniería. Considérese una región sólida Q cuya densidad está dada por la **función de densidad** $\boldsymbol{\rho}$. El **centro de masa** de una región sólida Q de masa m está dado por $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, donde

$$m = \iiint_Q \rho(x, y, z)\, dV \qquad \text{Masa del sólido.}$$

$$M_{yz} = \iiint_Q x\rho(x, y, z)\, dV \qquad \text{Primer momento con respecto al plano } yz.$$

$$M_{xz} = \iiint_Q y\rho(x, y, z)\, dV \qquad \text{Primer momento con respecto al plano } xz.$$

$$M_{xy} = \iiint_Q z\rho(x, y, z)\, dV \qquad \text{Primer momento con respecto al plano } xy.$$

y

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}.$$

Las cantidades M_{yz}, M_{xz} y M_{xy} se conocen como los **primeros momentos** de la región Q con respecto a los planos yz, xz y xy, respectivamente.

Los primeros momentos de las regiones sólidas se toman con respecto a un plano, mientras que los segundos momentos de los sólidos se toman con respecto a una recta. Los **segundos momentos** (o **momentos de inercia**) con respecto a los ejes x, y y z son los siguientes.

NOTA En ingeniería y en física, el momento de inercia de una masa se usa para hallar el tiempo requerido para que una masa alcance una velocidad de rotación dada con respecto a un eje, como se muestra en la figura 14.60. Cuanto mayor es el momento de inercia, mayor es la fuerza que hay que aplicar a la masa para que alcance la velocidad deseada. ■

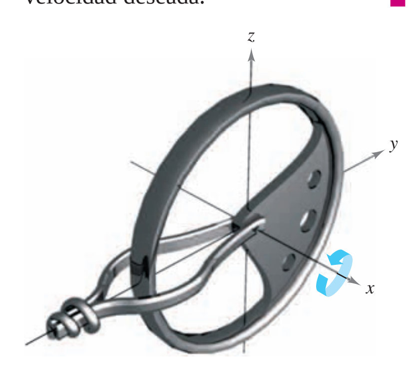


Figura 14.60

$$I_x = \iiint_Q (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV \qquad \text{Momento de inercia con respecto al eje } x.$$

$$I_y = \iiint_Q (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV \qquad \text{Momento de inercia con respecto al eje } y.$$

$$I_z = \iiint_Q (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, dV \qquad \text{Momento de inercia con respecto al eje } z.$$

En problemas que requieren el cálculo de los tres momentos, puede ahorrarse una cantidad considerable de trabajo empleando la propiedad aditiva de las integrales triples y escribiendo

$$I_x = I_{xz} + I_{xy}, \quad I_y = I_{yz} + I_{xy}, \quad \text{e} \quad I_z = I_{yz} + I_{xz}$$

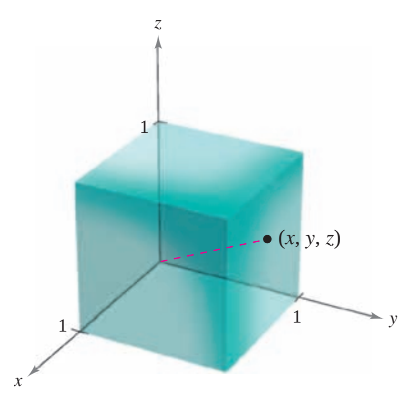
donde I_{xy}, I_{xz} e I_{yz} son

$$I_{xy} = \iiint_Q z^2\rho(x, y, z)\, dV$$

$$I_{xz} = \iiint_Q y^2\rho(x, y, z)\, dV$$

$$I_{yz} = \iiint_Q x^2\rho(x, y, z)\, dV$$

EJEMPLO 5 Hallar el centro de masa de una región sólida



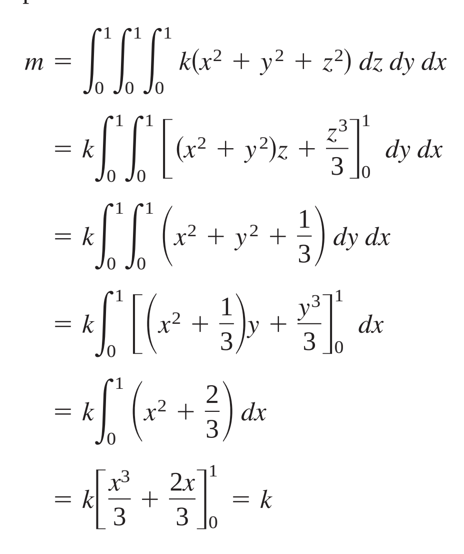
Densidad variable:
$\rho(x, y, z) = k(x^2 + y^2 + z^2)$
Figura 14.61

Hallar el centro de masa del cubo unidad mostrado en la figura 14.61, dado que la densidad en el punto (x, y, z) es proporcional al cuadrado de su distancia al origen.

Solución Como la densidad en (x, y, z) es proporcional al cuadrado de la distancia entre $(0, 0, 0)$ y (x, y, z), se tiene

$$\rho(x, y, z) = k(x^2 + y^2 + z^2).$$

Esta función de densidad se puede utilizar para hallar la masa del cubo. Debido a la simetría de la región, cualquier orden de integración producirá integrales de dificultad comparable.



$$\begin{aligned} m &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 k(x^2 + y^2 + z^2)\, dz\, dy\, dx \\ &= k\int_0^1\int_0^1 \left[(x^2 + y^2)z + \frac{z^3}{3}\right]_0^1 dy\, dx \\ &= k\int_0^1\int_0^1 \left(x^2 + y^2 + \frac{1}{3}\right) dy\, dx \\ &= k\int_0^1 \left[\left(x^2 + \frac{1}{3}\right)y + \frac{y^3}{3}\right]_0^1 dx \\ &= k\int_0^1 \left(x^2 + \frac{2}{3}\right) dx \\ &= k\left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x}{3}\right]_0^1 = k \end{aligned}$$

El primer momento con respecto al plano yz es

$$\begin{aligned} M_{yz} &= k\int_0^1\int_0^1\int_0^1 x(x^2 + y^2 + z^2)\, dz\, dy\, dx \\ &= k\int_0^1 x\left[\int_0^1\int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2)\, dz\, dy\right] dx. \end{aligned}$$

Nótese que x puede sacarse como factor fuera de las dos integrales interiores, ya que es constante con respecto a y y a z. Después de factorizar, las dos integrales interiores son iguales con respecto a la masa m. Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned} M_{yz} &= k\int_0^1 x\left(x^2 + \frac{2}{3}\right) dx \\ &= k\left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{3}\right]_0^1 \\ &= \frac{7k}{12}. \end{aligned}$$

Así,

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{7k/12}{k} = \frac{7}{12}.$$

Por último, por la naturaleza de ρ y la simetría de x, y y z en esta región sólida, se tiene $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$, y el centro de masa es $\left(\frac{7}{12}, \frac{7}{12}, \frac{7}{12}\right)$.

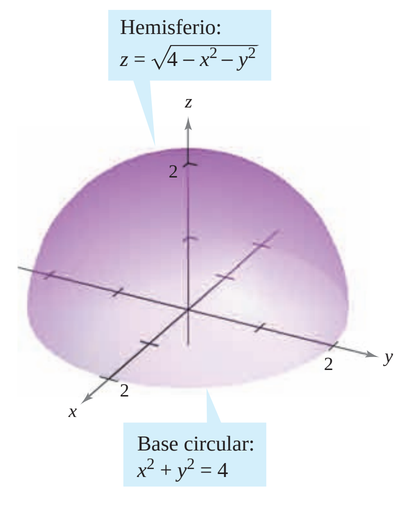
EJEMPLO 6 Momentos de inercia de una región sólida

Hallar los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y de la región sólida comprendida entre el hemisferio

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

y el plano xy, dado que la densidad en (x, y, z) es proporcional a la distancia entre (x, y, z) y el plano xy.

$0 \le z \le \sqrt{4 - x^2 - y^2}$
$-\sqrt{4 - x^2} \le y \le \sqrt{4 - x^2}$
$-2 \le x \le 2$



Densidad variable: $\rho(x, y, z) = kz$
Figura 14.62

Solución La densidad de la región está dada por $\rho(x, y, z) = kz$. Considerando la simetría de este problema, se sabe que $I_x = I_y$, y sólo se necesita calcular un momento, digamos I_x. De acuerdo con la figura 14.62, se elige el orden $dz\,dy\,dx$ y se escribe

$$\begin{aligned}
I_x &= \iiint_Q (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} (y^2 + z^2)(kz)\, dz\, dy\, dx \\
&= k\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left[\frac{y^2z^2}{2} + \frac{z^4}{4}\right]_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dy\, dx \\
&= k\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left[\frac{y^2(4 - x^2 - y^2)}{2} + \frac{(4 - x^2 - y^2)^2}{4}\right] dy\, dx \\
&= \frac{k}{4}\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} [(4 - x^2)^2 - y^4]\, dy\, dx \\
&= \frac{k}{4}\int_{-2}^{2} \left[(4 - x^2)^2 y - \frac{y^5}{5}\right]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx \\
&= \frac{k}{4}\int_{-2}^{2} \frac{8}{5}(4 - x^2)^{5/2}\, dx \\
&= \frac{4k}{5}\int_{0}^{2} (4 - x^2)^{5/2}\, dx && x = 2 \operatorname{sen} \theta. \\
&= \frac{4k}{5}\int_{0}^{\pi/2} 64 \cos^6 \theta\, d\theta \\
&= \left(\frac{256k}{5}\right)\left(\frac{5\pi}{32}\right) && \text{Fórmula de Wallis.} \\
&= 8k\pi.
\end{aligned}$$

Por tanto, $I_x = 8k\pi = I_y$.

En el ejemplo 6, los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y son iguales. Sin embargo, el momento con respecto al eje z es diferente. ¿Parece que el momento de inercia con respecto al eje z deba ser menor o mayor que los momentos calculados en el ejemplo 6? Realizando los cálculos, se determina que

$$I_z = \frac{16}{3}k\pi.$$

Esto indica que el sólido mostrado en la figura 14.62 presenta resistencia mayor a la rotación en torno a los ejes x o y que en torno al eje z.

14.6 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 8, evaluar la integral iterada.

1. $\int_0^3\int_0^2\int_0^1 (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$ **2.** $\int_{-1}^1\int_{-1}^1\int_{-1}^1 x^2y^2z^2\,dx\,dy\,dz$

3. $\int_0^1\int_0^x\int_0^{xy} x\,dz\,dy\,dx$ **4.** $\int_0^9\int_0^{y/3}\int_0^{\sqrt{y^2-9x^2}} z\,dz\,dx\,dy$

5. $\int_1^4\int_0^1\int_0^x 2ze^{-x^2}\,dy\,dx\,dz$ **6.** $\int_1^4\int_1^{e^2}\int_0^{1/xz} \ln z\,dy\,dz\,dx$

7. $\int_0^4\int_0^{\pi/2}\int_0^{1-x} x\cos y\,dz\,dy\,dx$ **8.** $\int_0^{\pi/2}\int_0^{y/2}\int_0^{1/y} \operatorname{sen} y\,dz\,dx\,dy$

CAS **En los ejercicios 9 y 10, utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar la integral iterada.**

9. $\int_0^3\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}}\int_0^{y^2} y\,dz\,dx\,dy$

10. $\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-x^2}}\int_{2x^2+y^2}^{4-y^2} y\,dz\,dy\,dx$

CAS **En los ejercicios 11 y 12, utilizar un sistema algebraico por computadora y aproximar la integral iterada.**

11. $\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_1^4 \frac{x^2\operatorname{sen} y}{z}\,dz\,dy\,dx$

12. $\int_0^3\int_0^{2-(2y/3)}\int_0^{6-2y-3z} ze^{-x^2y^2}\,dx\,dz\,dy$

En los ejercicios 13 a 18, dar una integral triple para el volumen del sólido.

13. El sólido en el primer octante acotado por los planos coordenados y el plano $z = 5 - x - y$

14. El sólido acotado por $z = 9 - x^2$, $z = 0$, $y = 0$ y $y = 2x$

15. El sólido acotado por el paraboloide $z = 6 - x^2 - y^2$ y $z = 0$

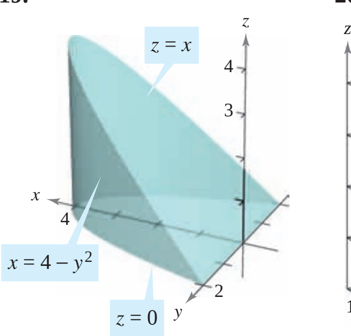
16. El sólido limitado por $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ y $z = 0$.

17. El sólido que es el interior común bajo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 80$ y sobre el paraboloide $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$

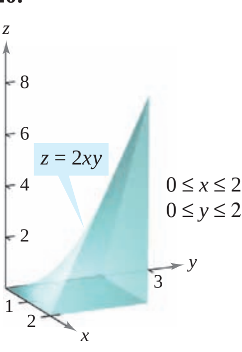
18. El sólido limitado arriba por el cilindro $z = 4 - x^2$ y abajo por el paraboloide $z = x^2 + 3y^2$

Volumen **En los ejercicios 19 a 22, utilizar una integral triple para hallar el volumen del sólido mostrado en la figura.**

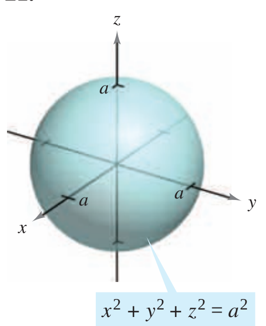
19.



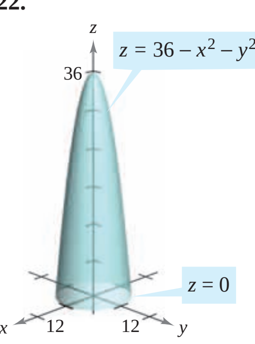
20.



21.



22.



Volumen **En los ejercicios 23 a 26, usar una integral triple para encontrar el volumen del sólido limitado por las gráficas de las ecuaciones.**

23. $z = 4 - x^2$, $y = 4 - x^2$, primer octante

24. $z = 9 - x^3$, $y = -x^2 + 2$, $y = 0$, $z = 0$, $x \geq 0$

25. $z = 2 - y$, $z = 4 - y^2$, $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$

26. $z = x$, $y = x + 2$, $y = x^2$, primer octante

En los ejercicios 27 a 32, dibujar el sólido cuyo volumen está dado por la integral iterada y reescribir la integral utilizando el orden de integración indicado.

27. $\int_0^1\int_{-1}^0\int_0^{y^2} dz\,dy\,dx$

Reescribir usando el orden $dy\,dz\,dx$.

28. $\int_{-1}^1\int_{y^2}^1\int_0^{1-x} dz\,dx\,dy$

Reescribir usando el orden $dx\,dz\,dy$.

29. $\int_0^4\int_0^{(4-x)/2}\int_0^{(12-3x-6y)/4} dz\,dy\,dx$

Reescribir utilizando el orden $dy\,dx\,dz$.

30. $\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^{6-x-y} dz\,dy\,dx$

Reescribir utilizando el orden $dz\,dx\,dy$.

31. $\int_0^1\int_y^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz\,dx\,dy$

Reescribir utilizando el orden $dz\,dy\,dx$.

32. $\int_0^2\int_{2x}^4\int_0^{\sqrt{y^2-4x^2}} dz\,dy\,dx$

Reescribir utilizando el orden $dx\,dy\,dz$.

En los ejercicios 33 a 36, dar los seis posibles órdenes de integración de la integral triple sobre la región sólida Q, $\iiint_Q xyz\,dV$.

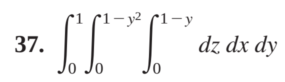
33. $Q = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq 3\}$

34. $Q = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 2 - x\}$

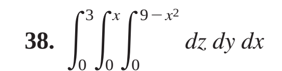
35. $Q = \{(x, y, z): x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq z \leq 4\}$

36. $Q = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq 1, y \leq 1 - x^2, 0 \leq z \leq 6\}$

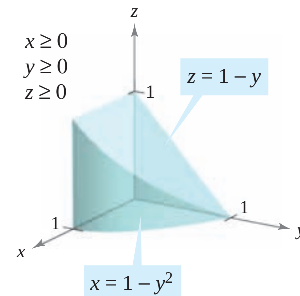
En los ejercicios 37 y 38, la figura muestra la región de integración de la integral dada. Reescribir la integral como una integral iterada equivalente con los otros cinco órdenes.

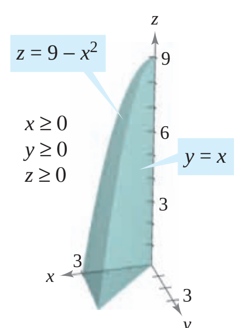
37. 

$$\int_0^1 \int_0^{1-y^2} \int_0^{1-y} dz\,dx\,dy$$

38. 

$$\int_0^3 \int_0^x \int_0^{9-x^2} dz\,dy\,dx$$





Masa y centro de masa **En los ejercicios 39 a 42, hallar la masa y las coordenadas indicadas del centro de masa del sólido de densidad dada acotado por las gráficas de las ecuaciones.**

39. Hallar $\bar{x}$ utilizando $\rho(x, y, z) = k$.

Q: $2x + 3y + 6z = 12,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

40. Hallar $\bar{y}$ utilizando $\rho(x, y, z) = ky$.

Q: $3x + 3y + 5z = 15,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

41. Hallar $\bar{z}$ utilizando $\rho(x, y, z) = kx$.

Q: $z = 4 - x,\ z = 0,\ y = 0,\ y = 4,\ x = 0$

42. Hallar $\bar{y}$ utilizando $\rho(x, y, z) = k$.

Q: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1\ (a, b, c > 0),\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

Masa y centro de masa **En los ejercicios 43 y 44, formular las integrales triples para hallar la masa y el centro de masa del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones.**

43. $x = 0,\ x = b,\ y = 0,\ y = b,\ z = 0,\ z = b$

$\rho(x, y, z) = kxy$

44. $x = 0,\ x = a,\ y = 0,\ y = b,\ z = 0,\ z = c$

$\rho(x, y, z) = kz$

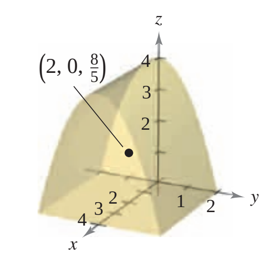
Para pensar **En la figura se muestra el centro de masa de un sólido de densidad constante. En los ejercicios 45 a 48, hacer una conjetura acerca de cómo cambiará el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ con la densidad no constante $\rho(x, y, z)$. Explicar.**

45. $\rho(x, y, z) = kx$

46. $\rho(x, y, z) = kz$

47. $\rho(x, y, z) = k(y + 2)$

48. $\rho(x, y, z) = kxz^2(y + 2)^2$



CAS ***Centroide*** **En los ejercicios 49 a 54, hallar el centroide de la región sólida acotada por las gráficas de las ecuaciones o descrita en la figura. Utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar las integrales triples. (Suponer densidad uniforme y hallar el centro de masa.)**

49. $z = \dfrac{h}{r}\sqrt{x^2 + y^2},\ z = h$

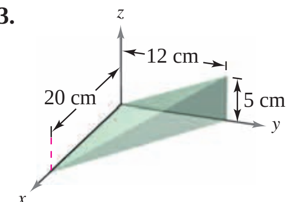
50. $y = \sqrt{9 - x^2},\ z = y,\ z = 0$

51. $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2},\ z = 0$

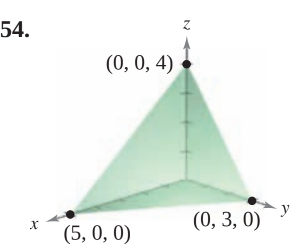
52. $z = \dfrac{1}{y^2 + 1},\ z = 0,\ x = -2,\ x = 2,\ y = 0,\ y = 1$



53.



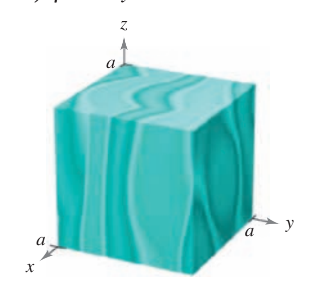
54.

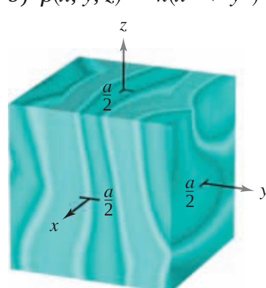


CAS ***Momentos de inercia*** **En los ejercicios 55 a 58, hallar I_x, I_y e I_z para el sólido de densidad dada. Utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar las integrales triples.**

55. *a)* $\rho = k$
b) $\rho = kxyz$

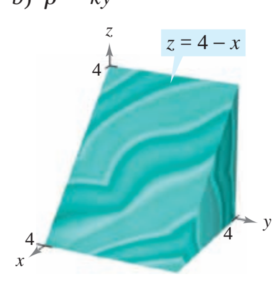
56. *a)* $\rho(x, y, z) = k$
b) $\rho(x, y, z) = k(x^2 + y^2)$

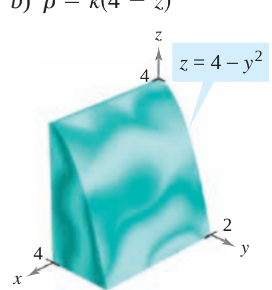




57. *a)* $\rho(x, y, z) = k$
b) $\rho = ky$

58. *a)* $\rho = kz$
b) $\rho = k(4 - z)$



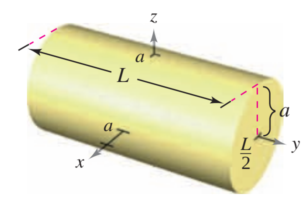


CAS ***Momentos de inercia*** **En los ejercicios 59 y 60, verificar los momentos de inercia del sólido de densidad uniforme. Utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar las integrales triples.**

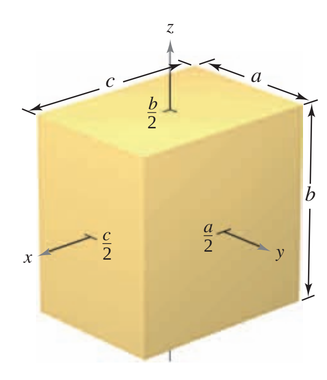
59. $I_x = \frac{1}{12}m(3a^2 + L^2)$

$I_y = \frac{1}{2}ma^2$

$I_z = \frac{1}{12}m(3a^2 + L^2)$



60. $I_x = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$
$I_y = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$
$I_z = \frac{1}{12}m(a^2 + c^2)$



Momentos de inercia **En los ejercicios 61 y 62, dar una integral triple que represente el momento de inercia con respecto al eje z de la región sólida Q de densidad ρ.**

61. $Q = \{(x, y, z): -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1, 0 \le z \le 1 - x\}$
$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

62. $Q = \{(x, y, z): x^2 + y^2 \le 1, 0 \le z \le 4 - x^2 - y^2\}$
$\rho = kx^2$

En los ejercicios 63 y 64, utilizando la descripción de región sólida, dar la integral para *a*) la masa, *b*) el centro de masa y *c*) el momento de inercia con respecto al eje z.

63. El sólido acotado por $z = 4 - x^2 - y^2$ y $z = 0$ con la función de densidad $\rho = kz$

64. El sólido en el primer octante acotado por los planos coordenados y $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ con función de densidad $\rho = kxy$

Desarrollo de conceptos

65. Definir una integral triple y describir un método para evaluar una integral triple.

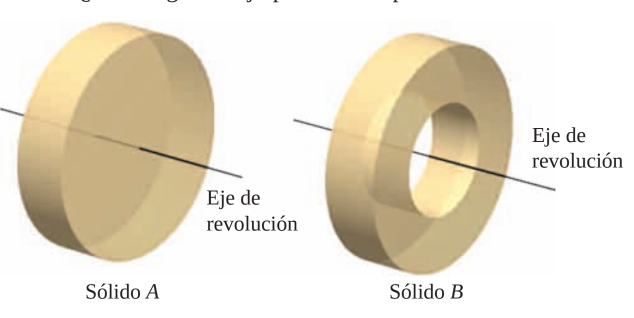
66. Determinar si el momento de inercia con respecto al eje y del cilindro del ejercicio 59 aumentará o disminuirá con la densidad no constante $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + z^2}$ y $a = 4$.

67. Considerar el sólido A y el sólido B de pesos iguales que se muestran en la figura.

a) Como los sólidos tienen el mismo peso, ¿cuál tiene la densidad mayor?

b) ¿Cuál sólido tiene el momento de inercia mayor? Explicar.

c) Los sólidos se hacen rodar hacia abajo en un plano inclinado. Empiezan al mismo tiempo y a la misma altura. ¿Cuál llegará abajo primero? Explicar.



Para discusión

68. ***Para pensar*** De las integrales *a*) a *c*), ¿cuál es igual a $\int_1^3 \int_0^2 \int_{-1}^1 f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$? Explicar.

a) $\int_1^3 \int_0^2 \int_{-1}^1 f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$

b) $\int_{-1}^1 \int_0^2 \int_1^3 f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$

c) $\int_0^2 \int_1^3 \int_{-1}^1 f(x, y, z)\, dy\, dx\, dz$

Valor promedio **En los ejercicios 69 a 72, hallar el valor promedio de la función sobre el sólido dado. El valor promedio de una función continua $f(x, y, z)$ sobre una región sólida Q es**

$$\frac{1}{V}\iiint_Q f(x, y, z)\, dV$$

donde V es el volumen de la región sólida Q.

69. $f(x, y, z) = z^2 + 4$ sobre el cubo en el primer octante acotado por los planos coordenados, y los planos $x = 1$, $y = 1$ y $z = 1$.

70. $f(x, y, z) = xyz$ sobre el cubo en el primer octante acotado por los planos coordenados y los planos $x = 4$, $y = 4$ y $z = 4$.

71. $f(x, y, z) = x + y + z$ sobre el tetraedro en el primer octante cuyos vértices son (0, 0, 0), (2, 0, 0), (0, 2, 0) y (0, 0, 2)

72. $f(x, y, z) = x + y$ sobre el sólido acotado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

CAS **73.** Hallar la región sólida Q donde la integral triple

$$\iiint_Q (1 - 2x^2 - y^2 - 3z^2)\, dV$$

es un máximo. Utilizar un sistema algebraico por computadora y aproximar el valor máximo. ¿Cuál es el valor máximo exacto?

CAS **74.** Hallar la región sólida Q donde la integral triple

$$\iiint_Q (1 - x^2 - y^2 - z^2)\, dV$$

es un máximo. Utilizar un sistema algebraico por computadora y aproximar el valor máximo. ¿Cuál es el valor máximo exacto?

75. Encontrar a en la integral triple.

$$\int_0^1 \int_0^{3-a-y^2} \int_a^{4-x-y^2} dz\, dx\, dy = \frac{14}{15}$$

76. Determinar el valor de b de manera que el volumen del elipsoide $x^2 + (y^2/b^2) + (z^2/9) = 1$ es 16π.

Preparación del examen Putnam

77. Evaluar

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \cos^2\left\{\frac{\pi}{2n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\right\} dx_1\, dx_2 \cdots dx_n.$$

Este problema fue preparado por el Committee on the Putnam Prize Competition.

14.7 Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas

- **Expresar y evaluar una integral triple en coordenadas cilíndricas.**
- **Expresar y evaluar una integral triple en coordenadas esféricas.**

Integrales triples en coordenadas cilíndricas

Muchas regiones sólidas comunes como esferas, elipsoides, conos y paraboloides pueden dar lugar a integrales triples difíciles de calcular en coordenadas rectangulares. De hecho, fue precisamente esta dificultad la que llevó a la introducción de sistemas de coordenadas no rectangulares. En esta sección se aprenderá a usar coordenadas *cilíndricas* y *esféricas* para evaluar integrales triples.

The Granger Collection

PIERRE SIMON DE LAPLACE (1749-1827)

Uno de los primeros en utilizar un sistema de coordenadas cilíndricas fue el matemático francés Pierre Simon de Laplace. Laplace ha sido llamado el "Newton de Francia", y publicó muchos trabajos importantes en mecánica, ecuaciones diferenciales y probabilidad.

Recuérdese que en la sección 11.7 se vio que las ecuaciones rectangulares de conversión a coordenadas cilíndricas son

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\,\text{sen}\,\theta$$
$$z = z.$$

AYUDA DE ESTUDIO Una manera fácil de recordar estas ecuaciones es observar que las ecuaciones para obtener x y y son iguales que en el caso de coordenadas polares y que z no cambia.

En este sistema de coordenadas, la región sólida más simple es un bloque cilíndrico determinado por

$$r_1 \le r \le r_2, \quad \theta_1 \le \theta \le \theta_2, \quad z_1 \le z \le z_2$$

como se muestra en la figura 14.63. Para expresar una integral triple por medio de coordenadas cilíndricas, supóngase que Q es una región sólida cuya proyección R sobre el plano xy puede describirse en coordenadas polares. Es decir,

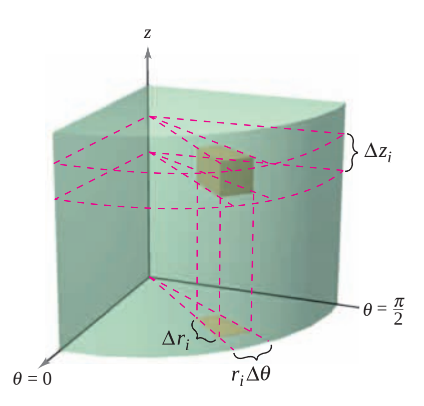
$$Q = \{(x, y, z): (x, y) \text{ está en } R, \quad h_1(x, y) \le z \le h_2(x, y)\}$$

y

$$R = \{(r, \theta): \theta_1 \le \theta \le \theta_2, \quad g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta)\}.$$

Si f es una función continua sobre el sólido Q, se puede expresar la integral triple de f sobre Q como

$$\iiint_Q f(x, y, z)\, dV = \iint_R \left[\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\right] dA$$

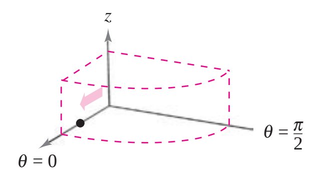


Volumen del bloque cilíndrico: $\Delta V_i = r_i \Delta r_i \Delta\theta_i \Delta z_i$
Figura 14.63

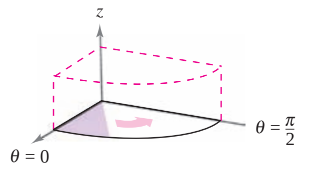
donde la integral doble sobre R se evalúa en coordenadas polares. Es decir, R es una región plana que es r-simple o θ-simple. Si R es r-simple, la forma iterada de la integral triple en forma cilíndrica es

$$\iiint_Q f(x, y, z)\, dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)}\int_{h_1(r\cos\theta,\, r\,\text{sen}\,\theta)}^{h_2(r\cos\theta,\, r\,\text{sen}\,\theta)} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, z) r\, dz\, dr\, d\theta.$$

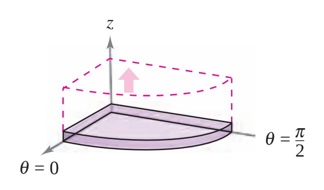
NOTA Éste es sólo uno de los seis posibles órdenes de integración. Los otros cinco son $dz\,d\theta\,dr$, $dr\,dz\,d\theta$, $dr\,d\theta\,dz$, $d\theta\,dz\,dr$ y $d\theta\,dr\,dz$. ■



Integrar con respecto a r



Integrar con respecto a θ



Integrar con respecto a z

Figura 14.64

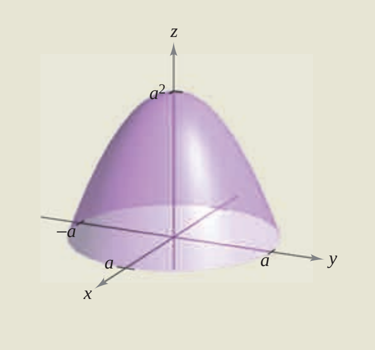
Para visualizar un orden de integración determinado ayuda contemplar la integral iterada en términos de tres movimientos de barrido, cada uno de los cuales agrega una dimensión al sólido. Por ejemplo, en el orden $dr\,d\theta\,dz$, la primera integración ocurre en la dirección r, aquí un punto barre (recorre) un rayo. Después, a medida que θ aumenta, la recta barre (recorre) un sector. Por último a medida que z aumenta, el sector barre (recorre) una cuña sólida como se muestra en la figura 14.64.

EXPLORACIÓN

Volumen de un sector paraboloide En las páginas 997, 1006 y 1028, se pidió resumir las formas, conocidas para hallar el volumen del sólido acotado por el paraboloide

$$z = a^2 - x^2 - y^2, \quad a > 0$$

y el plano xy. Ahora ya se conoce un método más. Utilícese para hallar el volumen del sólido. Comparar los diferentes métodos. ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de cada uno?



EJEMPLO 1 Hallar el volumen empleando coordenadas cilíndricas

Hallar el volumen de la región sólida Q que corta en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ el cilindro $r = 2 \operatorname{sen} \theta$, como se muestra en la figura 14.65.

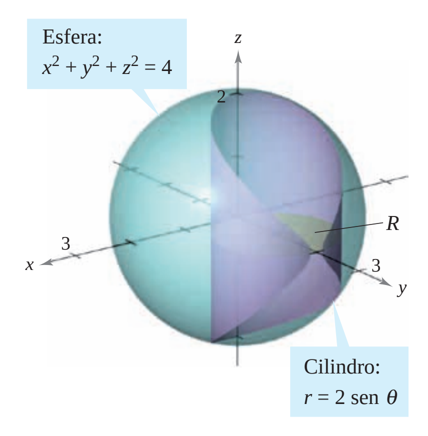


Figura 14.65

Solución Como $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + z^2 = 4$, los límites o cotas de z son

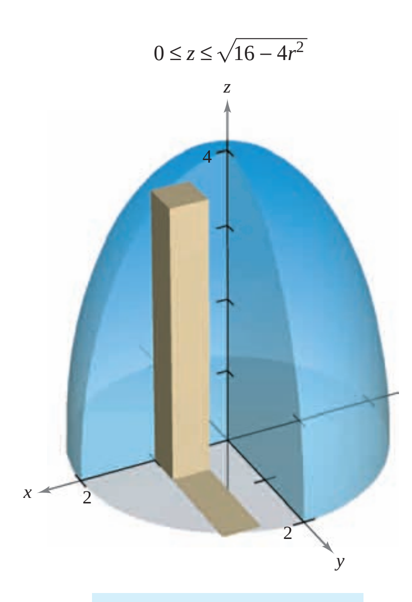
$$-\sqrt{4 - r^2} \le z \le \sqrt{4 - r^2}.$$

Sea R la proyección circular del sólido sobre el plano $r\theta$. Entonces los límites o cotas de R son $0 \le r \le 2 \operatorname{sen} \theta$ y $0 \le \theta \le \pi$. Por tanto, el volumen de Q es

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{\pi} \int_0^{2 \operatorname{sen} \theta} \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \operatorname{sen} \theta} \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \operatorname{sen} \theta} 2r\sqrt{4 - r^2}\,dr\,d\theta \\
&= 2\int_0^{\pi/2} -\frac{2}{3}(4 - r^2)^{3/2}\Big]_0^{2 \operatorname{sen} \theta} d\theta \\
&= \frac{4}{3}\int_0^{\pi/2} (8 - 8\cos^3 \theta)\,d\theta \\
&= \frac{32}{3}\int_0^{\pi/2} [1 - (\cos \theta)(1 - \operatorname{sen}^2 \theta)]\,d\theta \\
&= \frac{32}{3}\left[\theta - \operatorname{sen} \theta + \frac{\operatorname{sen}^3 \theta}{3}\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{16}{9}(3\pi - 4) \\
&\approx 9.644.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Hallar la masa empleando coordenadas cilíndricas

Hallar la masa de la porción del elipsoide Q dado por $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$, situada sobre el plano xy. La densidad en un punto del sólido es proporcional a la distancia entre el punto y el plano xy.



Elipsoide: $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$

Figura 14.66

Solución La función de densidad es $\rho(r, \theta, z) = kz$. Los límites o cotas de z son

$$0 \le z \le \sqrt{16 - 4x^2 - 4y^2} = \sqrt{16 - 4r^2}$$

donde $0 \le r \le 2$ y $0 \le \theta \le 2\pi$, como se muestra en la figura 14.66. La masa del sólido es

$$\begin{aligned}
m &= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{\sqrt{16-4r^2}} kzr\,dz\,dr\,d\theta \\
&= \frac{k}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^2 z^2r\Big]_0^{\sqrt{16-4r^2}} dr\,d\theta \\
&= \frac{k}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^2 (16r - 4r^3)\,dr\,d\theta \\
&= \frac{k}{2}\int_0^{2\pi}\Big[8r^2 - r^4\Big]_0^2 d\theta \\
&= 8k\int_0^{2\pi} d\theta = 16\pi k.
\end{aligned}$$

La integración en coordenadas cilíndricas es útil cuando en el integrando aparecen factores con la expresión $x^2 + y^2$ como se ilustra en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Hallar el momento de inercia

Hallar el momento de inercia con respecto al eje de simetría del sólido Q limitado o acotado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 4$, como se muestra en la figura 14.67. La densidad en cada punto es proporcional a la distancia entre el punto y el eje z.

Limitado o acotado por Q:
$z = x^2 + y^2$
$z = 4$

Figura 14.67

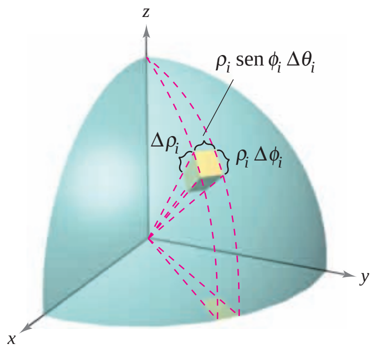
Solución Como el eje z es el eje de simetría, y $\rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$, sigue que

$$I_z = \iiint_Q k(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}\,dV.$$

En coordenadas cilíndricas, $0 \le r \le \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z}$. Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned}
I_z &= k\int_0^4\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{z}} r^2(r)r\,dr\,d\theta\,dz \\
&= k\int_0^4\int_0^{2\pi} \frac{r^5}{5}\Big]_0^{\sqrt{z}} d\theta\,dz \\
&= k\int_0^4\int_0^{2\pi} \frac{z^{5/2}}{5}\,d\theta\,dz \\
&= \frac{k}{5}\int_0^4 z^{5/2}(2\pi)\,dz \\
&= \frac{2\pi k}{5}\left[\frac{2}{7}z^{7/2}\right]_0^4 = \frac{512k\pi}{35}.
\end{aligned}$$

Integrales triples en coordenadas esféricas



Bloque esférico:
$\Delta V_i \approx \rho_i^2 \operatorname{sen} \phi_i \,\Delta\rho_i\,\Delta\phi_i\,\Delta\theta_i$
Figura 14.68

Las integrales triples que involucran esferas o conos son a menudo más fáciles de calcular mediante la conversión a coordenadas esféricas. Recordar que en la sección 11.7 se vieron las ecuaciones rectangulares para conversión a coordenadas esféricas

$$x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta$$
$$y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$$
$$z = \rho \cos\phi.$$

En este sistema de coordenadas, la región más simple es un bloque esférico determinado por

$$\{(\rho, \theta, \phi): \rho_1 \le \rho \le \rho_2, \quad \theta_1 \le \theta \le \theta_2, \quad \phi_1 \le \phi \le \phi_2\}$$

donde $\rho_1 \ge 0$, $\theta_2 - \theta_1 \le 2\pi$ y $0 \le \phi_1 \le \phi_2 \le \pi$, como se muestra en la figura 14.68. Si (ρ, θ, ϕ) es un punto en el interior de uno de estos bloques, entonces el volumen del bloque puede ser aproximado por $\Delta V \approx \rho^2 \operatorname{sen}\phi\,\Delta\rho\,\Delta\phi\,\Delta\theta$ (ver ejercicio 18 en los ejercicios de solución de problemas de este capítulo).

Utilizando el proceso habitual que comprende una partición interior, una suma y un límite, se desarrolla la versión siguiente de una integral triple en coordenadas esféricas para una función continua f en la región sólida Q.

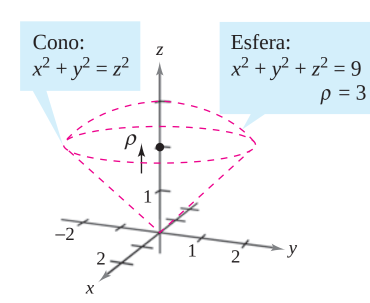
$$\iiint_Q f(x, y, z)\,dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\phi_1}^{\phi_2}\int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \rho\cos\phi)\rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta.$$

Esta fórmula puede modificarse para emplear diferentes órdenes de integración y se puede generalizar a regiones con límites o cotas variables.

Como las integrales triples en coordenadas cilíndricas, las integrales triples en coordenadas esféricas se evalúan empleando integrales iteradas. Como sucede con las coordenadas cilíndricas, se puede visualizar un orden determinado de integración contemplando la integral iterada en términos de tres movimientos de barrido, cada uno de los cuales agrega una dimensión al sólido. Por ejemplo, la integral iterada

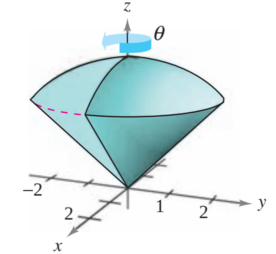
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^3 \rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

(que se usó en el ejemplo 4) se ilustra en la figura 14.69.



ρ varía desde 0 hasta 3 mientras ϕ y θ se mantienen constantes
Figura 14.69

ϕ varía desde 0 hasta $\pi/4$ mientras θ se mantiene constante



θ varía desde 0 hasta 2π

NOTA Cuando la letra griega ρ se emplea en coordenadas esféricas no está relacionada con la densidad. Es la análoga tridimensional de la r que se utiliza en coordenadas polares. En este texto, en los problemas en los que se empleen coordenadas esféricas y una función de densidad, se usará un símbolo diferente para denotar la densidad. ■

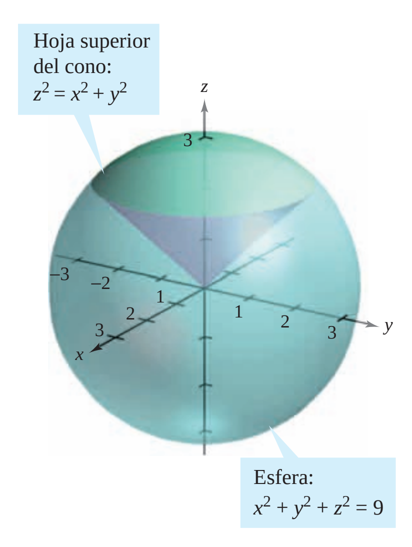


Figura 14.70

EJEMPLO 4 Hallar un volumen en coordenadas esféricas

Hallar el volumen de la región sólida Q limitada o acotada inferiormente por la hoja superior del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, como se muestra en la figura 14.70.

Solución En coordenadas esféricas, la ecuación de la esfera es

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad \rho = 3.$$

La esfera y el cono se cortan cuando

$$(x^2 + y^2) + z^2 = (z^2) + z^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

y, como $z = \rho \cos \phi$, se tiene que

$$\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \cos \phi \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{\pi}{4}.$$

Por consiguiente, se puede utilizar el orden de integración $d\rho\, d\phi\, d\theta$, donde $0 \le \rho \le 3$, $0 \le \phi \le \pi/4$ y $0 \le \theta \le 2\pi$. El volumen es

$$\begin{aligned} V = \iiint_Q dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^3 \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} 9 \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta \\ &= 9\int_0^{2\pi} -\cos\phi\Big]_0^{\pi/4}\, d\theta \\ &= 9\int_0^{2\pi}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) d\theta = 9\pi\left(2 - \sqrt{2}\right) \approx 16.563. \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Hallar el centro de masa de una región sólida

Hallar el centro de masa de la región sólida Q de densidad uniforme, limitada o acotada inferiormente por la hoja superior del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Solución Como la densidad es uniforme, se puede considerar que la densidad en el punto (x, y, z) es k. Por la simetría, el centro de masa se encuentra en el eje z, y sólo se necesita calcular $\bar{z} = M_{xy}/m$, donde $m = kV = 9k\pi\left(2 - \sqrt{2}\right)$ por el ejemplo 4. Como $z = \rho \cos \phi$, se sigue que

$$\begin{aligned} M_{xy} = \iiint_Q kz\, dV &= k\int_0^3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} (\rho\cos\phi)\rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta\, d\rho \\ &= k\int_0^3\int_0^{2\pi} \rho^3 \frac{\operatorname{sen}^2\phi}{2}\Big]_0^{\pi/4} d\theta\, d\rho \\ &= \frac{k}{4}\int_0^3\int_0^{2\pi} \rho^3\, d\theta\, d\rho = \frac{k\pi}{2}\int_0^3 \rho^3\, d\rho = \frac{81k\pi}{8}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{81k\pi/8}{9k\pi\left(2 - \sqrt{2}\right)} = \frac{9\left(2 + \sqrt{2}\right)}{16} \approx 1.920$$

y el centro de masa es aproximadamente (0, 0, 1.92).

14.7 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, evaluar la integral iterada.

1. $\int_{-1}^{5}\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{3} r\cos\theta\, dr\, d\theta\, dz$

2. $\int_{0}^{\pi/4}\int_{0}^{6}\int_{0}^{6-r} rz\, dz\, dr\, d\theta$

3. $\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{2\cos^2\theta}\int_{0}^{4-r^2} r\,\text{sen}\,\theta\, dx\, dr\, d\theta$

4. $\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{2} e^{-\rho^3}\rho^2\, d\rho\, d\theta\, d\phi$

5. $\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi/4}\int_{0}^{\cos\phi} \rho^2\,\text{sen}\,\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

6. $\int_{0}^{\pi/4}\int_{0}^{\pi/4}\int_{0}^{\cos\theta} \rho^2\,\text{sen}\,\phi\cos\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$

CAS **En los ejercicios 7 y 8, utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar la integral iterada.**

7. $\int_{0}^{4}\int_{0}^{z}\int_{0}^{\pi/2} re^{r}\, d\theta\, dr\, dz$

8. $\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\text{sen}\,\theta} (2\cos\phi)\rho^2\, d\rho\, d\theta\, d\phi$

En los ejercicios 9 a 12, dibujar la región sólida cuyo volumen está dado por la integral iterada, y evaluar la integral iterada.

9. $\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{3}\int_{0}^{e^{-r^2}} r\, dz\, dr\, d\theta$

10. $\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\sqrt{5}}\int_{0}^{5-r^2} r\, dz\, dr\, d\theta$

11. $\int_{0}^{2\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_{0}^{4} \rho^2\,\text{sen}\,\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

12. $\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi}\int_{2}^{5} \rho^2\,\text{sen}\,\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

En los ejercicios 13 a 16, convertir la integral de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas y a coordenadas esféricas, y evaluar la integral iterada más sencilla.

13. $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{4} x\, dz\, dy\, dx$

14. $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dz\, dy\, dx$

15. $\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_{a}^{a+\sqrt{a^2-x^2-y^2}} x\, dz\, dy\, dx$

16. $\int_{0}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dz\, dy\, dx$

Volumen **En los ejercicios 17 a 22, utilizar coordenadas cilíndricas para hallar el volumen del sólido.**

17. Sólido interior a $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $(x - a/2)^2 + y^2 = (a/2)^2$

18. Sólido interior a $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y exterior a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

19. Sólido limitado arriba por $z = 2x$ y abajo por $z = 2x^2 + 2y^2$

20. Sólido limitado arriba por $z = 2 - x^2 - y^2$ y abajo por $z = x^2 + y^2$

21. Sólido limitado o acotado por las gráficas de la esfera $r^2 + z^2 = a^2$ y del cilindro $r = a\cos\theta$

22. Sólido interior a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y sobre la hoja superior del cono $z^2 = x^2 + y^2$

Masa **En los ejercicios 23 y 24, utilizar coordenadas cilíndricas para hallar la masa del sólido Q.**

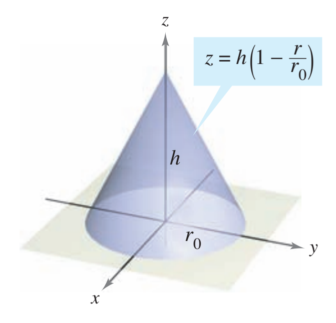
23. $Q = \{(x, y, z): 0 \le z \le 9 - x - 2y, x^2 + y^2 \le 4\}$

$\rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$

24. $Q = \{(x, y, z): 0 \le z \le 12e^{-(x^2+y^2)}, x^2 + y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0\}$

$\rho(x, y, z) = k$

En los ejercicios 25 a 30, utilizar coordenadas cilíndricas para hallar la característica indicada del cono que se muestra en la figura.



25. ***Volumen*** Hallar el volumen del cono.

26. ***Centroide*** Hallar el centroide del cono.

CAS 27. ***Centro de masa*** Hallar el centro de masa del cono suponiendo que su densidad en cualquier punto es proporcional a la distancia entre el punto y el eje del cono. Utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar la integral triple.

CAS 28. ***Centro de masa*** Hallar el centro de masa del cono suponiendo que su densidad en cualquier punto es proporcional a la distancia entre el punto y la base. Utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar la integral triple.

29. ***Momento de inercia*** Suponer que el cono tiene densidad uniforme y mostrar que el momento de inercia con respecto al eje z es

$I_z = \frac{3}{10}mr_0^2.$

30. ***Momento de inercia*** Suponer que la densidad del cono es $\rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$ y hallar el momento de inercia con respecto al eje z.

Momento de inercia **En los ejercicios 31 y 32, usar coordenadas cilíndricas para verificar la fórmula dada para el momento de inercia del sólido de densidad uniforme.**

31. Capa cilíndrica: $I_z = \frac{1}{2}m(a^2 + b^2)$

$0 < a \le r \le b, \quad 0 \le z \le h$

CAS **32.** Cilindro circular recto: $I_z = \frac{3}{2}ma^2$

$r = 2a \operatorname{sen} \theta, \quad 0 \leq z \leq h$

Utilizar un sistema algebraico por computadora y calcular la integral triple.

Volumen **En los ejercicios 33 a 36, utilizar coordenadas esféricas para calcular el volumen del sólido.**

33. Sólido interior $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, exterior $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, y arriba del plano xy.

34. Sólido limitado arriba por $x^2 + y^2 + z^2 = z$ y abajo por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

CAS **35.** El toro dado por $\rho = 4 \operatorname{sen} \phi$. (Utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar la integral triple.)

36. El sólido comprendido entre las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $b > a$, e interior al cono $z^2 = x^2 + y^2$

Masa **En los ejercicios 37 y 38, utilizar coordenadas esféricas para hallar la masa de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ de densidad especificada.**

37. La densidad en cualquier punto es proporcional a la distancia entre el punto y el origen.

38. La densidad en cualquier punto es proporcional a la distancia del punto al eje z.

Centro de masa **En los ejercicios 39 y 40, utilizar coordenadas esféricas para hallar el centro de masa del sólido de densidad uniforme.**

39. Sólido hemisférico de radio r

40. Sólido comprendido entre dos hemisferios concéntricos de radios r y R, donde $r < R$

Momento de inercia **En los ejercicios 41 y 42, utilizar coordenadas esféricas para hallar el momento de inercia con respecto al eje z del sólido de densidad uniforme.**

41. Sólido limitado o acotado por el hemisferio $\rho = \cos \phi$, $\pi/4 \leq \phi \leq \pi/2$, y el cono $\phi = \pi/4$

42. Sólido comprendido entre dos hemisferios concéntricos de radios r y R, donde $r < R$

Desarrollo de conceptos

43. Dar las ecuaciones de conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas y viceversa.

44. Dar las ecuaciones de conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas y viceversa.

45. Dar la forma iterada de la integral triple $\iiint_Q f(x, y, z)\, dV$ en forma cilíndrica.

46. Dar la forma iterada de la integral triple $\iiint_Q f(x, y, z)\, dV$ en forma esférica.

47. Describir la superficie cuya ecuación es una coordenada igual a una constante en cada una de las coordenadas en *a*) el sistema de coordenadas cilíndricas y *b*) el sistema de coordenadas esféricas.

Para discusión

48. Convertir la integral desde coordenadas rectangulares a *a*) coordenadas cilíndricas y *b*) esféricas. Sin calcular, ¿qué integral parece ser más sencilla de evaluar? ¿Por qué?

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dz\, dy\, dx$$

49. Hallar el "volumen" de la "esfera en cuatro dimensiones"

$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = a^2$

evaluando

$$16\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}} dw\, dz\, dy\, dx.$$

50. Utilizar las coordenadas esféricas para mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, e^{-(x^2+y^2+z^2)}\, dx\, dy\, dz = 2\pi.$$

Preparación del examen Putnam

51. Encontrar el volumen de la región de puntos (x, y, z) en forma tal que $(x^2 + y^2 + z^2 + 8)^2 \leq 36(x^2 + y^2)$.

PROYECTO DE TRABAJO

Esferas deformadas

En los incisos *a*) y *b*), hallar el volumen de las esferas deformadas. Estos sólidos se usan como modelos de tumores.

a) Esfera deformada

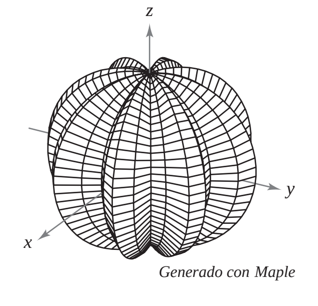
$\rho = 1 + 0.2 \operatorname{sen} 8\theta \operatorname{sen} \phi$

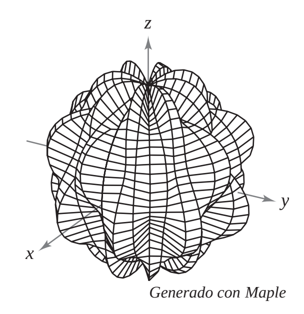
$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$

b) Esfera deformada

$\rho = 1 + 0.2 \operatorname{sen} 8\theta \operatorname{sen} 4\phi$

$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$





PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre estos tipos de esferas, ver el artículo "Heat Therapy for Tumors" de Leah Edelstein-Keshet en *The UMAP Journal*.

14.8 Cambio de variables: jacobianos

- **Comprender el concepto de jacobiano.**
- **Utilizar un jacobiano para cambiar variables en una integral doble.**

Carl Gustav Jacobi (1804-1851)

El jacobiano recibe su nombre en honor al matemático alemán Carl Gustav Jacobi, conocido por su trabajo en muchas áreas de matemática, pero su interés en integración provenía del problema de hallar la circunferencia de una elipse.

Jacobianos

En una integral simple

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

se puede tener un cambio de variables haciendo $x = g(u)$, con lo que $dx = g'(u)\,du$, y obtener

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(u))g'(u)\,du$$

donde $a = g(c)$ y $b = g(d)$. Nótese que el proceso de cambio de variables introduce, en el integrando, un factor adicional $g'(u)$. Esto también ocurre en el caso de las integrales dobles

$$\int_R\!\!\int f(x, y)\,dA = \int_S\!\!\int f(g(u, v), h(u, v))\underbrace{\left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right|}_{\text{Jacobiano}}du\,dv$$

donde el cambio de variables $x = g(u, v)$ y $y = h(u, v)$ introduce un factor llamado **jacobiano** de x y y con respecto a u y v. Al definir el jacobiano, es conveniente utilizar la notación siguiente que emplea determinantes.

DEFINICIÓN DEL JACOBIANO

Si $x = g(u, v)$ y $y = h(u, v)$, entonces el **jacobiano** de x y y con respecto a u y v, denotado por $\partial(x, y)/\partial(u, v)$, es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}.$$

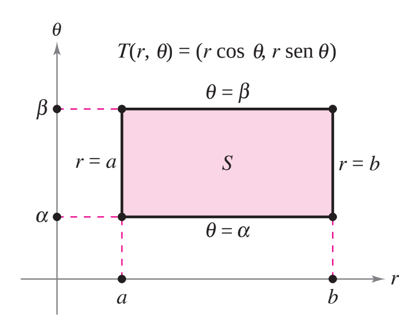
EJEMPLO 1 El jacobiano de la conversión rectangular-polar

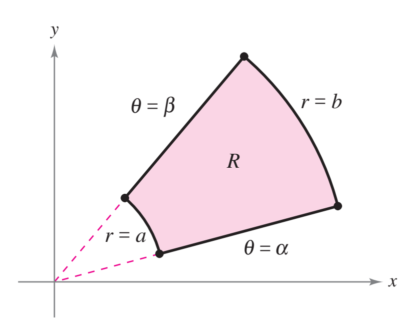
Hallar el jacobiano para el cambio de variables definido por

$$x = r\cos\theta \qquad \text{y} \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Solución De acuerdo con la definición de un jacobiano, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} &= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} \\ &= r\cos^2\theta + r\,\mathrm{sen}^2\theta \\ &= r.\end{aligned}$$





S es la región en el plano *rθ* que corresponde a *R* en el plano *xy*
Figura 14.71

El ejemplo 1 indica que el cambio de variables de coordenadas rectangulares a polares en una integral doble se puede escribir como

$$\int_R\int f(x, y)\, dA = \int_S\int f(r\cos\theta, r \operatorname{sen}\theta) r\, dr\, d\theta,\quad r > 0$$
$$= \int_S\int f(r\cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}\right| dr\, d\theta$$

donde S es la región en el plano $r\theta$ que corresponde a la región R en el plano xy, como se muestra en la figura 14.71. Esta fórmula es semejante a la de la página 1006.

En general, un cambio de variables está dado por una **transformación** biyectiva (o uno a uno) T de una región S en el plano uv en una región R en el plano xy dada por

$$T(u, v) = (x, y) = (g(u, v), h(u, v))$$

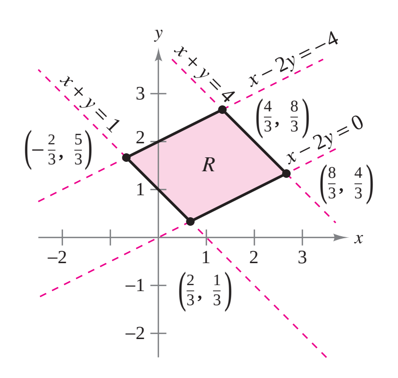
donde g y h tienen primeras derivadas parciales continuas en la región S. Nótese que el punto (u, v) se encuentra en S y el punto (x, y) se encuentra en R. En la mayor parte de las ocasiones, se busca una transformación en la que la región S sea más simple que la región R.

EJEMPLO 2 Hallar un cambio de variables para simplificar una región

Sea R la región limitada o acotada por las rectas

$$x - 2y = 0,\qquad x - 2y = -4,\qquad x + y = 4\qquad \text{y}\qquad x + y = 1$$

como se muestra en la figura 14.72. Hallar una transformación T de una región S a R tal que S sea una región rectangular (con lados paralelos a los ejes u o v).



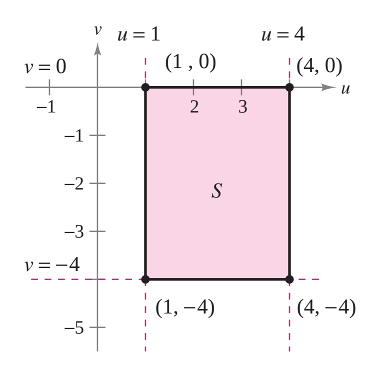
Región *R* en el plano *xy*
Figura 14.72

Solución Para empezar, sea $u = x + y$ y $v = x - 2y$. Resolviendo este sistema de ecuaciones para encontrar x y y se obtiene $T(u, v) = (x, y)$, donde

$$x = \frac{1}{3}(2u + v)\qquad \text{y}\qquad y = \frac{1}{3}(u - v).$$

Los cuatro límites de R en el plano xy dan lugar a los límites siguientes de S en el plano uv.

Límites en el plano xy		*Límites en el plano uv*
$x + y = 1$	⇨	$u = 1$
$x + y = 4$	⇨	$u = 4$
$x - 2y = 0$	⇨	$v = 0$
$x - 2y = -4$	⇨	$v = -4$



Región *S* en el plano *uv*
Figura 14.73

La región S se muestra en la figura 14.73. Nótese que la transformación T

$$T(u, v) = (x, y) = \left(\frac{1}{3}[2u + v], \frac{1}{3}[u - v]\right)$$

transforma los vértices de la región S en los vértices de la región R. Por ejemplo,

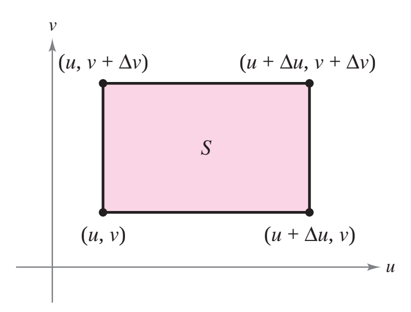
$$T(1, 0) = \left(\tfrac{1}{3}[2(1) + 0], \tfrac{1}{3}[1 - 0]\right) = \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right)$$
$$T(4, 0) = \left(\tfrac{1}{3}[2(4) + 0], \tfrac{1}{3}[4 - 0]\right) = \left(\tfrac{8}{3}, \tfrac{4}{3}\right)$$
$$T(4, -4) = \left(\tfrac{1}{3}[2(4) - 4], \tfrac{1}{3}[4 - (-4)]\right) = \left(\tfrac{4}{3}, \tfrac{8}{3}\right)$$
$$T(1, -4) = \left(\tfrac{1}{3}[2(1) - 4], \tfrac{1}{3}[1 - (-4)]\right) = \left(-\tfrac{2}{3}, \tfrac{5}{3}\right).$$

Cambio de variables en integrales dobles

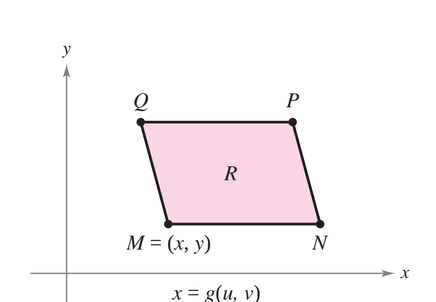
TEOREMA 14.5 CAMBIO DE VARIABLES EN INTEGRALES DOBLES

Sea R una región vertical u horizontalmente sencilla en el plano xy y sea S una región vertical u horizontalmente sencilla en el plano uv. Sea T desde S hasta R dado por $T(u, v) = (x, y) = (g(u, v), h(u, v))$, donde g y h tienen primeras derivadas parciales continuas. Suponer que T es uno a uno excepto posiblemente en la frontera de S. Si f es continua en R y $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ no es cero en S, entonces

$$\int_R\int f(x, y)\,dx\,dy = \int_S\int f(g(u, v), h(u, v))\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv.$$



Área de $S = \Delta u\,\Delta v$
$\Delta u > 0,\ \Delta v > 0$
Figura 14.74



Los vértices en el plano xy son $M(g(u, v), h(u, v))$, $N(g(u + \Delta u, v), h(u + \Delta u, v))$, $P(g(u + \Delta u, v + \Delta v), h(u + \Delta u, v + \Delta v))$ y $Q(g(u, v + \Delta v), h(u, v + \Delta v))$.
Figura 14.75

DEMOSTRACIÓN Considerar el caso en el que S es una región rectangular en el plano uv con vértices (u, v), $(u + \Delta u, v)$, $(u + \Delta u, v + \Delta v)$ y $(u, v + \Delta v)$ como se muestra en la figura 14.74. Las imágenes de estos vértices en el plano xy se muestran en la figura 14.75. Si Δu y Δv son pequeños, la continuidad de g y de h implica que R es aproximadamente un paralelogramo determinado por los vectores $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{MQ}$. Así pues, el área de R es

$$\Delta A \approx \|\overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MQ}\|.$$

Para Δu y Δv pequeños, las derivadas parciales de g y h con respecto a u pueden ser aproximadas por

$$g_u(u, v) \approx \frac{g(u + \Delta u, v) - g(u, v)}{\Delta u} \quad \text{y} \quad h_u(u, v) \approx \frac{h(u + \Delta u, v) - h(u, v)}{\Delta u}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= [g(u + \Delta u, v) - g(u, v)]\mathbf{i} + [h(u + \Delta u, v) - h(u, v)]\mathbf{j}\\ &\approx [g_u(u, v)\,\Delta u]\mathbf{i} + [h_u(u, v)\,\Delta u]\mathbf{j}\\ &= \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u\,\mathbf{j}.\end{aligned}$$

De manera similar, se puede aproximar $\overrightarrow{MQ}$ por $\frac{\partial x}{\partial v}\Delta v\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v\,\mathbf{j}$, lo que implica que

$$\overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MQ} \approx \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u & \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u & 0\\ \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v & \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\Delta u\,\Delta v\,\mathbf{k}.$$

Por tanto, en la notación del jacobiano,

$$\Delta A \approx \|\overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MQ}\| \approx \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| \Delta u\,\Delta v.$$

Como esta aproximación mejora cuando Δu y Δv se aproximan a 0, el caso límite puede escribirse como

$$dA \approx \|\overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MQ}\| \approx \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv.$$

Por tanto,

$$\int_R\int f(x, y)\,dx\,dy = \int_S\int f(g(u, v), h(u, v))\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv.$$

Los dos ejemplos siguientes muestran cómo un cambio de variables puede simplificar el proceso de integración. La simplificación se puede dar de varias maneras. Se puede hacer un cambio de variables para simplificar la *región R* o el *integrando* $f(x, y)$, o ambos.

EJEMPLO 3 Un cambio de variables para simplificar una región

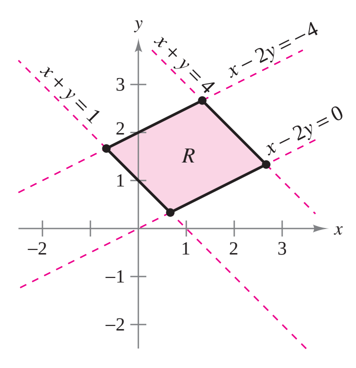


Figura 14.76

Sea R la región limitada o acotada por las rectas

$$x - 2y = 0, \quad x - 2y = -4, \quad x + y = 4 \quad \text{y} \quad x + y = 1$$

como se muestra en la figura 14.76. Evaluar la integral doble

$$\int_R\int 3xy\, dA.$$

Solución De acuerdo con el ejemplo 2, se puede usar el cambio siguiente de variables.

$$x = \frac{1}{3}(2u + v) \quad \text{y} \quad y = \frac{1}{3}(u - v)$$

Las derivadas parciales de x y y son

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{2}{3}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{3}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{1}{3}$$

lo cual implica que el jacobiano es

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} &= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{3} \end{vmatrix} \\
&= -\frac{2}{9} - \frac{1}{9} \\
&= -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

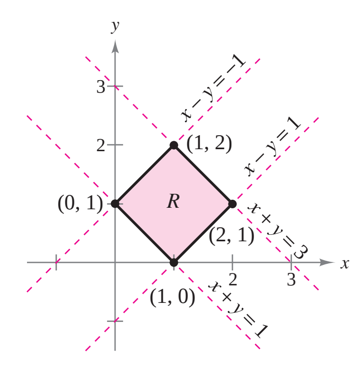
Por tanto, por el teorema 14.5, se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_R\int 3xy\, dA &= \int_S\int 3\left[\frac{1}{3}(2u + v)\frac{1}{3}(u - v)\right]\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| dv\, du \\
&= \int_1^4\int_{-4}^0 \frac{1}{9}(2u^2 - uv - v^2)\, dv\, du \\
&= \frac{1}{9}\int_1^4 \left[2u^2v - \frac{uv^2}{2} - \frac{v^3}{3}\right]_{-4}^0 du \\
&= \frac{1}{9}\int_1^4 \left(8u^2 + 8u - \frac{64}{3}\right) du \\
&= \frac{1}{9}\left[\frac{8u^3}{3} + 4u^2 - \frac{64}{3}u\right]_1^4 \\
&= \frac{164}{9}.
\end{aligned}$$

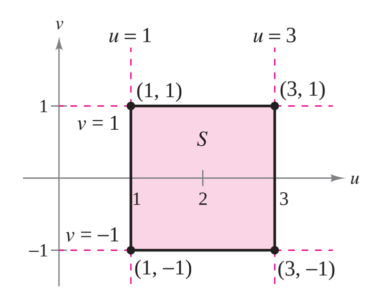
EJEMPLO 4 Un cambio de variables para simplificar un integrando

Sea R la región limitada o acotada por el cuadrado cuyos vértices son $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ y $(1, 0)$. Evaluar la integral

$$\int_R\int (x + y)^2 \operatorname{sen}^2(x - y)\, dA.$$



Región R en el plano xy
Figura 14.77



Región S en el plano uv
Figura 14.78

Solución Obsérvese que los lados de R se encuentran sobre las rectas $x + y = 1$, $x - y = 1$, $x + y = 3$ y $x - y = -1$, como se muestra en la figura 14.77. Haciendo $u = x + y$ y $v = x - y$, se tiene que los límites o cotas de la región S en el plano uv son

$$1 \le u \le 3 \qquad \text{y} \qquad -1 \le v \le 1$$

como se muestra en la figura 14.78. Despejando x y y en términos de u y v se obtiene

$$x = \frac{1}{2}(u + v) \qquad \text{y} \qquad y = \frac{1}{2}(u - v).$$

Las derivadas parciales de x y y son

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{1}{2}$$

lo cual implica que el jacobiano es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Por el teorema 14.5, sigue que

$$\begin{aligned}
\int_R\int (x + y)^2 \operatorname{sen}^2(x - y)\, dA &= \int_{-1}^{1}\int_{1}^{3} u^2 \operatorname{sen}^2 v\left(\frac{1}{2}\right) du\, dv \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (\operatorname{sen}^2 v)\frac{u^3}{3}\Big]_1^3\, dv \\
&= \frac{13}{3}\int_{-1}^{1} \operatorname{sen}^2 v\, dv \\
&= \frac{13}{6}\int_{-1}^{1} (1 - \cos 2v)\, dv \\
&= \frac{13}{6}\left[v - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2v\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{13}{6}\left[2 - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(-2)\right] \\
&= \frac{13}{6}(2 - \operatorname{sen} 2) \\
&\approx 2.363.
\end{aligned}$$

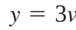
En cada uno de los ejemplos de cambio de variables de esta sección, la región S ha sido un rectángulo con lados paralelos a los ejes u o v. En ocasiones, se puede usar un cambio de variables para otros tipos de regiones. Por ejemplo, $T(u, v) = \left(x, \frac{1}{2}y\right)$ transforma la región circular $u^2 + v^2 = 1$ en la región elíptica $x^2 + (y^2/4) = 1$.

14.8 Ejercicios

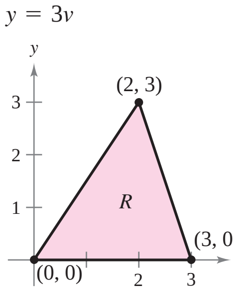
En los ejercicios 1 a 8, hallar el jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ para el cambio de variables indicado.

1. $x = -\frac{1}{2}(u - v),\ y = \frac{1}{2}(u + v)$
2. $x = au + bv,\ y = cu + dv$
3. $x = u - v^2,\ y = u + v$
4. $x = uv - 2u,\ y = uv$
5. $x = u \cos\theta - v \operatorname{sen}\theta,\ y = u \operatorname{sen}\theta + v\cos\theta$
6. $x = u + a,\ y = v + a$
7. $x = e^u \operatorname{sen} v,\ y = e^u \cos v$
8. $x = \dfrac{u}{v},\ y = u + v$

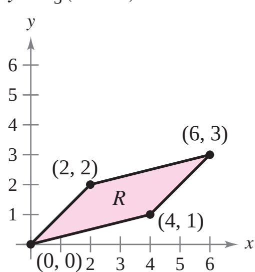
En los ejercicios 9 a 12, dibujar la imagen S en el plano uv de la región R en el plano xy utilizando las transformaciones dadas.



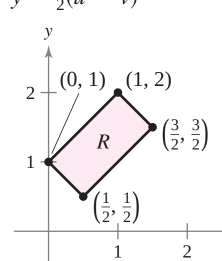
9. $x = 3u + 2v$
   $y = 3v$



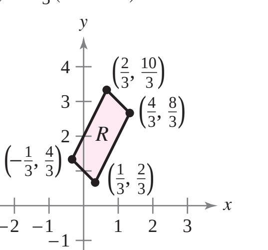
10. $x = \frac{1}{3}(4u - v)$
    $y = \frac{1}{3}(u - v)$



11. $x = \frac{1}{2}(u + v)$
    $y = \frac{1}{2}(u - v)$



12. $x = \frac{1}{3}(v - u)$
    $y = \frac{1}{3}(2v + u)$



CAS **En los ejercicios 13 y 14, verificar el resultado del ejemplo indicado por establecer la integral usando $dy\,dx$ o $dx\,dy$ para dA. Después, usar un sistema algebraico por computadora para evaluar la integral.**

13. Ejemplo 3
14. Ejemplo 4

En los ejercicios 15 a 20, utilizar el cambio de variables indicado para hallar la integral doble.

15. $\displaystyle\int_R\!\!\int 4(x^2 + y^2)\,dA$
    $x = \frac{1}{2}(u + v)$
    $y = \frac{1}{2}(u - v)$

16. $\displaystyle\int_R\!\!\int 60xy\,dA$
    $x = \frac{1}{2}(u + v)$
    $y = -\frac{1}{2}(u - v)$

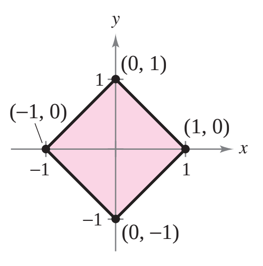


Figura para 15

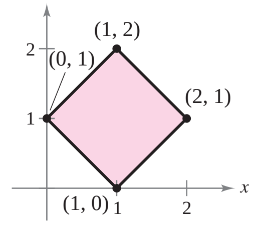
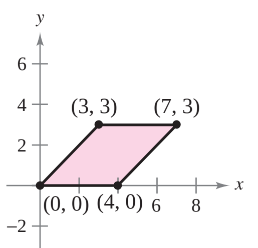
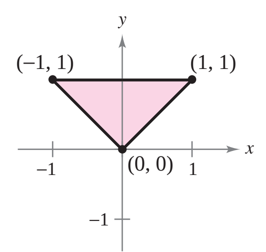


Figura para 16

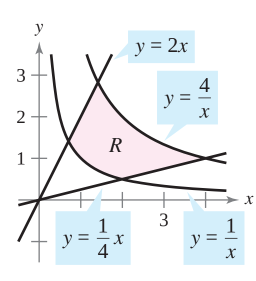
17. $\displaystyle\int_R\!\!\int y(x - y)\,dA$
    $x = u + v$
    $y = u$

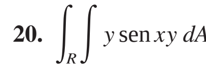


18. $\displaystyle\int_R\!\!\int 4(x + y)e^{x-y}\,dA$
    $x = \frac{1}{2}(u + v)$
    $y = \frac{1}{2}(u - v)$

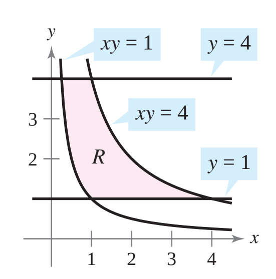


19. $\displaystyle\int_R\!\!\int e^{-xy/2}\,dA$
    $x = \sqrt{\dfrac{v}{u}},\ y = \sqrt{uv}$





20. $\displaystyle\int_R\!\!\int y \operatorname{sen} xy\,dA$
    $x = \dfrac{u}{v},\quad y = v$



En los ejercicios 21 a 28, utilizar un cambio de variables para hallar el volumen de la región sólida que se encuentra bajo la superficie $z = f(x, y)$ y sobre la región plana R.

21. $f(x, y) = 48xy$
    R: región limitada por el cuadrado con vértices $(1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 1)$

22. $f(x, y) = (3x + 2y)^2\sqrt{2y - x}$
    R: región limitada por el paralelogramo con vértices $(0, 0), (-2, 3), (2, 5), (4, 2)$

23. $f(x, y) = (x + y)e^{x-y}$
    R: región acotada por el cuadrado cuyos vértices son $(4, 0), (6, 2), (4, 4), (2, 2)$

24. $f(x, y) = (x + y)^2 \operatorname{sen}^2(x - y)$

R: región acotada por el cuadrado cuyos vértices son $(\pi, 0)$, $(3\pi/2, \pi/2)$, (π, π), $(\pi/2, \pi/2)$

25. $f(x, y) = \sqrt{(x - y)(x + 4y)}$

R: región acotada por el paralelogramo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(5, 0)$, $(4, -1)$

26. $f(x, y) = (3x + 2y)(2y - x)^{3/2}$

R: región acotada por el paralelogramo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(-2, 3)$, $(2, 5)$, $(4, 2)$

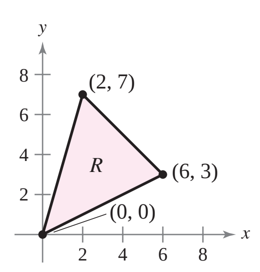
27. $f(x, y) = \sqrt{x + y}$

R: región acotada por el triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, a)$, donde $a > 0$

28. $f(x, y) = \dfrac{xy}{1 + x^2y^2}$

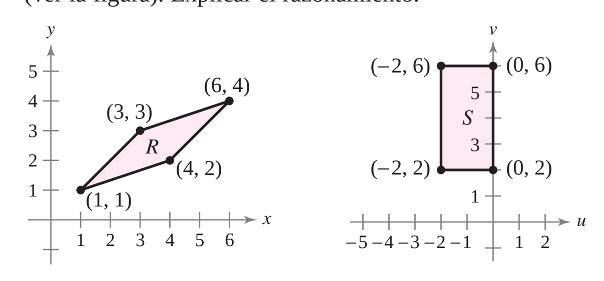
R: región acotada por las gráficas de $xy = 1$, $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$ (*Sugerencia:* Hacer $x = u$, $y = v/u$.)

29. La sustitución $u = 2x - y$ y $v = x + y$ hacen la región R (ver la figura) en una simple región S en el plano uv. Determinar el número total de lados de S que son paralelos a cualquiera de los ejes u o v.



Para discusión

30. Encontrar una transformación $T(u, v) = (x, y) = (g(u, v), h(u, v))$ que al aplicar a la región R resultará en la imagen S (ver la figura). Explicar el razonamiento.



31. Considerar la región R en el plano xy acotada por la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y las transformaciones $x = au$ y $y = bv$.

a) Dibujar la gráfica de la región R y su imagen S bajo la transformación dada.

b) Hallar $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$.

c) Hallar el área de la elipse.

32. Utilizar el resultado del ejercicio 31 para hallar el volumen de cada uno de los sólidos abovedados que se encuentra bajo la superficie $z = f(x, y)$ y sobre la región elíptica R. (*Sugerencia:* Después de hacer el cambio de variables dado por los resultados del ejercicio 31, hacer un segundo cambio de variables a coordenadas polares.)

a) $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$

R: $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} \leq 1$

b) $f(x, y) = A \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}}\right)$

R: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$

Desarrollo de conceptos

33. Enunciar la definición de jacobiano.

34. Describir cómo usar el jacobiano para hacer un cambio de variables en integrales dobles.

En los ejercicios 35 a 40, hallar el jacobiano $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$ para el cambio de variables indicado. Si $x = f(u, v, w)$, $y = g(u, v, w)$ y $z = h(u, v, w)$, entonces el jacobiano de x, y y z con respecto a u, v y w es

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

35. $x = u(1 - v)$, $y = uv(1 - w)$, $z = uvw$

36. $x = 4u - v$, $y = 4v - w$, $z = u + w$

37. $x = \frac{1}{2}(u + v)$, $y = \frac{1}{2}(u - v)$, $z = 2uvw$

38. $x = u - v + w$, $y = 2uv$, $z = u + v + w$

39. ***Coordenadas esféricas***

$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta$, $y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$, $z = \rho \cos \phi$

40. ***Coordenadas cilíndricas***

$x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$, $z = z$

Preparación del examen Putnam

41. Sea A el área de la región del primer cuadrante acotada por la recta $y = \frac{1}{2}x$, el eje x y la elipse $\frac{1}{9}x^2 + y^2 = 1$. Hallar el número positivo m tal que A es igual al área de la región del primer cuadrante acotada por la recta $y = mx$, el eje y y la elipse $\frac{1}{9}x^2 + y^2 = 1$.

14 Ejercicios de repaso

En los ejercicios 1 y 2, evaluar la integral.

1. $\displaystyle\int_1^{x^2} x \ln y \, dy$

2. $\displaystyle\int_y^{2y} (x^2 + y^2)\, dx$

En los ejercicios 3 a 6, trazar la región de integración. Después, evaluar la integral iterada. Cambiar el sistema de coordenadas cuando sea conveniente.

3. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1+x} (3x + 2y)\, dy\, dx$

4. $\displaystyle\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + 2y)\, dy\, dx$

5. $\displaystyle\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} 4x\, dy\, dx$

6. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} dx\, dy$

Área **En los ejercicios 7 a 14, dar los límites para la integral doble**

$$\int_R\int f(x, y)\, dA$$

para ambos órdenes de integración. Calcular el área de R haciendo $f(x, y) = 1$ e integrando.

7. Triángulo: vértices $(0, 0), (3, 0), (0, 1)$

8. Triángulo: vértices $(0, 0), (3, 0), (2, 2)$

9. El área mayor entre las gráficas de $x^2 + y^2 = 25$ y $x = 3$

10. Región acotada por las gráficas de $y = 6x - x^2$ y $y = x^2 - 2x$

11. Región encerrada por la gráfica de $y^2 = x^2 - x^4$

12. Región acotada por las gráficas de $x = y^2 + 1$, $x = 0$, $y = 0$ y $y = 2$

13. Región acotada por las gráficas de $x = y + 3$ y $x = y^2 + 1$

14. Región acotada por las gráficas de $x = -y$ y $x = 2y - y^2$

Para pensar **En los ejercicios 15 y 16, dar un argumento geométrico para la igualdad dada. Verificar la igualdad analíticamente.**

15. $\displaystyle\int_0^1 \int_{2y}^{2\sqrt{2-y^2}} (x + y)\, dx\, dy = \int_0^2 \int_0^{x/2} (x + y)\, dy\, dx + \int_2^{2\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{8-x^2}/2} (x + y)\, dy\, dx$

16. $\displaystyle\int_0^2 \int_{3y/2}^{5-y} e^{x+y}\, dx\, dy = \int_0^3 \int_0^{2x/3} e^{x+y}\, dy\, dx + \int_3^5 \int_0^{5-x} e^{x+y}\, dy\, dx$

Volumen **En los ejercicios 17 y 18, utilizar una integral múltiple y un sistema de coordenadas adecuado para hallar el volumen del sólido.**

17. Sólido acotado por las gráficas de $z = x^2 - y + 4$, $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 4$

18. Sólido acotado por las gráficas de $z = x + y$, $z = 0$, $x = 0$, $x = 3$ y $y = x$

Valor promedio **En los ejercicios 19 y 20, encontrar el promedio de $f(x, y)$ sobre la región R.**

19. $f(x) = 16 - x^2 - y^2$

R: rectángulo con vértices $(2, 2), (-2, 2), (-2, -2), (2, -2)$

20. $f(x) = 2x^2 + y^2$

R: cuadrado con vértices $(0, 0), (3, 0), (3, 3), (0, 3)$

21. ***Temperatura promedio*** La temperatura en grados Celsius sobre la superficie de una placa metálica es

$T(x, y) = 40 - 6x^2 - y^2$

donde x y y están medidos en centímetros. Estimar la temperatura promedio si x varía entre 0 y 3 centímetros y y varía entre 0 y 5 centímetros.

CAS **22.** ***Ganancia promedio*** La ganancia para la empresa P gracias al marketing de dos bebidas dietéticas es

$P = 192x + 576y - x^2 - 5y^2 - 2xy - 5\,000$

donde x y y representan el número de unidades de las dos bebidas dietéticas. Usar un sistema algebraico por computadora para evaluar la doble integral alcanzando la ganancia promedio semanal si x varía entre 40 y 50 unidades y y varía entre 45 y 60 unidades.

Probabilidad **En los ejercicios 23 y 24, hallar k tal que la función sea una función de densidad conjunta y hallar la probabilidad requerida, donde**

$$P(a \le x \le b, c \le y \le d) = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy.$$

23. $f(x, y) = \begin{cases} kxye^{-(x+y)}, & x \ge 0, y \ge 0 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$

$P(0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1)$

24. $f(x, y) = \begin{cases} kxy, & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$

$P(0 \le x \le 0.5, 0 \le y \le 0.25)$

Aproximación **En los ejercicios 25 y 26, determinar qué valor se aproxima mejor al volumen del sólido entre el plano *xy* y la función sobre la región. (Hacer la elección a la vista de un dibujo del sólido y *no* realizando cálculo alguno.)**

25. $f(x, y) = x + y$

R: triángulo con vértices $(0, 0), (3, 0), (3, 3)$

a) $\frac{9}{2}$ *b)* 5 *c)* 13 *d)* 100 *e)* -100

26. $f(x, y) = 10x^2y^2$

R: círculo limitado o acotado por $x^2 + y^2 = 1$

a) π *b)* -15 *c)* $\frac{2}{3}$ *d)* 3 *e)* 15

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 27 a 30, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.**

27. $\int_a^b \int_c^d f(x)g(y)\,dy\,dx = \left[\int_a^b f(x)\,dx\right]\left[\int_c^d g(y)\,dy\right]$

28. Si f es continua sobre R_1 y R_2, y

$$\int_{R_1}\int dA = \int_{R_2}\int dA$$

entonces

$$\int_{R_1}\int f(x, y)\,dA = \int_{R_2}\int f(x, y)\,dA.$$

29. $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \cos(x^2 + y^2)\,dx\,dy = 4\int_0^1\int_0^1 \cos(x^2 + y^2)\,dx\,dy$

30. $\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2 + y^2}\,dx\,dy < \frac{\pi}{4}$

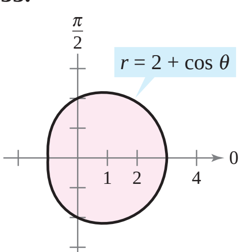
En los ejercicios 31 y 32, evaluar la integral iterada convirtiendo a coordenadas polares.

31. $\int_0^h\int_0^x \sqrt{x^2 + y^2}\,dy\,dx$

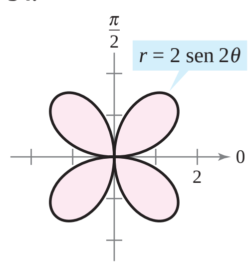
32. $\int_0^4\int_0^{\sqrt{16-y^2}} (x^2 + y^2)\,dx\,dy$

Área **En los ejercicios 33 y 34, usar la doble integral para encontrar el área en la región sombreada.**

33.



34.



Volumen **En los ejercicios 35 y 36, utilizar una integral múltiple y un sistema de coordenadas adecuado para hallar el volumen del sólido.**

35. Sólido limitado o acotado por las gráficas de $z = 0$ y $z = h$, exterior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e interior al hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

36. Sólido restante después de perforar un orificio de radio b a través del centro de una esfera de radio R $(b < R)$

37. Considerar la región R en el plano xy limitada o acotada por la gráfica de la ecuación

$(x^2 + y^2)^2 = 9(x^2 - y^2)$.

a) Convertir la ecuación a coordenadas polares. Utilizar una herramienta de graficación para representar la ecuación.

b) Utilizar una integral doble para hallar el área de la región R.

CAS *c*) Utilizar un sistema algebraico por computadora y determinar el volumen del sólido sobre la región R y bajo el hemisferio $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

38. Combinar la suma de las dos integrales iteradas en una sola integral iterada convirtiendo a coordenadas polares. Evaluar la integral iterada resultante.

$$\int_0^{8/\sqrt{13}}\int_0^{3x/2} xy\,dy\,dx + \int_{8/\sqrt{13}}^{4}\int_0^{\sqrt{16-x^2}} xy\,dy\,dx$$

CAS ***Masa y centro de masa*** **En los ejercicios 39 y 40, hallar la masa y el centro de masa de la lámina limitada o acotada por las gráficas de las ecuaciones con la densidad o densidades dadas. Utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar las integrales múltiples.**

39. $y = 2x$, $y = 2x^3$, primer cuadrante

a) $\rho = kxy$ *b*) $\rho = k(x^2 + y^2)$

40. $y = \frac{h}{2}\left(2 - \frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2}\right)$, $\rho = k$, primer cuadrante

CAS **En los ejercicios 41 y 42, hallar I_x, I_y, I_0, $\bar{\bar{x}}$ y $\bar{\bar{y}}$ para la lámina limitada o acotada por las gráficas de las ecuaciones. Utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar las integrales dobles.**

41. $y = 0$, $y = b$, $x = 0$, $x = a$, $\rho = kx$

42. $y = 4 - x^2$, $y = 0$, $x > 0$, $\rho = ky$

Área de una superficie **En los ejercicios 43 a 46, hallar el área de la superficie dada por $z = f(x, y)$ sobre la región R.**

43. $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$

$R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 25\}$

CAS **44.** $f(x, y) = 16 - x - y^2$

$R = \{(x, y):\ 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x\}$

Utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar la integral.

45. $f(x, y) = 9 - y^2$

R: triángulo limitado por las gráficas de las ecuaciones $y = x$, $y = -x$ y $y = 3$.

46. $f(x, y) = 4 - x^2$

R: triángulo limitado por las gráficas de las ecuaciones $y = x$, $y = -x$ y $y = 2$.

47. ***Proyectar construcción*** Un nuevo auditorio es construido con un cimiento en forma de un cuarto de un círculo de 50 pies de radio. Así, se forma una región R limitada por la gráfica de

$x^2 + y^2 = 50^2$

con $x \geq 0$ y $y \geq 0$. Las siguientes ecuaciones son modelos para el piso y el techo.

Piso: $z = \frac{x + y}{5}$

Techo: $z = 20 + \frac{xy}{100}$

a) Calcular el volumen del cuarto, el cual es necesario para determinar los requisitos de calor y enfriamiento.

b) Encontrar el área de superficie del techo.

CAS **48.** ***Área de una superficie*** El techo del escenario de un teatro al aire libre en un parque se modela por

$$f(x, y) = 25\left[1 + e^{-(x^2+y^2)/1\,000}\cos^2\left(\frac{x^2 + y^2}{1\,000}\right)\right]$$

donde el escenario es un semicírculo limitado o acotado por las gráficas de $y = \sqrt{50^2 - x^2}$ y $y = 0$.

a) Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la superficie.

b) Utilizar un sistema algebraico por computadora y aproximar la cantidad de pies cuadrados de techo requeridos para cubrir la superficie.

En los ejercicios 49 a 52, evaluar la integral iterada.

49. $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{9}\sqrt{x^2 + y^2}\,dz\,dy\,dx$

50. $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{(x^2+y^2)/2}(x^2 + y^2)\,dz\,dy\,dx$

51. $\displaystyle\int_{0}^{a}\int_{0}^{b}\int_{0}^{c}(x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz$

52. $\displaystyle\int_{0}^{5}\int_{0}^{\sqrt{25-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{25-x^2-y^2}}\frac{1}{1 + x^2 + y^2 + z^2}\,dz\,dy\,dx$

CAS **En los ejercicios 53 y 54, utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar la integral iterada.**

53. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}(x^2 + y^2)\,dz\,dy\,dx$

54. $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2-y^2}}xyz\,dz\,dy\,dx$

Volumen **En los ejercicios 55 y 56, utilizar una integral múltiple para calcular el volumen del sólido.**

55. El sólido interior a las gráficas de $r = 2\cos\theta$ y $r^2 + z^2 = 4$

56. El sólido interior a las gráficas de $r^2 + z = 16$, $z = 0$ y $r = 2\operatorname{sen}\theta$

Centro de masa **En los ejercicios 57 a 60, hallar el centro de masa del sólido de densidad uniforme limitado o acotado por las gráficas de las ecuaciones.**

57. El sólido interior al hemisferio $\rho = \cos\phi$, $\pi/4 \le \phi \le \pi/2$, y exterior al cono $\phi = \pi/4$

58. La cuña: $x^2 + y^2 = a^2$, $z = cy\,(c > 0)$, $y \ge 0$, $z \ge 0$

59. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, primer octante

60. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $z = 4$ (el sólido mayor)

Momento de inercia **En los ejercicios 61 y 62, hallar el momento de inercia I_z del sólido de densidad dada.**

61. El sólido de densidad uniforme interior al paraboloide $z = 16 - x^2 - y^2$, y exterior al cilindro $x^2 + y^2 = 9$, $z \ge 0$.

62. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, densidad proporcional a la distancia al centro

63. ***Investigación*** Considerar un segmento esférico de altura h de una esfera de radio a, donde $h \le a$ y de densidad constante $\rho(x, y, z) = k$ (ver la figura).



a) Hallar el volumen del sólido.

b) Hallar el centroide del sólido.

c) Utilizar el resultado del inciso *b*) para localizar el centroide de un hemisferio de radio a.

d) Hallar $\lim_{h\to 0} \bar{z}$.

e) Hallar I_z.

f) Utilizar el resultado del inciso *e*) para hallar I_z para un hemisferio.

64. ***Momento de inercia*** Hallar el momento de inercia con respecto al eje z del elipsoide $x^2 + y^2 + \dfrac{z^2}{a^2} = 1$, donde $a > 0$.

En los ejercicios 65 y 66, dar una interpretación geométrica de la integral iterada.

65. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{6\operatorname{sen}\phi}\rho^2\operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

66. $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{2}\int_{0}^{1+r^2}r\,dz\,dr\,d\theta$

En los ejercicios 67 y 68, hallar el jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ para el cambio de variables indicado.

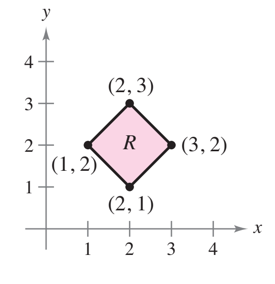
67. $x = u + 3v$, $y = 2u - 3v$

68. $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$

En los ejercicios 69 y 70, utilizar el cambio de variables indicado para evaluar la integral doble.

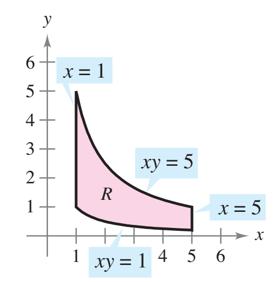
69. $\displaystyle\int_R\int \ln(x + y)\,dA$

$x = \frac{1}{2}(u + v)$, $y = \frac{1}{2}(u - v)$



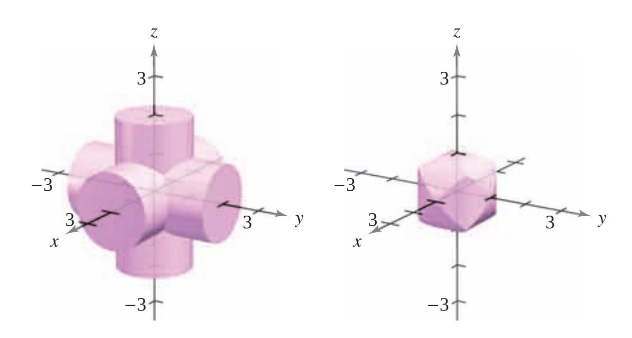
70. $\displaystyle\int_R\int \frac{x}{1 + x^2y^2}\,dA$

$x = u$, $y = \dfrac{v}{u}$



SP Solución de problemas

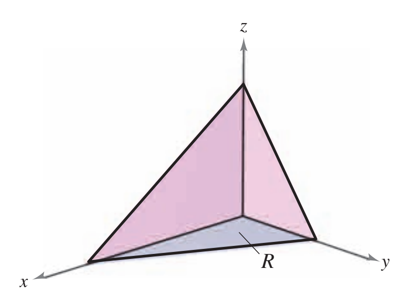
1. Hallar el volumen del sólido de intersección de los tres cilindros $x^2 + z^2 = 1$, $y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 1$ (ver la figura).



2. Sean a, b, c y d números reales positivos. El primer octante del plano $ax + by + cz = d$ se muestra en la figura. Mostrar que el área de la superficie de esta porción del plano es igual a

$$\frac{A(R)}{c}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

donde $A(R)$ es el área de la región triangular R en el plano xy, como se muestra en la figura.



3. Deducir el famoso resultado de Euler que se menciona en la sección 9.3, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, completando cada uno de los pasos.

a) Demostrar que

$$\int \frac{dv}{2 - u^2 + v^2} = \frac{1}{\sqrt{2 - u^2}}\arctan\frac{v}{\sqrt{2 - u^2}} + C.$$

b) Demostrar que $I_1 = \displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2}\int_{-u}^{u}\frac{2}{2 - u^2 + v^2}\,dv\,du = \frac{\pi^2}{18}$

utilizando la sustitución $u = \sqrt{2}\,\text{sen}\,\theta$.

c) Demostrar que

$$I_2 = \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}}\int_{u-\sqrt{2}}^{-u+\sqrt{2}}\frac{2}{2 - u^2 + v^2}\,dv\,du$$

$$= 4\int_{\pi/6}^{\pi/2}\arctan\frac{1 - \text{sen}\,\theta}{\cos\theta}\,d\theta$$

utilizando la sustitución $u = \sqrt{2}\,\text{sen}\,\theta$.

d) Demostrar la identidad trigonométrica

$$\frac{1 - \text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \tan\left(\frac{(\pi/2) - \theta}{2}\right).$$

e) Demostrar que $I_2 = \displaystyle\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}}\int_{u-\sqrt{2}}^{-u+\sqrt{2}}\frac{2}{2 - u^2 + v^2}\,dv\,du = \frac{\pi^2}{9}$.

f) Utilizar la fórmula para la suma de una serie geométrica infinita para verificar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \int_0^1\int_0^1\frac{1}{1 - xy}\,dx\,dy$.

g) Utilizar el cambio de variables $u = \dfrac{x + y}{\sqrt{2}}$ y $v = \dfrac{y - x}{\sqrt{2}}$ para demostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \int_0^1\int_0^1\frac{1}{1 - xy}\,dx\,dy = I_1 + I_2 = \frac{\pi^2}{6}$.

4. Considerar un césped circular de 10 pies de radio, como se muestra en la figura. Supóngase que un rociador distribuye agua de manera radial de acuerdo con la fórmula

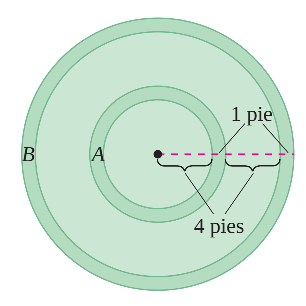
$$f(r) = \frac{r}{16} - \frac{r^2}{160}$$

(medido en pies cúbicos de agua por hora por pie cuadrado de césped), donde r es la distancia en pies al rociador. Hallar la cantidad de agua que se distribuye en 1 hora en las dos regiones anulares siguientes.

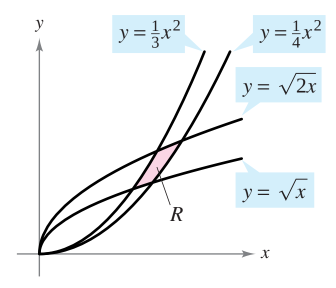
$A = \{(r, \theta): 4 \leq r \leq 5, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

$B = \{(r, \theta): 9 \leq r \leq 10, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

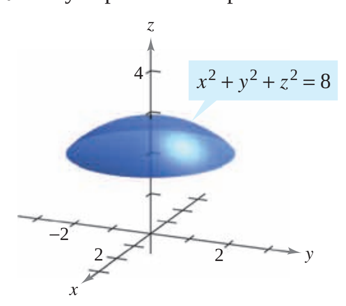
¿Es uniforme la distribución del agua? Determinar la cantidad de agua que recibe todo el césped en 1 hora.



5. La figura muestra la región R limitada o acotada por las curvas $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{2x}$, $y = \dfrac{x^2}{3}$ y $y = \dfrac{x^2}{4}$. Utilizar el cambio de variables $x = u^{1/3}v^{2/3}$ y $y = u^{2/3}v^{1/3}$ para hallar el área de la región R.



6. La figura muestra un sólido acotado inferiormente por el plano $z = 2$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 8$.



a) Hallar el volumen del sólido utilizando coordenadas cilíndricas.

b) Hallar el volumen del sólido utilizando coordenadas esféricas.

7. Dibujar el sólido cuyo volumen está dado por la suma de las integrales iteradas

$$\int_0^6 \int_{z/2}^3 \int_{z/2}^y dx\,dy\,dz + \int_0^6 \int_3^{(12-z)/2} \int_{z/2}^{6-y} dx\,dy\,dz.$$

Después, expresar el volumen mediante una integral iterada simple con el orden $dy\,dz\,dx$.

8. Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \int_0^1 x^n y^n\,dx\,dy = 0.$

En los ejercicios 9 y 10, evaluar la integral. (*Sugerencia:* Ver el ejercicio 69 de la sección 14.3.)

9. $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2}\,dx$

10. $\int_0^1 \sqrt{\ln \frac{1}{x}}\,dx$

11. Considerar la función

$$f(x, y) = \begin{cases} ke^{-(x+y)/a}, & x \ge 0,\ y \ge 0 \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Hallar la relación entre las constantes positivas a y k de manera que f sea una función de densidad conjunta de las variables aleatorias continuas x y y.

12. Encontrar el volumen del sólido generado al girar la región en el primer cuadrante limitado por $y = e^{-x^2}$ alrededor del eje y. Usar este resultado para encontrar

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

13. De 1963 a 1986, el volumen del lago Great Salt se triplicó, mientras que el área de su superficie superior se duplicó. Leer el artículo “Relations between Surface Area and Volume in Lakes” de Daniel Cass y Gerald Wildenberg en *The College Mathematics Journal*. Después, proporcionar ejemplos de sólidos que tengan “niveles de agua” a y b tales que $V(b) = 3V(a)$ y $A(b) = 2A(a)$ (ver la figura), donde V es el volumen y A es el área.

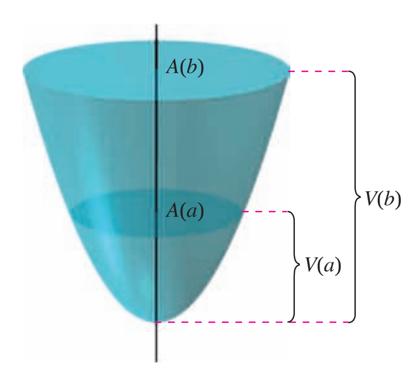
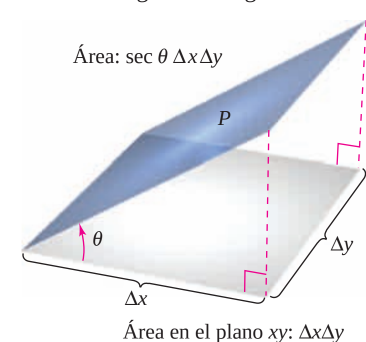


Figura para 13

14. El ángulo entre un plano P y el plano xy es θ, donde $0 \le \theta < \pi/2$. La proyección de una región rectangular en P sobre el plano xy es un rectángulo en el que las longitudes de sus lados son Δx y Δy, como se muestra en la figura. Demostrar que el área de la región rectangular en P es $\sec\theta\,\Delta x\,\Delta y$.



15. Utilizar el resultado del ejercicio 14 para ordenar los planos, en orden creciente de sus áreas de superficie, en una región fija R del plano xy. Explicar el orden elegido sin hacer ningún cálculo.

a) $z_1 = 2 + x$

b) $z_2 = 5$

c) $z_3 = 10 - 5x + 9y$

d) $z_4 = 3 + x - 2y$

16. Evaluar la integral $\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2}\,dx\,dy.$

17. Evaluar las integrales

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3}\,dx\,dy \quad \text{y} \quad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3}\,dy\,dx.$$

¿Son iguales los resultados? ¿Por qué sí o por qué no?

18. Mostrar que el volumen de un bloque esférico puede ser aproximado por

$$\Delta V \approx \rho^2 \operatorname{sen}\phi\,\Delta\rho\,\Delta\phi\,\Delta\theta.$$



15 Análisis vectorial

En este capítulo se estudiarán los campos vectoriales, integrales de línea e integrales de superficie. Se aprenderá a usarlos para determinar cantidades en la vida real, como el área de una superficie, masa, flujo, trabajo y energía.

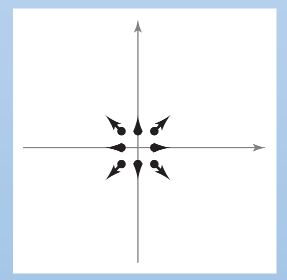
En este capítulo, se aprenderá:

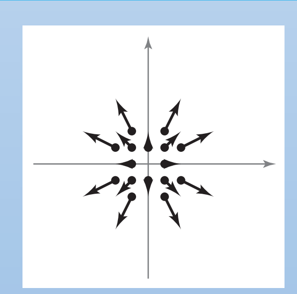
- Cómo dibujar un campo vectorial, determinar si es conservativo, encontrar una función de potencial, el rotacional y la divergencia. (15.1)
- Cómo encontrar una parametrización continua por secciones, escribir y evaluar una integral de línea y utilizar el teorema de Green. (15.2, 15.4)
- Cómo usar el teorema fundamental de las integrales de línea, la independencia de la trayectoria y la conservación de energía. (15.3)
- Cómo dibujar una superficie paramétrica, encontrar un conjunto de ecuaciones paramétricas para representar una superficie, determinar un vector normal, un plano tangente y el área de una superficie paramétrica. (15.5)
- Cómo evaluar una integral de superficie, determinar la orientación de una superficie, evaluar una integral de flujo y usar el teorema de la divergencia. (15.6, 15.7)
- Cómo utilizar el teorema de Stokes para evaluar una integral de línea o superficie y cómo usar el rotacional para analizar el movimiento de un líquido que gira. (15.8)

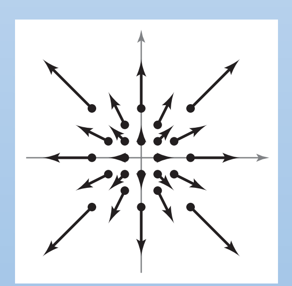


NASA

Mientras esperan el despegue en tierra, los astronautas del transbordador espacial tienen acceso a un sistema alámbrico de canasta y tobogán diseñado para transportarlos lo más lejos posible del transbordador en una situación de emergencia. ¿La cantidad de trabajo realizado por el campo de fuerza gravitacional varía para diferentes trayectorias entre dos puntos fijos del tobogán alámbrico? (Ver la sección 15.3, ejercicio 39.)







En el capítulo 15 se combinará el conocimiento de vectores con el del cálculo integral. La sección 15.1 introduce *campos vectoriales*, como los que se muestran arriba. Ejemplos de campos vectoriales incluyen campos de velocidad, campos electromagnéticos y campos gravitacionales.

15.1 Campos vectoriales

- **Comprender el concepto de un campo vectorial.**
- **Determinar si un campo vectorial es conservativo.**
- **Calcular el rotacional de un campo vectorial.**
- **Calcular la divergencia de un campo vectorial.**

Campos vectoriales

En el capítulo 12 se estudiaron funciones vectoriales que asignan un vector a un *número real*. Se comprobó que las funciones vectoriales de números reales son útiles para representar curvas y movimientos a lo largo de una curva. En este capítulo se estudiarán otros dos tipos de funciones vectoriales que asignan un vector a un *punto en el plano* o a un *punto en el espacio*. Tales funciones se llaman **campos vectoriales** (**campos de vectores**), y son útiles para representar varios tipos de **campos de fuerza** y **campos de velocidades**.

DEFINICIÓN DE UN CAMPO VECTORIAL

Un **campo vectorial sobre una región plana *R*** es una función **F** que asigna un vector $\mathbf{F}(x, y)$ a cada punto en R.

Un **campo vectorial sobre una región sólida *Q* en el espacio** es una función **F** que asigna un vector $\mathbf{F}(x, y, z)$ a cada punto en Q.

NOTA Aunque un campo vectorial está constituido por infinitos vectores, se puede obtener una idea aproximada de su estructura dibujando varios vectores representativos $\mathbf{F}(x, y)$, cuyos puntos iniciales son (x, y). ■

El *gradiente* es un ejemplo de un campo vectorial. Por ejemplo, si

$$f(x, y) = x^2y + 3xy^3$$

entonces el gradiente de f

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}\\ &= (2xy + 3y^3)\mathbf{i} + (x^2 + 9xy^2)\mathbf{j}\end{aligned}$$

Campo vectorial en el plano.

es un campo vectorial en el plano. Del capítulo 13, la interpretación gráfica de este campo es una familia de vectores cada uno de los cuales apunta en la dirección de máximo crecimiento a lo largo de la superficie dada por $z = f(x, y)$.

De manera similar, si

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

entonces el gradiente de f

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k}\\ &= 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}\end{aligned}$$

Campo vectorial en el espacio.

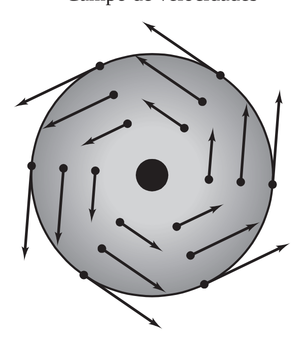
es un campo vectorial en el espacio. Notar que las funciones componentes para este campo vectorial particular son $2x$, $2y$ y $2z$.

Un campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$$

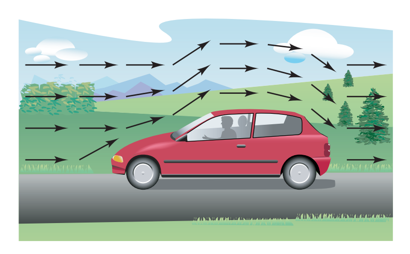
es **continuo** en un punto si y sólo si cada una de sus funciones componentes M, N y P es continua en ese punto.

Algunos ejemplos *físicos* comunes de campos vectoriales son los **campos de velocidades**, los **gravitatorios** y los **de fuerzas eléctricas**.



Rueda rotante
Figura 15.1

1. Un *campo de velocidades* describe el movimiento de un sistema de partículas en el plano o en el espacio. Por ejemplo, la figura 15.1 muestra el campo vectorial determinado por una rueda que gira en un eje. Los vectores velocidad los determina la localización de sus puntos iniciales: cuanto más lejano está un punto del eje, mayor es su velocidad. Otros campos de velocidad están determinados por el flujo de líquidos a través de un recipiente o por el flujo de corrientes aéreas alrededor de un objeto móvil, como se muestra en la figura 15.2.



Campo vectorial de flujo del aire
Figura 15.2

2. Los *campos gravitatorios* los define la **ley de la gravitación de Newton**, que establece que la fuerza de atracción ejercida en una partícula de masa m_1 localizada en (x, y, z) por una partícula de masa m_2 localizada en $(0, 0, 0)$ está dada por

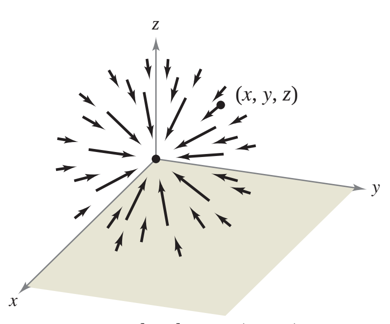
$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-Gm_1m_2}{x^2 + y^2 + z^2}\mathbf{u}$$

donde G es la constante gravitatoria y $\mathbf{u}$ es el vector unitario en la dirección del origen a (x, y, z). En la figura 15.3 se puede ver que el campo gravitatorio $\mathbf{F}$ tiene las propiedades de que todo vector $\mathbf{F}(x, y, z)$ apunta hacia el origen, y que la magnitud de $\mathbf{F}(x, y, z)$ es la misma en todos los puntos equidistantes del origen. Un campo vectorial con estas dos propiedades se llama un **campo de fuerzas central**. Utilizando el vector posición

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

para el punto (x, y, z), se puede expresar el campo gravitatorio $\mathbf{F}$ como

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-Gm_1m_2}{\|\mathbf{r}\|^2}\left(\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}\right) = \frac{-Gm_1m_2}{\|\mathbf{r}\|^2}\mathbf{u}.$$



Campo de fuerzas gravitatorio
Figura 15.3

3. Los *campos de fuerzas eléctricas* se definen por la **ley de Coulomb**, que establece que la fuerza ejercida en una partícula con carga eléctrica q_1 localizada en (x, y, z) por una partícula con carga eléctrica q_2 localizada en $(0, 0, 0)$ está dada por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{cq_1q_2}{\|\mathbf{r}\|^2}\mathbf{u}$$

donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $\mathbf{u} = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$, y c es una constante que depende de la elección de unidades para $\|\mathbf{r}\|$, q_1 y q_2.

Nótese que un campo de fuerzas eléctricas tiene la misma forma que un campo gravitatorio. Es decir,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{k}{\|\mathbf{r}\|^2}\mathbf{u}.$$

Tal campo de fuerzas se llama un **campo cuadrático inverso**.

DEFINICIÓN DE CAMPO CUADRÁTICO INVERSO

Sea $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ un vector posición. El campo vectorial $\mathbf{F}$ es un **campo cuadrático inverso** si

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{k}{\|\mathbf{r}\|^2}\mathbf{u}$$

donde k es un número real y $\mathbf{u} = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$ es un vector unitario en la dirección de $\mathbf{r}$.

Como los campos vectoriales constan de una cantidad infinita de vectores, no es posible hacer un dibujo de todo el campo completo. En lugar de esto, cuando se esboza un campo vectorial, el objetivo es dibujar vectores representativos que ayuden a visualizar el campo.

EJEMPLO 1 Dibujo de un campo vectorial

Dibujar algunos vectores del campo vectorial dado por

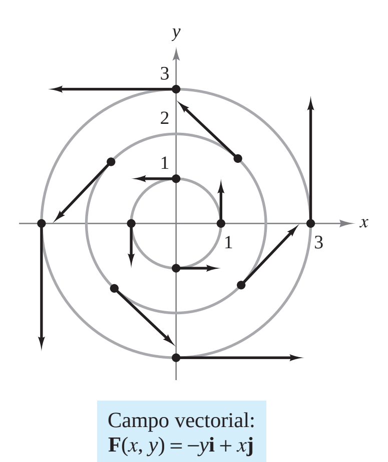
$$\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}.$$

Solución Se podrían trazar los vectores en varios puntos del plano, al azar. Sin embargo, es más ilustrativo trazar vectores de magnitud igual. Esto corresponde a encontrar curvas de nivel en los campos escalares. En este caso, vectores de igual magnitud se encuentran en círculos.

$$\|\mathbf{F}\| = c \qquad \text{Vectores de longitud } c.$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = c$$

$$x^2 + y^2 = c^2 \qquad \text{Ecuación del círculo.}$$



Campo vectorial:
$\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

Figura 15.4

Para empezar a hacer el dibujo, se elige un valor de c y se dibujan varios vectores en la circunferencia resultante. Por ejemplo, los vectores siguientes se encuentran en la circunferencia unitaria.

Punto	*Vector*
$(1, 0)$	$\mathbf{F}(1, 0) = \mathbf{j}$
$(0, 1)$	$\mathbf{F}(0, 1) = -\mathbf{i}$
$(-1, 0)$	$\mathbf{F}(-1, 0) = -\mathbf{j}$
$(0, -1)$	$\mathbf{F}(0, -1) = \mathbf{i}$

En la figura 15.4 se muestran éstos y algunos otros vectores del campo vectorial. Nótese en la figura que este campo vectorial es parecido al dado por la rueda giratoria mostrada en la figura 15.1.

EJEMPLO 2 Dibujo de un campo vectorial

Dibujar algunos vectores en el campo vectorial dado por

$$\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$

Solución Para este campo vectorial, los vectores de igual longitud están sobre las elipses dadas por

$$\|\mathbf{F}\| = \sqrt{(2x)^2 + (y)^2} = c$$

lo cual implica que

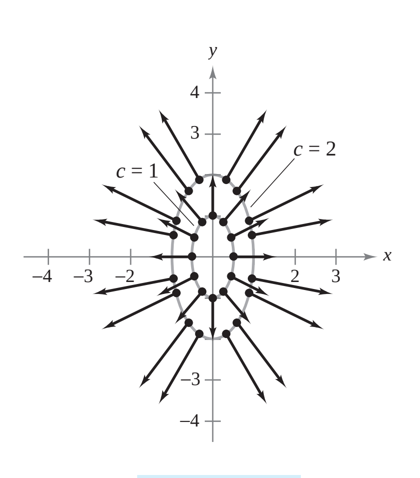
$$4x^2 + y^2 = c^2.$$

Para $c = 1$, dibujar varios vectores $2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ de magnitud 1 en puntos de la elipse dada por

$$4x^2 + y^2 = 1.$$

Para $c = 2$, dibujar varios vectores $2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ de magnitud 2 en puntos de la elipse dada por

$$4x^2 + y^2 = 4.$$



Campo vectorial:
$\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

Figura 15.5

Estos vectores se muestran en la figura 15.5.

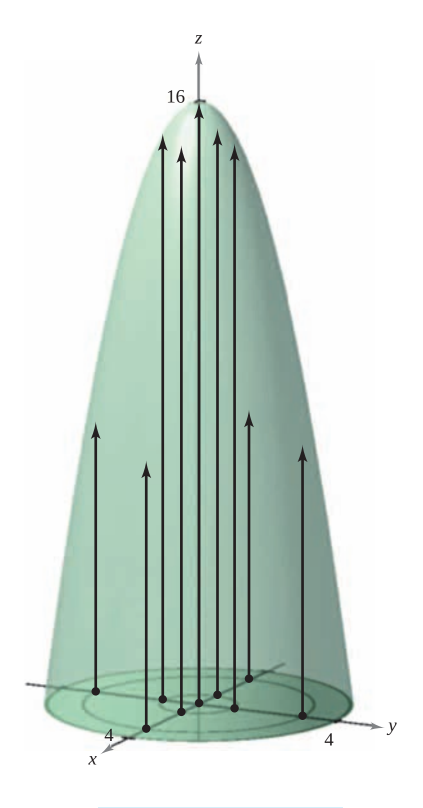
EJEMPLO 3 Esbozo de un campo vectorial

Dibujar algunos vectores en el campo de velocidad dado por

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (16 - x^2 - y^2)\mathbf{k}$$

donde $x^2 + y^2 \leq 16$.

Solución Es válido imaginar que $\mathbf{v}$ describe la velocidad de un fluido a través de un tubo de radio 4. Los vectores próximos al eje z son más largos que aquellos cercanos al borde del tubo. Por ejemplo, en el punto $(0, 0, 0)$, el vector velocidad es $\mathbf{v}(0, 0, 0) = 16\mathbf{k}$, considerando que en el punto $(0, 3, 0)$, el vector velocidad es $\mathbf{v}(0, 3, 0) = 7\mathbf{k}$. La figura 15.6 muestra éstos y varios otros vectores para el campo de velocidades. De la figura, se observa que la velocidad del fluido es mayor en la zona central que en los bordes del tubo.



Campo de velocidades:
$\mathbf{v}(x, y, z) = (16 - x^2 - y^2)\mathbf{k}$

Figura 15.6

Campos vectoriales conservativos

En la figura 15.5 todos los vectores parecen ser normales a la curva de nivel de la que emergen. Porque ésta es una propiedad de los gradientes, es natural preguntar si el campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ es el *gradiente* de alguna función diferenciable f. La respuesta es que algunos campos vectoriales, denominados campos vectoriales **conservativos**, pueden representarse como los gradientes de funciones diferenciables, mientras que algunos otros no pueden.

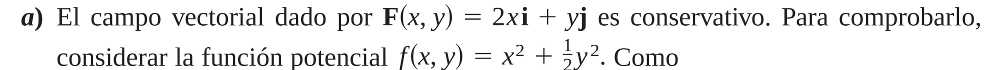


DEFINICIÓN DE CAMPOS VECTORIALES CONSERVATIVOS

Un campo vectorial $\mathbf{F}$ se llama **conservativo** si existe una función diferenciable f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$. La función f se llama **función potencial** para $\mathbf{F}$.



EJEMPLO 4 Campos vectoriales conservativos



a) El campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ es conservativo. Para comprobarlo, considerar la función potencial $f(x, y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2$. Como

$$\nabla f = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = \mathbf{F}$$

se sigue que $\mathbf{F}$ es conservativo.

b) Todo campo cuadrático inverso es conservativo. Para comprobarlo, sea

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{k}{\|\mathbf{r}\|^2}\mathbf{u} \quad \text{y} \quad f(x, y, z) = \frac{-k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

donde $\mathbf{u} = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$. Como

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{kx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{ky}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{j} + \frac{kz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{k} \\ &= \frac{k}{x^2 + y^2 + z^2}\left(\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \\ &= \frac{k}{\|\mathbf{r}\|^2}\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} \\ &= \frac{k}{\|\mathbf{r}\|^2}\mathbf{u}\end{aligned}$$

se deduce que $\mathbf{F}$ es conservativo.

Como puede verse en el ejemplo 4*b*, muchos campos vectoriales importantes, incluyendo campos gravitatorios y de fuerzas eléctricas, son conservativos. Gran parte de la terminología introducida en este capítulo viene de la física. Por ejemplo, el término "conservativo" se deriva de la ley física clásica de la conservación de la energía. Esta ley establece que la suma de la energía cinética y la energía potencial de una partícula que se mueve en un campo de fuerzas conservativo es constante. (La energía cinética de una partícula es la energía debida a su movimiento, y la energía potencial es la energía debida a su posición en el campo de fuerzas.)

El importante teorema siguiente da una condición necesaria y suficiente para que un campo vectorial *en el plano* sea conservativo.

TEOREMA 15.1 CRITERIO PARA CAMPOS VECTORIALES CONSERVATIVOS EN EL PLANO

Sea M y N dos funciones con primeras derivadas parciales continuas en un disco abierto R. El campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ es conservativo si y sólo si

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

DEMOSTRACIÓN Para mostrar que la condición dada es necesaria para que $\mathbf{F}$ sea conservativo, suponer que existe una función potencial f tal que

$$\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}.$$

Entonces se tiene

$$f_x(x, y) = M \quad \Rightarrow \quad f_{xy}(x, y) = \frac{\partial M}{\partial y}$$

$$f_y(x, y) = N \quad \Rightarrow \quad f_{yx}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

y, por la equivalencia de derivadas parciales mixtas f_{xy} y f_{yx}, se puede concluir que $\partial N/\partial x = \partial M/\partial y$ para todo (x, y) en R. Lo suficiente de la condición se muestra en la sección 15.4.

NOTA El teorema 15.1 es válido en dominios *simplemente conexos*. Una región plana R es simplemente conexa si cada curva cerrada simple en R encierra sólo puntos que están en R. Ver la figura 15.26 en la sección 15.4. ■

EJEMPLO 5 Prueba de campos vectoriales conservativos en el plano

Decidir si el campo vectorial dado por $\mathbf{F}$ es conservativo.

a) $\mathbf{F}(x, y) = x^2y\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$ ***b)*** $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

Solución

a) El campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y) = x^2y\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$ no es conservativo porque

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[x^2y] = x^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[xy] = y.$$

b) El campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ es conservativo porque

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[2x] = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[y] = 0.$$

El teorema 15.1 permite decidir si un campo vectorial es o no conservativo. Pero no dice cómo encontrar una función potencial de **F**. El problema es comparable al de la integración indefinida. A veces se puede encontrar una función potencial por simple inspección. Así, en el ejemplo 4 se observa que

$$f(x, y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2$$

tiene la propiedad de que $\nabla f(x, y) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

EJEMPLO 6 Calcular una función potencial para F(*x*, *y*)

Hallar una función potencial para

$$\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 - y)\mathbf{j}.$$

Solución Del teorema 15.1 sigue que **F** es conservativo porque

$$\frac{\partial}{\partial y}[2xy] = 2x \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial x}[x^2 - y] = 2x.$$

Si f es una función cuyo gradiente es igual a $\mathbf{F}(x, y)$, entonces

$$\nabla f(x, y) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 - y)\mathbf{j}$$

lo cual implica que

$$f_x(x, y) = 2xy$$

y

$$f_y(x, y) = x^2 - y.$$

Para reconstruir la función f de estas dos derivadas parciales, se integra $f_x(x, y)$ con respecto a x y $f_y(x, y)$ con respecto a y, como sigue.

$$f(x, y) = \int f_x(x, y)\, dx = \int 2xy\, dx = x^2y + g(y)$$

$$f(x, y) = \int f_y(x, y)\, dy = \int (x^2 - y)\, dy = x^2y - \frac{y^2}{2} + h(x)$$

Nótese que $g(y)$ es constante con respecto a x y $h(x)$ es constante con respecto a y. Para hallar una sola expresión que represente $f(x, y)$, sea

$$g(y) = -\frac{y^2}{2} \quad \text{y} \quad h(x) = K.$$

Entonces, se puede escribir

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2y + g(y) + K \\ &= x^2y - \frac{y^2}{2} + K. \end{aligned}$$

Este resultado se puede verificar formando el gradiente de f. Usted podrá que es igual a la función original **F**.

NOTA La solución en el ejemplo 6 es comparable a la dada por una integral indefinida. Es decir, la solución representa a una familia de funciones potenciales, dos de las cuales difieren por una constante. Para hallar una solución única, se tendría que fijar una condición inicial que deba satisfacer la función potencial. ■

Rotacional de un campo vectorial

El teorema 15.1 tiene un análogo para campos vectoriales en el espacio. Antes de establecer ese resultado, se da la definición del **rotacional de un campo vectorial** en el espacio.

DEFINICIÓN DEL ROTACIONAL DE UN CAMPO VECTORIAL

El rotacional de $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) &= \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

NOTA Si rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces se dice que $\mathbf{F}$ es un **campo irrotacional**. ■

La notación de producto vectorial usada para el rotacional proviene de ver el gradiente ∇f como el resultado del **operador diferencial** ∇ que actúa sobre la función f. En este contexto, se utiliza la siguiente forma de determinante como ayuda mnemotécnica para recordar la fórmula para el rotacional.

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) &= \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}\end{aligned}$$

EJEMPLO 7 Cálculo del rotacional de un campo vectorial

Hallar rot $\mathbf{F}$ para el campo vectorial dado por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 + z^2)\mathbf{j} + 2yz\mathbf{k}.$$

¿Es $\mathbf{F}$ irrotacional?

Solución El rotacional de $\mathbf{F}$ está dado por

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) &= \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2 + z^2 & 2yz \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + z^2 & 2yz \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & 2yz \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ 2xy & x^2 + z^2 \end{vmatrix}\mathbf{k} \\ &= (2z - 2z)\mathbf{i} - (0 - 0)\mathbf{j} + (2x - 2x)\mathbf{k} \\ &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Como rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, $\mathbf{F}$ es irrotacional.

Más adelante, en este capítulo, se asignará una interpretación física al rotacional de un campo vectorial. Pero por ahora, el uso primario del rotacional se muestra en la siguiente prueba para campos vectoriales conservativos en el espacio. El criterio establece que para un campo vectorial cuyo dominio sea todo el espacio tridimensional (o una esfera abierta), el rotacional es **0** en cada punto en el dominio si y sólo si **F** es conservativo. La demostración es similar a la dada para el teorema 15.1.

TEOREMA 15.2 CRITERIO PARA CAMPOS VECTORIALES CONSERVATIVOS EN EL ESPACIO

Suponer que M, N y P tienen primeras derivadas parciales continuas en una esfera abierta Q en el espacio. El campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es conservativo si y sólo si

$$\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{0}.$$

Es decir, **F** es conservativo si y sólo si

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial z} \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

NOTA El teorema 15.2 es válido para dominios *simplemente conectados* en el espacio. Un dominio simplemente conexo en el espacio es un dominio D para el cual cada curva simple cerrada en D (ver la sección 15.4) se puede reducir a un punto en D sin salirse de D. ■

Del teorema 15.2 se puede ver que el campo vectorial del ejemplo 7 es conservativo, ya que rot $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{0}$. Comprobar que el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^3y^2z\mathbf{i} + x^2z\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}$$

no es conservativo; se puede demostrar que su rotacional es

$$\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) = (x^3y^2 - 2xy)\mathbf{j} + (2xz - 2x^3yz)\mathbf{k} \neq \mathbf{0}.$$

Para los campos vectoriales en el espacio que satisfagan el criterio y sean, por tanto, conservativos se puede encontrar una función potencial siguiendo el mismo modelo utilizado en el plano (como se demostró en el ejemplo 6).

EJEMPLO 8 Calcular una función potencial para $\mathbf{F}(x, y, z)$

NOTA Los ejemplos 6 y 8 son las ilustraciones de un tipo de problemas llamados *reconstrucción de una función a partir de su gradiente*. Si se decide tomar un curso en ecuaciones diferenciales, se estudiarán otros métodos para resolver este tipo de problemas. Un método popular da una interacción entre las "integraciones parciales" sucesivas y derivaciones parciales. ■

Hallar una función potencial para $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 + z^2)\mathbf{j} + 2yz\mathbf{k}$.

Solución Del ejemplo 7 se sabe que el campo vectorial dado por **F** es conservativo. Si f es una función tal que $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$, entonces

$$f_x(x, y, z) = 2xy, \quad f_y(x, y, z) = x^2 + z^2 \quad \text{y} \quad f_z(x, y, z) = 2yz$$

e integrando separadamente con respecto a x, y y z se obtiene

$$f(x, y, z) = \int M\,dx = \int 2xy\,dx = x^2y + g(y, z)$$

$$f(x, y, z) = \int N\,dy = \int (x^2 + z^2)\,dy = x^2y + yz^2 + h(x, z)$$

$$f(x, y, z) = \int P\,dz = \int 2yz\,dz = yz^2 + k(x, y).$$

Comparando estas tres versiones de $f(x, y, z)$, concluir que

$$g(y, z) = yz^2 + K, \quad h(x, z) = K \quad \text{y} \quad k(x, y) = x^2y + K.$$

Por tanto, $f(x, y, z)$ resulta ser

$$f(x, y, z) = x^2y + yz^2 + K.$$

Divergencia de un campo vectorial

NOTA La divergencia puede verse como un tipo de derivadas de **F** ya que, para campos de velocidades de partículas, mide el ritmo de flujo de partículas por unidad de volumen en un punto. En hidrodinámica (el estudio del movimiento de fluidos), un campo de velocidades de divergencia nula se llama **incompresible**. En el estudio de electricidad y magnetismo, un campo vectorial de divergencia nula se llama el **solenoidal**.

Se ha visto que el rotacional de un campo vectorial **F** es a su vez un campo vectorial. Otra función importante definida en un campo vectorial es la **divergencia**, que es una función escalar.

DEFINICIÓN DE DIVERGENCIA DE UN CAMPO VECTORIAL

La **divergencia** de $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ es

$$\text{div } \mathbf{F}(x, y) = \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}. \qquad \text{Plano.}$$

La **divergencia** de $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es

$$\text{div } \mathbf{F}(x, y, z) = \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}. \qquad \text{Espacio.}$$

Si div $\mathbf{F} = 0$, entonces se dice que **F** es de **divergencia nula**.

La notación de producto escalar usada para la divergencia proviene de considerar ∇ como un **operador diferencial**, como sigue.

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{k}\right] \cdot (M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k})$$
$$= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

EJEMPLO 9 Divergencia de un campo vectorial

Hallar la divergencia en $(2, 1, -1)$ para el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^3y^2z\mathbf{i} + x^2z\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}.$$

Solución La divergencia de **F** es

$$\text{div } \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}[x^3y^2z] + \frac{\partial}{\partial y}[x^2z] + \frac{\partial}{\partial z}[x^2y] = 3x^2y^2z.$$

En el punto $(2, 1, -1)$, la divergencia es

$$\text{div } \mathbf{F}(2, 1, -1) = 3(2^2)(1^2)(-1) = -12.$$

Hay muchas propiedades importantes de la divergencia y el rotacional de un campo vectorial **F** (ver ejercicios 83 a 89). Se establece una de uso muy frecuente en el teorema 15.3. En el ejercicio 90 se pide demostrar este teorema.

TEOREMA 15.3 RELACIÓN ENTRE DIVERGENCIA Y ROTACIONAL

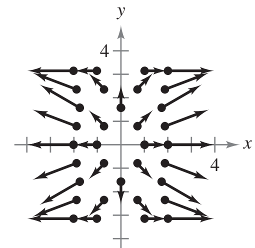
Si $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es un campo vectorial y M, N y P tienen segundas derivadas parciales continuas, entonces

$$\text{div }(\text{rot } \mathbf{F}) = 0.$$

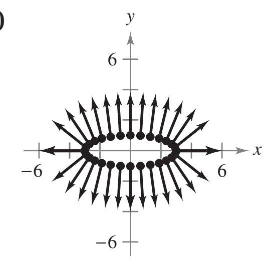
15.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, asociar el campo vectorial con su gráfica. [Las gráficas se marcan *a*), *b*), *c*), *d*), *e*) y *f*).]

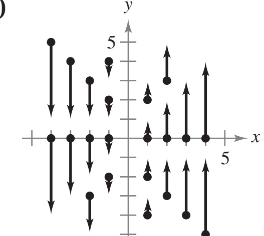
a)



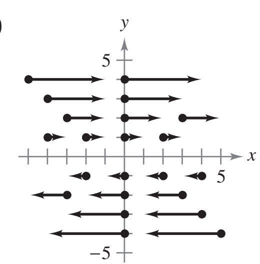
b)



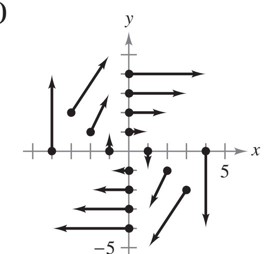
c)



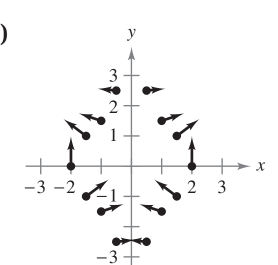
d)



e)



f)



1. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i}$
2. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{j}$
3. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$
4. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j}$
5. $\mathbf{F}(x, y) = \langle x, \operatorname{sen} y \rangle$
6. $\mathbf{F}(x, y) = \left\langle \frac{1}{2}xy, \frac{1}{4}x^2 \right\rangle$

En los ejercicios 7 a 16, calcular $\|\mathbf{F}\|$ y dibujar varios vectores representativos del campo vectorial.

7. $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$
8. $\mathbf{F}(x, y) = 2\mathbf{i}$
9. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
10. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - 2x\mathbf{j}$
11. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3y\mathbf{j}$
12. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i}$
13. $\mathbf{F}(x, y) = 4x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
14. $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + \mathbf{j}$
15. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
16. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

CAS **En los ejercicios 17 a 20, utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente varios vectores representativos del campo vectorial.**

17. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{8}(2xy\mathbf{i} + y^2\mathbf{j})$
18. $\mathbf{F}(x, y) = (2y - 3x)\mathbf{i} + (2y + 3x)\mathbf{j}$
19. $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
20. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

En los ejercicios 21 a 30, hallar el campo vectorial conservativo para la función potencial, encontrando su gradiente.

21. $f(x, y) = x^2 + 2y^2$
22. $f(x, y) = x^2 - \frac{1}{4}y^2$
23. $g(x, y) = 5x^2 + 3xy + y^2$
24. $g(x, y) = \operatorname{sen} 3x \cos 4y$
25. $f(x, y, z) = 6xyz$
26. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + 4y^2 + z^2}$
27. $g(x, y, z) = z + ye^{x^2}$
28. $g(x, y, z) = \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} - \dfrac{xz}{y}$
29. $h(x, y, z) = xy \ln(x + y)$
30. $h(x, y, z) = x \operatorname{arcsen} yz$

En los ejercicios 31 a 34, verificar que el campo vectorial es conservativo.

31. $\mathbf{F}(x, y) = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j}$
32. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{1}{x^2}(y\mathbf{i} - x\mathbf{j})$
33. $\mathbf{F}(x, y) = \operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + x \cos y\,\mathbf{j}$
34. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{1}{xy}(y\mathbf{i} - x\mathbf{j})$

En los ejercicios 35 a 38, determinar si el campo vectorial es conservativo.

35. $\mathbf{F}(x, y) = 5y^2(y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j})$
36. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{2}{y^2}e^{2x/y}(y\mathbf{i} - x\mathbf{j})$
37. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$
38. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + xy}}(y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$

En los ejercicios 39 a 48, determinar si el campo vectorial es conservativo. Si lo es, calcular una función potencial para él.

39. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
40. $\mathbf{F}(x, y) = 3x^2y^2\mathbf{i} + 2x^3y\mathbf{j}$
41. $\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$
42. $\mathbf{F}(x, y) = xe^{x^2y}(2y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$
43. $\mathbf{F}(x, y) = 15y^3\mathbf{i} - 5xy^2\mathbf{j}$
44. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{1}{y^2}(y\mathbf{i} - 2x\mathbf{j})$
45. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{2y}{x}\mathbf{i} - \dfrac{x^2}{y^2}\mathbf{j}$
46. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$
47. $\mathbf{F}(x, y) = e^x(\cos y\mathbf{i} - \operatorname{sen} y\mathbf{j})$
48. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}}{(x^2 + y^2)^2}$

En los ejercicios 49 a 52, calcular el rotacional del campo vectorial en el punto dado.

	Campo vectorial	*Punto*
49.	$\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$	$(2, 1, 3)$
50.	$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z\mathbf{i} - 2xz\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$	$(2, -1, 3)$
51.	$\mathbf{F}(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} y\mathbf{i} - e^x \cos y\mathbf{j}$	$(0, 0, 1)$
52.	$\mathbf{F}(x, y, z) = e^{-xyz}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$	$(3, 2, 0)$

CAS **En los ejercicios 53 a 56, usar un sistema algebraico por computadora y representar el rotacional del campo vectorial.**

53. $\mathbf{F}(x, y, z) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)\mathbf{i} + \ln\sqrt{x^2 + y^2}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$

54. $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{yz}{y - z}\mathbf{i} + \frac{xz}{x - z}\mathbf{j} + \frac{xy}{x - y}\mathbf{k}$

55. $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen}(x - y)\mathbf{i} + \operatorname{sen}(y - z)\mathbf{j} + \operatorname{sen}(z - x)\mathbf{k}$

56. $\mathbf{F}(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$

En los ejercicios 57 a 62, determinar si el campo vectorial F es conservativo. Si lo es, calcular una función potencial para él.

57. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy^2z^2\mathbf{i} + x^2yz^2\mathbf{j} + x^2y^2z\mathbf{k}$

58. $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2z^3\mathbf{i} + 2xyz^3\mathbf{j} + 3xy^2z^2\mathbf{k}$

59. $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen} z\mathbf{i} + \operatorname{sen} x\mathbf{j} + \operatorname{sen} y\mathbf{k}$

60. $\mathbf{F}(x, y, z) = ye^z\mathbf{i} + ze^x\mathbf{j} + xe^y\mathbf{k}$

61. $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{z}{y}\mathbf{i} - \frac{xz}{y^2}\mathbf{j} + \frac{x}{y}\mathbf{k}$

62. $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{j} + \mathbf{k}$

En los ejercicios 63 a 66, calcular la divergencia del campo vectorial F.

63. $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} + 2y^2\mathbf{j}$

64. $\mathbf{F}(x, y) = xe^x\mathbf{i} + ye^y\mathbf{j}$

65. $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen} x\mathbf{i} + \cos y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

66. $\mathbf{F}(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2)\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + \ln(y^2 + z^2)\mathbf{k}$

En los ejercicios 67 a 70, calcular la divergencia del campo vectorial F en el punto dado.

	Campo vectorial	*Punto*
67.	$\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + z\mathbf{k}$	$(2, 1, 1)$
68.	$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z\mathbf{i} - 2xz\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$	$(2, -1, 3)$
69.	$\mathbf{F}(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} y\mathbf{i} - e^x \cos y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$	$(3, 0, 0)$
70.	$\mathbf{F}(x, y, z) = \ln(xyz)(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$	$(3, 2, 1)$

Desarrollo de conceptos

71. Definir un campo vectorial en el plano y en el espacio. Dar algunos ejemplos físicos de campos vectoriales.

72. ¿Qué es un campo vectorial conservativo y cuál es su criterio en el plano y en el espacio?

73. Definir el rotacional de un campo vectorial.

74. Definir la divergencia de un campo vectorial en el plano y en el espacio.

En los ejercicios 75 y 76, calcular rot (F × G) = ∇ × (F × G).

75. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$
$\mathbf{G}(x, y, z) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

76. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} - z\mathbf{k}$
$\mathbf{G}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

En los ejercicios 77 y 78, hallar rot (rot F) = ∇ × (∇ × F).

77. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

78. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z\mathbf{i} - 2xz\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$

En los ejercicios 79 y 80, hallar div(F × G) = ∇ · (F × G).

79. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$
$\mathbf{G}(x, y, z) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

80. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} - z\mathbf{k}$
$\mathbf{G}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

En los ejercicios 81 y 82, hallar div (rot F) = ∇ · (∇ × F).

81. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

82. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z\mathbf{i} - 2xz\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$

En los ejercicios 83 a 90, demostrar la propiedad para los campos vectoriales F y G y la función escalar *f*. (Suponer que las derivadas parciales requeridas son continuas.)

83. $\operatorname{rot}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{rot}\mathbf{F} + \operatorname{rot}\mathbf{G}$

84. $\operatorname{rot}(\nabla f) = \nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$

85. $\operatorname{div}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{div}\mathbf{F} + \operatorname{div}\mathbf{G}$

86. $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\operatorname{rot}\mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot (\operatorname{rot}\mathbf{G})$

87. $\nabla \times [\nabla f + (\nabla \times \mathbf{F})] = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F})$

88. $\nabla \times (f\mathbf{F}) = f(\nabla \times \mathbf{F}) + (\nabla f) \times \mathbf{F}$

89. $\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = f \operatorname{div}\mathbf{F} + \nabla f \cdot \mathbf{F}$

90. $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F}) = 0$ (Teorema 15.3)

En los ejercicios 91 a 93, sea $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, y $f(x, y, z) = \|\mathbf{F}(x, y, z)\|$.

91. Probar que $\nabla(\ln f) = \frac{\mathbf{F}}{f^2}$.

92. Probar que $\nabla\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{\mathbf{F}}{f^3}$.

93. Probar que $\nabla f^n = nf^{n-2}\mathbf{F}$.

Para discusión

94. *a*) Dibujar varios vectores representativos en el campo vectorial dado por

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

b) Dibujar varios vectores representativos en el campo vectorial dado por

$$\mathbf{G}(x, y) = \frac{x\mathbf{i} - y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

c) Explicar cualquier similitud o diferencia en los campos vectoriales $\mathbf{F}(x, y)$ y $\mathbf{G}(x, y)$.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 95 a 98, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre su falsedad.**

95. Si $\mathbf{F}(x, y) = 4x\mathbf{i} - y^2\mathbf{j}$, entonces $\|\mathbf{F}(x, y)\| \to 0$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$.

96. Si $\mathbf{F}(x, y) = 4x\mathbf{i} - y^2\mathbf{j}$ y (x, y) está en el eje y positivo, entonces el vector apunta en la dirección y negativa.

97. Si f es un campo escalar, entonces el rotacional f tiene sentido.

98. Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial y $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{F}$ es irrotacional pero no conservativo.

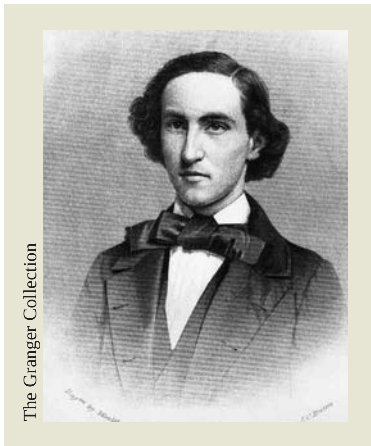
15.2 Integrales de línea



- **Comprender y utilizar el concepto de curva suave a trozos.**
- **Expresar y evaluar una integral de línea.**
- **Expresar y evaluar una integral de línea de un campo vectorial.**
- **Expresar y calcular una integral de línea en forma diferencial.**



Curvas suaves a trozos (o por partes)



JOSIAH WILLARD GIBBS (1839-1903)

Muchos físicos y matemáticos han contribuido a la teoría y a las aplicaciones descritas en este capítulo, Newton, Gauss, Laplace, Hamilton y Maxwell, entre otros. Sin embargo, el uso del análisis vectorial para describir estos resultados se atribuye principalmente al físico matemático estadounidense Josiah Willard Gibbs.

Una propiedad clásica de los campos gravitatorios (o gravitacionales) es que, sujeto a ciertas restricciones físicas, el trabajo realizado por la gravedad sobre un objeto que se mueve entre dos puntos en el campo es independiente de la trayectoria que siga el objeto. Una de las restricciones es que la **trayectoria** debe ser una curva suave a trozos (o por partes). Recuérdese que una curva plana C dada por

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad a \leq t \leq b$$

es **suave** si

$$\frac{dx}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt}$$

son continuas en $[a, b]$ y no simultáneamente 0 en (a, b). Similarmente, una curva C en el espacio dada por

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b$$

es **suave** si

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{dz}{dt}$$

son continuas en $[a, b]$ y no simultáneamente 0 en (a, b). Una curva C es **suave a trozos** (o por partes) si el intervalo $[a, b]$ puede dividirse en un número finito de subintervalos, en cada uno de los cuales C es suave.



EJEMPLO 1 Hallar una parametrización suave a trozos

Hallar una parametrización suave a trozos de la gráfica C que se muestra en la figura 15.7.

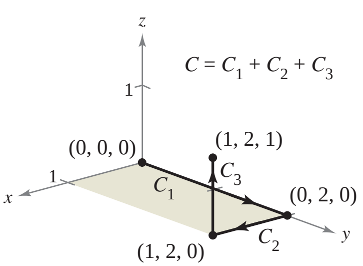


Figura 15.7

Solución Como C consta de tres segmentos de recta C_1, C_2 y C_3, se puede construir una parametrización suave de cada segmento y unirlas haciendo que el último valor de t en C_i coincida con el primer valor de t en C_{i+1}, como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned}
&C_1\!: x(t) = 0, && y(t) = 2t, && z(t) = 0, && 0 \leq t \leq 1\\
&C_2\!: x(t) = t - 1, && y(t) = 2, && z(t) = 0, && 1 \leq t \leq 2\\
&C_3\!: x(t) = 1, && y(t) = 2, && z(t) = t - 2, && 2 \leq t \leq 3
\end{aligned}$$

Por tanto, C está dada por

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} 2t\mathbf{j}, & 0 \leq t \leq 1\\ (t-1)\mathbf{i} + 2\mathbf{j}, & 1 \leq t \leq 2\\ \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + (t-2)\mathbf{k}, & 2 \leq t \leq 3 \end{cases}.$$

Como C_1, C_2 y C_3 son suaves, se sigue que C es suave a trozos.

Recuérdese que la parametrización de una curva induce una **orientación** de la curva. Así, en el ejemplo 1, la curva está orientada de manera que la dirección positiva va desde (0, 0, 0), siguiendo la curva, hasta (1, 2, 1). Trátese de obtener una parametrización que induzca la orientación opuesta.

Integrales de línea

Hasta ahora, en el texto, se han estudiado varios tipos de integrales. En una integral simple

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{Se integra sobre el intervalo } [a, b].$$

se integró sobre el intervalo $[a, b]$. De manera similar, en las integrales dobles

$$\int_R\int f(x, y)\,dA \qquad \text{Se integra sobre la región } R.$$

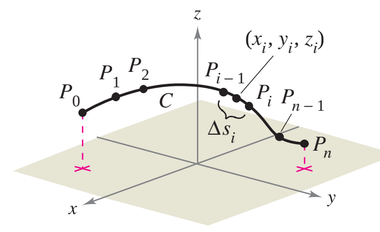
se integró sobre la región R del plano. En esta sección se estudia un nuevo tipo de integral llamada **integral de línea**

$$\int_C f(x, y)\,ds \qquad \text{Se integra sobre una curva } C.$$

en la que se integra sobre una curva C suave a trozos. (Esta terminología es un poco desafortunada; este tipo de integral quedaría mejor descrita como "integral de curva".)

Para introducir el concepto de una integral de línea, considérese la masa de un cable de longitud finita, dado por una curva C en el espacio. La densidad (masa por unidad de longitud) del cable en el punto (x, y, z) está dada por $f(x, y, z)$. Divídase la curva C mediante los puntos

$$P_0, P_1, \ldots, P_n$$



Partición de la curva C
Figura 15.8

produciendo n subarcos, como se muestra en la figura 15.8. La longitud del i-ésimo subarco está dada por Δs_i. A continuación, se elige un punto (x_i, y_i, z_i) en cada subarco. Si la longitud de cada subarco es pequeña, la masa total del cable puede ser aproximada por la suma

$$\text{Masa de cable } \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta s_i.$$

Si $\|\Delta\|$ denota la longitud del subarco más largo y se hace que $\|\Delta\|$ se aproxime a 0, parece razonable que el límite de esta suma se aproxime a la masa del cable. Esto lleva a la definición siguiente.

DEFINICIÓN DE INTEGRAL DE LÍNEA

Si f está definida en una región que contiene una curva suave C de longitud finita, entonces la **integral de línea de f a lo largo de C** está dada por

$$\int_C f(x, y)\,ds = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta s_i \qquad \text{Plano.}$$

o

$$\int_C f(x, y, z)\,ds = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta s_i \qquad \text{Espacio.}$$

siempre que este límite exista.

Como sucede con las integrales vistas en el capítulo 14, para evaluar una integral de línea es útil convertirla en una integral definida. Puede demostrarse que si f es *continua*, el límite dado arriba existe y es el mismo para todas las parametrizaciones suaves de C.

Para evaluar una integral de línea sobre una curva plana C dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, se utiliza el hecho de que

$$ds = \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt.$$

Para una curva en el espacio hay una fórmula similar, como se indica en el teorema 15.4.

TEOREMA 15.4 EVALUACIÓN DE UNA INTEGRAL DE LÍNEA COMO INTEGRAL DEFINIDA

Sea f continua en una región que contiene una curva suave C. Si C está dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, donde $a \le t \le b$, entonces

$$\int_C f(x, y)\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt.$$

Si C está dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, donde $a \le t \le b$, entonces

$$\int_C f(x, y, z)\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt.$$

Obsérvese que si $f(x, y, z) = 1$, la integral de línea proporciona la longitud de arco de la curva C, como se definió en la sección 12.5. Es decir,

$$\int_C 1\,ds = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt = \text{longitud de arco de la curva } C.$$

EJEMPLO 2 Evaluación de una integral de línea

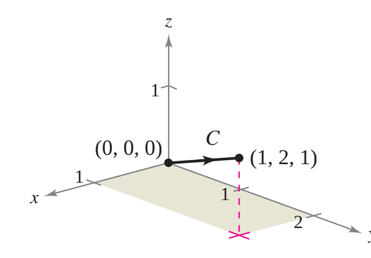


Figura 15.9

Evaluar

$$\int_C (x^2 - y + 3z)\,ds$$

donde C es el segmento de recta mostrado en la figura 15.9.

Solución Para empezar se expresa la ecuación de la recta en forma paramétrica:

$$x = t, \quad y = 2t, \quad \text{y} \quad z = t, \quad 0 \le t \le 1.$$

Entonces, $x'(t) = 1$, $y'(t) = 2$ y $z'(t) = 1$, lo cual implica que

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}.$$

Por tanto, la integral de línea toma la forma siguiente.

$$\begin{aligned}\int_C (x^2 - y + 3z)\,ds &= \int_0^1 (t^2 - 2t + 3t)\sqrt{6}\,dt \\ &= \sqrt{6}\int_0^1 (t^2 + t)\,dt \\ &= \sqrt{6}\left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right]_0^1 \\ &= \frac{5\sqrt{6}}{6}\end{aligned}$$

NOTA En el ejemplo 2, el valor de la integral de línea no depende de la parametrización del segmento de recta C (con cualquier parametrización suave se obtendrá el mismo valor). Para convencerse de esto, probar con alguna otra parametrización, como por ejemplo $x = 1 + 2t$, $y = 2 + 4t$, $z = 1 + 2t$, $-\frac{1}{2} \le t \le 0$, o $x = -t$, $y = -2t$, $z = -t$, $-1 \le t \le 0$.

Supóngase que C es una trayectoria compuesta de las curvas suaves $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Si f es continua en C, se puede mostrar que

$$\int_C f(x, y)\, ds = \int_{C_1} f(x, y)\, ds + \int_{C_2} f(x, y)\, ds + \cdots + \int_{C_n} f(x, y)\, ds.$$

Esta propiedad se utiliza en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Evaluación de una integral de línea sobre una trayectoria

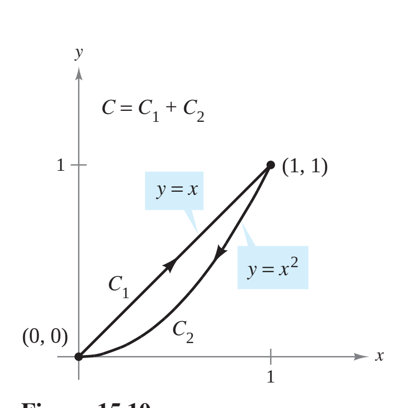


Figura 15.10

Evaluar $\int_C x\, ds$, donde C es la curva suave a trozos mostrada en la figura 15.10.

Solución Para empezar, se integra, en sentido ascendente sobre la recta $y = x$, usando la parametrización siguiente.

$$C_1:\ x = t,\ y = t, \quad 0 \le t \le 1$$

En esta curva, $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}$, lo que implica que $x'(t) = 1$ y $y'(t) = 1$. Por tanto,

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \sqrt{2}$$

y se tiene

$$\int_{C_1} x\, ds = \int_0^1 t\sqrt{2}\, dt = \frac{\sqrt{2}}{2} t^2 \Big]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

A continuación, se integra, en sentido descendente, sobre la parábola $y = x^2$, usando la parametrización

$$C_2:\ x = 1 - t, \quad y = (1 - t)^2, \quad 0 \le t \le 1.$$

En esta curva, $\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{i} + (1 - t)^2\mathbf{j}$, lo cual implica que $x'(t) = -1$ y $y'(t) = -2(1 - t)$. Por tanto,

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \sqrt{1 + 4(1 - t)^2}$$

y se tiene

$$\begin{aligned}\int_{C_2} x\, ds &= \int_0^1 (1 - t)\sqrt{1 + 4(1 - t)^2}\, dt \\ &= -\frac{1}{8}\left[\frac{2}{3}[1 + 4(1 - t)^2]^{3/2}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{12}(5^{3/2} - 1).\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\int_C x\, ds = \int_{C_1} x\, ds + \int_{C_2} x\, ds = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{12}(5^{3/2} - 1) \approx 1.56.$$

En parametrizaciones dadas por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, es útil recordar la forma de ds como

$$ds = \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt.$$

Esto se usa en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Evaluar una integral de línea

Evaluar $\int_C (x + 2)\, ds$, donde C es la curva representada por

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{4}{3}t^{3/2}\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 2.$$

Solución Puesto que $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t^{1/2}\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, y

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} = \sqrt{1 + 4t + t^2}$$

se sigue que

$$\begin{aligned}\int_C (x + 2)\, ds &= \int_0^2 (t + 2)\sqrt{1 + 4t + t^2}\, dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 2(t + 2)(1 + 4t + t^2)^{1/2}\, dt \\ &= \frac{1}{3}\Big[(1 + 4t + t^2)^{3/2}\Big]_0^2 \\ &= \frac{1}{3}\left(13\sqrt{13} - 1\right) \\ &\approx 15.29.\end{aligned}$$

El ejemplo siguiente muestra cómo usar una integral de línea para hallar la masa de un resorte (o muelle) cuya densidad varía. En la figura 15.11 obsérvese cómo la densidad de este resorte aumenta a medida que la espiral del resorte asciende por el eje z.

EJEMPLO 5 Hallar la masa de un resorte (o muelle)

Hallar la masa de un resorte que tiene la forma de una hélice circular

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}), \quad 0 \le t \le 6\pi$$

donde la densidad del resorte es $\rho(x, y, z) = 1 + z$, como se muestra en la figura 15.11.

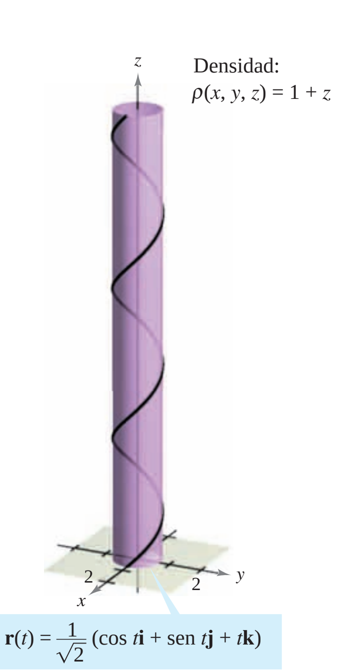


Figura 15.11

Solución Como

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2 + (1)^2} = 1$$

se sigue que la masa del resorte es

$$\begin{aligned}\text{Masa} = \int_C (1 + z)\, ds &= \int_0^{6\pi}\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right) dt \\ &= \left[t + \frac{t^2}{2\sqrt{2}}\right]_0^{6\pi} \\ &= 6\pi\left(1 + \frac{3\pi}{\sqrt{2}}\right) \\ &\approx 144.47.\end{aligned}$$

La masa del resorte es aproximadamente 144.47.

Integrales de línea de campos vectoriales

Una de las aplicaciones físicas más importantes de las integrales de línea es la de hallar el **trabajo** realizado sobre un objeto que se mueve en un campo de fuerzas. Por ejemplo, la figura 15.12 muestra un campo de fuerzas cuadrático inverso similar al campo gravitatorio del Sol. Obsérvese que la magnitud de la fuerza a lo largo de una trayectoria circular en torno al centro es constante, mientras que la magnitud de la fuerza a lo largo de una trayectoria parabólica varía de un punto a otro.

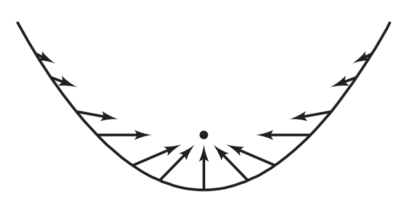
Para ver cómo puede utilizarse una integral de línea para hallar el trabajo realizado en un campo de fuerzas **F**, considérese un objeto que se mueve a lo largo de una trayectoria C en el campo, como se muestra en la figura 15.13. Para determinar el trabajo realizado por la fuerza, sólo se necesita considerar aquella parte de la fuerza que actúa en la dirección en que se mueve el objeto (o en la dirección contraria). Esto significa que en cada punto de C, se puede considerar la proyección $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ del vector fuerza **F** sobre el vector unitario tangente **T**. En un subarco pequeño de longitud Δs_i, el incremento de trabajo es

$$\begin{aligned}\Delta W_i &= (\text{fuerza})(\text{distancia})\\ &\approx [\mathbf{F}(x_i, y_i, z_i) \cdot \mathbf{T}(x_i, y_i, z_i)]\,\Delta s_i\end{aligned}$$

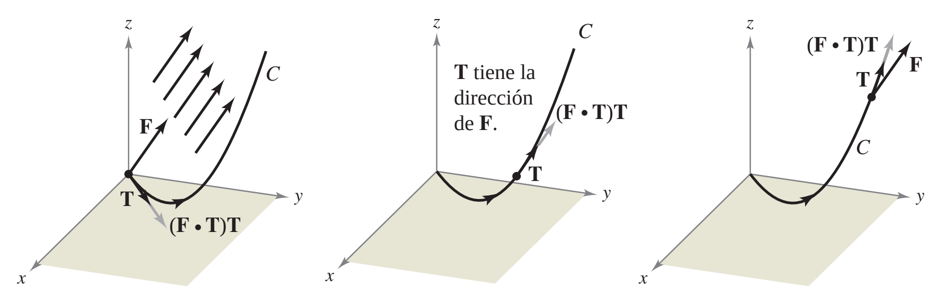
donde (x_i, y_i, z_i) es un punto en el subarco i-ésimo. Por consiguiente, el trabajo total realizado está dado por la integral siguiente.

$$W = \int_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{T}(x, y, z)\, ds$$

Campo de fuerzas cuadrático inverso **F**



Vectores a lo largo de una trayectoria parabólica en el campo de fuerzas **F**
Figura 15.12



En cada punto en C, la fuerza en la dirección del movimiento es $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{T})\mathbf{T}$
Figura 15.13

Esta integral de línea aparece en otros contextos y es la base de la definición siguiente de **integral de línea de un campo vectorial**. En la definición, obsérvese que

$$\begin{aligned}\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds &= \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}\|\mathbf{r}'(t)\|\, dt\\ &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt\\ &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.\end{aligned}$$

DEFINICIÓN DE LA INTEGRAL DE LÍNEA DE UN CAMPO VECTORIAL

Sea **F** un campo vectorial continuo definido sobre una curva suave C dada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. La **integral de línea** de **F** sobre C está dada por

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int_a^b \mathbf{F}(x(t),\; y(t), z(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt.$$

EJEMPLO 6 Trabajo realizado por una fuerza

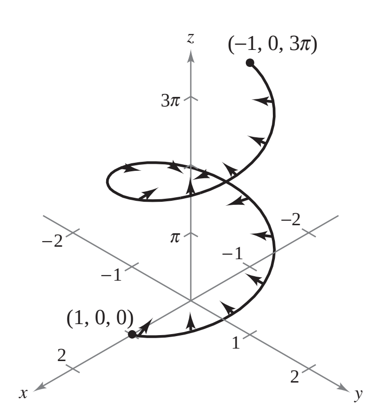


Figura 15.14

Hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{1}{2}x\mathbf{i} - \frac{1}{2}y\mathbf{j} + \frac{1}{4}\mathbf{k}$$ Campo de fuerzas **F**.

sobre una partícula que se mueve a lo largo de la hélice dada por

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$ Curva *C* en el espacio.

desde el punto (1, 0, 0) hasta el punto $(-1, 0, 3\pi)$, como se muestra en la figura 15.14.

Solución Como

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}\\ &= \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}\end{aligned}$$

se sigue que $x(t) = \cos t$, $y(t) = \operatorname{sen} t$ y $z(t) = t$. Por tanto, el campo de fuerzas puede expresarse como

$$\mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) = -\frac{1}{2}\cos t\mathbf{i} - \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\mathbf{j} + \frac{1}{4}\mathbf{k}.$$

Para hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas al moverse la partícula a lo largo de la curva *C*, se utiliza el hecho de que

$$\mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

y se escribe lo siguiente.

$$\begin{aligned}W &= \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}\\ &= \int_a^b \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t))\cdot \mathbf{r}'(t)\,dt\\ &= \int_0^{3\pi}\left(-\frac{1}{2}\cos t\mathbf{i} - \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\mathbf{j} + \frac{1}{4}\mathbf{k}\right)\cdot(-\operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \mathbf{k})\,dt\\ &= \int_0^{3\pi}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} t\cos t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\cos t + \frac{1}{4}\right)dt\\ &= \int_0^{3\pi}\frac{1}{4}\,dt\\ &= \frac{1}{4}t\Big]_0^{3\pi}\\ &= \frac{3\pi}{4}\end{aligned}$$

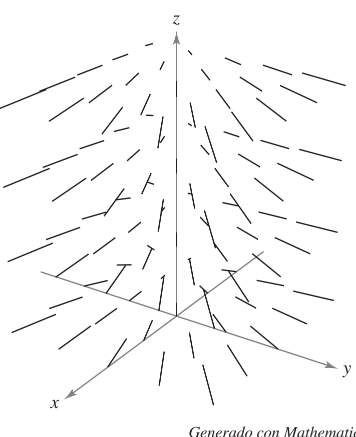


Figura 15.15

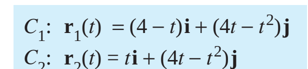
NOTA En el ejemplo 6, nótese que las componentes *x* y *y* del campo de fuerzas acaban no contribuyendo en nada al trabajo total. Esto se debe a que *en este ejemplo particular* la componente *z* del campo de fuerzas es la única parte de la fuerza que actúa en la misma dirección (o en dirección opuesta) en la que se mueve la partícula (ver la figura 15.15). ■

TECNOLOGÍA La gráfica, generada por computadora, del campo de fuerzas del ejemplo 6 mostrado en la figura 15.15 indica que todo vector en los puntos del campo de fuerzas apunta hacia el eje *z*.

En integrales de línea de funciones vectoriales, la orientación de la curva C es importante. Si la orientación de la curva se invierte, el vector tangente unitario $\mathbf{T}(t)$ cambia a $-\mathbf{T}(t)$, y se obtiene

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

EJEMPLO 7 Orientación y parametrización de una curva



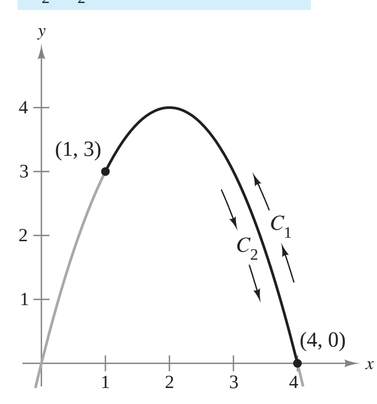


Figura 15.16

Sea $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$ y evaluar la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ a lo largo de cada una de las curvas parabólicas mostradas en la figura 15.16.

a) C_1: $\mathbf{r}_1(t) = (4-t)\mathbf{i} + (4t-t^2)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 3$

b) C_2: $\mathbf{r}_2(t) = t\mathbf{i} + (4t-t^2)\mathbf{j}, \quad 1 \leq t \leq 4$

Solución

a) Como $\mathbf{r}_1'(t) = -\mathbf{i} + (4-2t)\mathbf{j}$ y

$$\mathbf{F}(x(t), y(t)) = (4t-t^2)\mathbf{i} + (4-t)^2\mathbf{j}$$

la integral de línea es

$$\begin{aligned}\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^3 [(4t-t^2)\mathbf{i} + (4-t)^2\mathbf{j}] \cdot [-\mathbf{i} + (4-2t)\mathbf{j}]\, dt \\ &= \int_0^3 (-4t + t^2 + 64 - 64t + 20t^2 - 2t^3)\, dt \\ &= \int_0^3 (-2t^3 + 21t^2 - 68t + 64)\, dt \\ &= \left[-\frac{t^4}{2} + 7t^3 - 34t^2 + 64t\right]_0^3 \\ &= \frac{69}{2}.\end{aligned}$$

b) Como $\mathbf{r}_2'(t) = \mathbf{i} + (4-2t)\mathbf{j}$ y

$$\mathbf{F}(x(t), y(t)) = (4t-t^2)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$$

la integral de línea es

$$\begin{aligned}\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_1^4 [(4t-t^2)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}] \cdot [\mathbf{i} + (4-2t)\mathbf{j}]\, dt \\ &= \int_1^4 (4t - t^2 + 4t^2 - 2t^3)\, dt \\ &= \int_1^4 (-2t^3 + 3t^2 + 4t)\, dt \\ &= \left[-\frac{t^4}{2} + t^3 + 2t^2\right]_1^4 \\ &= -\frac{69}{2}.\end{aligned}$$

El resultado del inciso *b*) es el negativo del del inciso *a*) porque C_1 y C_2 representan orientaciones opuestas del mismo segmento parabólico.

NOTA Aunque en el ejemplo 7 el valor de la integral de línea depende de la orientación de C, no depende de la parametrización de C. Para ver esto, sea C_3 la curva representada por

$$\mathbf{r}_3 = (t+2)\mathbf{i} + (4-t^2)\mathbf{j}$$

donde $-1 \leq t \leq 2$. La gráfica de esta curva es el mismo segmento parabólico mostrado en la figura 15.16. ¿Coincide el valor de la integral de línea sobre C_3 con el valor sobre C_1 o C_2? ¿Por qué sí o por qué no?

Integrales de línea en forma diferencial

Otra forma normalmente utilizada de las integrales de línea se deduce de la notación de campo vectorial usada en la sección anterior. Si **F** es un campo vectorial de la forma $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$, y C está dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, entonces $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ se escribe a menudo como $M\,dx + N\,dy$.

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt \\ &= \int_a^b (M\mathbf{i} + N\mathbf{j}) \cdot (x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j})\,dt \\ &= \int_a^b \left(M\frac{dx}{dt} + N\frac{dy}{dt}\right) dt \\ &= \int_C (M\,dx + N\,dy)\end{aligned}$$

Esta **forma diferencial** puede extenderse a tres variables. Los paréntesis se omiten a menudo, y se escribe:

$$\int_C M\,dx + N\,dy \qquad \text{y} \qquad \int_C M\,dx + N\,dy + P\,dz$$

Obsérvese cómo se usa esta notación diferencial en el ejemplo 8.

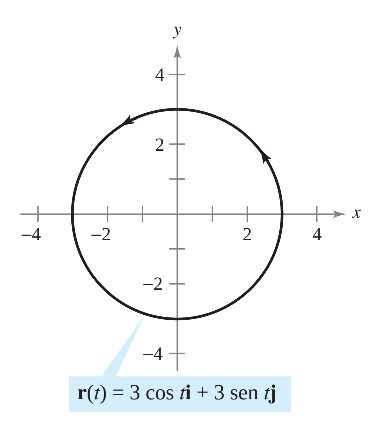


Figura 15.17

EJEMPLO 8 Evaluación de una integral de línea en forma diferencial

Sea C el círculo de radio 3 dado por

$$\mathbf{r}(t) = 3\cos t\,\mathbf{i} + 3\,\text{sen}\, t\,\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

como se muestra en la figura 15.17. Evaluar la integral de línea

$$\int_C y^3\,dx + (x^3 + 3xy^2)\,dy.$$

Solución Como $x = 3\cos t$ y $y = 3\,\text{sen}\, t$, se tiene $dx = -3\,\text{sen}\, t\,dt$ y $dy = 3\cos t\,dt$. Por tanto, la integral de línea es

$$\begin{aligned}&\int_C M\,dx + N\,dy \\ &= \int_C y^3\,dx + (x^3 + 3xy^2)\,dy \\ &= \int_0^{2\pi} \left[(27\,\text{sen}^3 t)(-3\,\text{sen}\, t) + (27\cos^3 t + 81\cos t\,\text{sen}^2 t)(3\cos t)\right] dt \\ &= 81\int_0^{2\pi} (\cos^4 t - \text{sen}^4 t + 3\cos^2 t\,\text{sen}^2 t)\,dt \\ &= 81\int_0^{2\pi} \left(\cos^2 t - \text{sen}^2 t + \frac{3}{4}\text{sen}^2\, 2t\right) dt \\ &= 81\int_0^{2\pi} \left[\cos 2t + \frac{3}{4}\left(\frac{1 - \cos 4t}{2}\right)\right] dt \\ &= 81\left[\frac{\text{sen}\, 2t}{2} + \frac{3}{8}t - \frac{3\,\text{sen}\, 4t}{32}\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{243\pi}{4}.\end{aligned}$$

NOTA La orientación de C afecta el valor de la forma diferencial de una integral de línea. Específicamente, si $-C$ tiene orientación opuesta a C, entonces

$$\int_{-C} M\,dx + N\,dy = -\int_C M\,dx + N\,dy.$$

Por tanto, de las tres formas de la integral de línea presentadas en esta sección, la orientación de C no afecta a la forma $\int_C f(x, y)\,ds$, pero sí afecta a la forma vectorial y la forma diferencial. ■

En curvas representadas por $y = g(x)$, $a \le x \le b$, se puede hacer $x = t$ y obtener la forma paramétrica

$$x = t \quad \text{y} \quad y = g(t), \quad a \le t \le b.$$

Como en esta forma es $dx = dt$, se tiene la opción de evaluar la integral de línea en la variable x o en la variable t. Esto se muestra en el ejemplo 9.

EJEMPLO 9 Evaluación de una integral de línea en forma diferencial

Evaluar

$$\int_C y\,dx + x^2\,dy$$

donde C es el arco parabólico dado por $y = 4x - x^2$ desde (4, 0) a (1, 3), como se muestra en la figura 15.18.

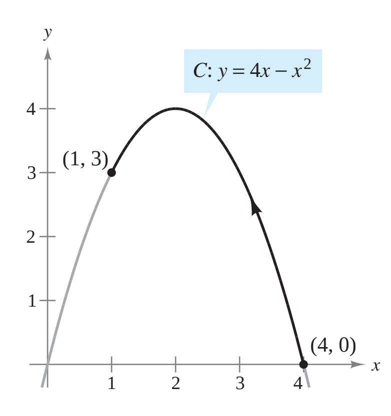


Figura 15.18

Solución En lugar de pasar al parámetro t, se puede simplemente conservar la variable x y escribir

$$y = 4x - x^2 \quad \Rightarrow \quad dy = (4 - 2x)\,dx.$$

Entonces, en la dirección de (4, 0) a (1, 3), la integral de línea es

$$\begin{aligned}\int_C y\,dx + x^2\,dy &= \int_4^1 [(4x - x^2)\,dx + x^2(4 - 2x)\,dx] \\ &= \int_4^1 (4x + 3x^2 - 2x^3)\,dx \\ &= \left[2x^2 + x^3 - \frac{x^4}{2}\right]_4^1 = \frac{69}{2}.\end{aligned}$$

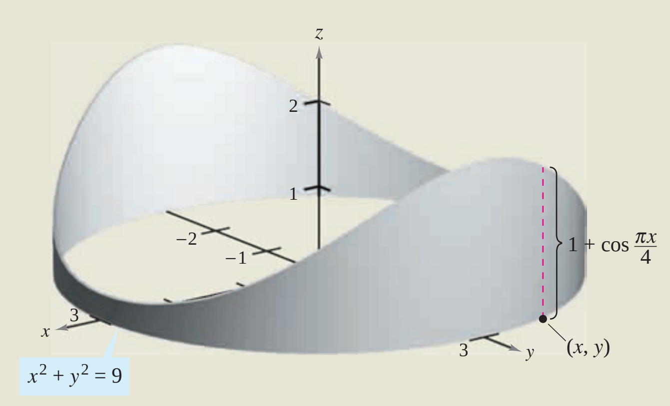
Ver el ejemplo 7.

EXPLORACIÓN

Hallar el área de una superficie lateral La figura muestra un pedazo de hojalata cortado de un cilindro circular. La base del cilindro circular se representa por $x^2 + y^2 = 9$. Para todo punto (x, y) de la base, la altura del objeto está dada por

$$f(x, y) = 1 + \cos\frac{\pi x}{4}.$$

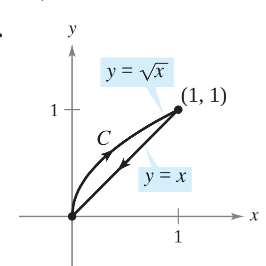
Explicar cómo utilizar una integral de línea para hallar el área de la superficie del pedazo de hojalata.



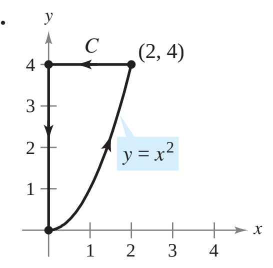
15.2 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, hallar una parametrización suave a trozos de la trayectoria *C*. (Nótese que existe más de una respuesta correcta.)

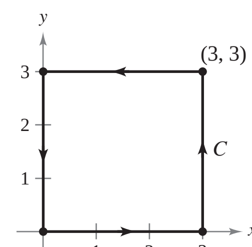
1.



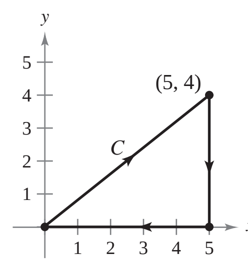
2.



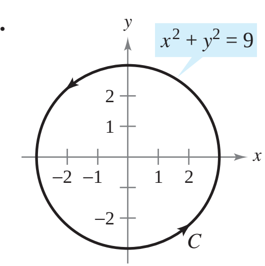
3.



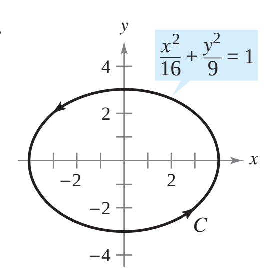
4.



5.



6.



En los ejercicios 7 a 10, evaluar la integral de línea a lo largo de la trayectoria dada.

7. $\displaystyle\int_C xy\, ds$

C: $\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} + 3t\mathbf{j}$

$0 \le t \le 1$

8. $\displaystyle\int_C 3(x - y)\, ds$

C: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (2 - t)\mathbf{j}$

$0 \le t \le 2$

9. $\displaystyle\int_C (x^2 + y^2 + z^2)\, ds$

C: $\mathbf{r}(t) = \text{sen}\, t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

$0 \le t \le \pi/2$

10. $\displaystyle\int_C 2xyz\, ds$

C: $\mathbf{r}(t) = 12t\mathbf{i} + 5t\mathbf{j} + 84t\mathbf{k}$

$0 \le t \le 1$

En los ejercicios 11 a 14, *a*) hallar una parametrización de la trayectoria *C*, y *b*) evaluar

$$\int_C (x^2 + y^2)\, ds$$

a lo largo de *C*.

11. C: segmento de recta de (0, 0) a (1, 1)

12. C: segmento de recta de (0, 0) a (2, 4)

13. C: círculo $x^2 + y^2 = 1$ recorrido en sentido contrario a las manecillas del reloj, desde (1, 0) hasta (0, 1)

14. C: círculo $x^2 + y^2 = 4$ recorrido en sentido contrario a las manecillas del reloj, desde (2, 0) a (0, 2)

En los ejercicios 15 a 18, *a*) hallar una parametrización de la trayectoria *C*, y *b*) evaluar

$$\int_C (x + 4\sqrt{y})\, ds$$

a lo largo de *C*.

15. C: eje x de $x = 0$ a $x = 1$

16. C: eje y de $y = 1$ a $y = 9$

17. C: triángulo cuyos vértices son (0, 0), (1, 0) y (0, 1), recorrido en sentido contrario a las manecillas del reloj

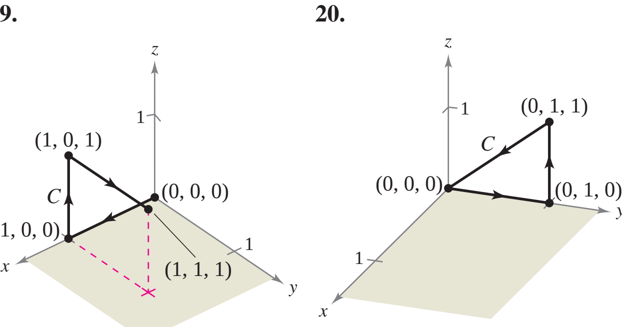
18. C: cuadrado cuyos vértices son (0, 0), (2, 0), (2, 2) y (0, 2), recorrido en sentido contrario a las manecillas del reloj

En los ejercicios 19 y 20, *a*) encontrar una parametrización continua por secciones de la trayectoria *C* que se muestra en la figura y *b*) evaluar

$$\int_C (2x + y^2 - z)\, ds$$

a lo largo de *C*.

19. **20.**



Masa **En los ejercicios 21 y 22, hallar la masa total de dos vueltas completas de un resorte de densidad ρ y que tiene forma de hélice circular**

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\, t\mathbf{j} + t\mathbf{k},\quad 0 \le t \le 4\pi.$$

21. $\rho(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$

22. $\rho(x, y, z) = z$

Masa **En los ejercicios 23 a 26, hallar la masa total del cable de densidad ρ.**

23. $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \text{sen}\, t\mathbf{j}$, $\rho(x, y) = x + y$, $0 \le t \le \pi$

24. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$, $\rho(x, y) = \frac{3}{4}y$, $0 \le t \le 1$

25. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $\rho(x, y, z) = kz$ $(k > 0)$, $1 \le t \le 3$

26. $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\, t\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$, $\rho(x, y, z) = k + z$ $(k > 0)$, $0 \le t \le 2\pi$

En los ejercicios 27 a 32, evaluar

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

donde C está representa por $\mathbf{r}(t)$.

27. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

C: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$

28. $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

C: $\mathbf{r}(t) = 4 \cos t\mathbf{i} + 4 \operatorname{sen} t\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq \pi/2$

29. $\mathbf{F}(x, y) = 3x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j}$

C: $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq \pi/2$

30. $\mathbf{F}(x, y) = 3x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j}$

C: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \sqrt{4 - t^2}\mathbf{j}, \quad -2 \leq t \leq 2$

31. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$

C: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$

32. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

C: $\mathbf{r}(t) = 2 \operatorname{sen} t\mathbf{i} + 2 \cos t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi$

CAS **En los ejercicios 33 y 34, utilizar un sistema algebraico por computadora y calcular la integral**

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

donde C está representa por $\mathbf{r}(t)$.

33. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z\mathbf{i} + 6y\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$

C: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \ln t\mathbf{k}, \quad 1 \leq t \leq 3$

34. $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

C: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2$

Trabajo **En los ejercicios 35 a 40, hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas F sobre una partícula que se mueve a lo largo de la trayectoria dada.**

35. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$

C: $x = t$, $y = t^3$ desde (0, 0) hasta (2, 8)

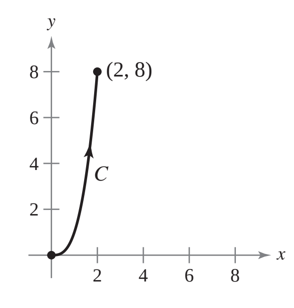


Figura para 35

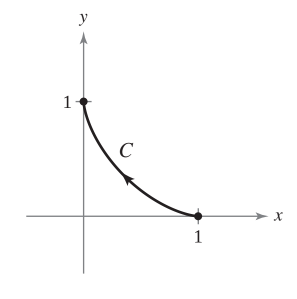


Figura para 36

36. $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} - xy\mathbf{j}$

C: $x = \cos^3 t$, $y = \operatorname{sen}^3 t$ desde (1, 0) hasta (0, 1)

37. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

C: triángulo cuyos vértices son (0, 0), (1, 0) y (0, 1), recorrido en sentido contrario a las manecillas del reloj. (*Sugerencia:* Ver ejercicio 17*a*.)

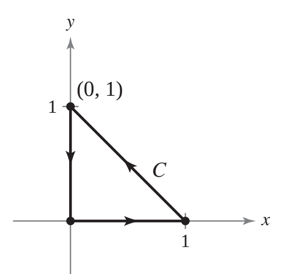


Figura para 37

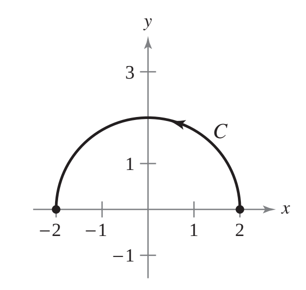


Figura para 38

38. $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$

C: contorno del semicírculo $y = \sqrt{4 - x^2}$ desde (2, 0) hasta (−2, 0) recorrido en sentido contrario a las manecillas del reloj

39. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 5z\mathbf{k}$

C: $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

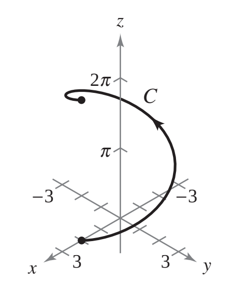


Figura para 39

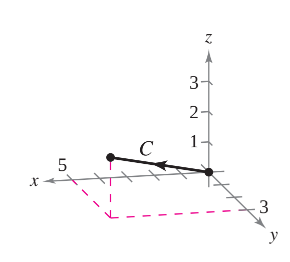


Figura para 40

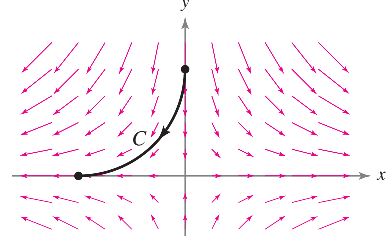
40. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$

C: recta de (0, 0, 0) a (5, 3, 2)

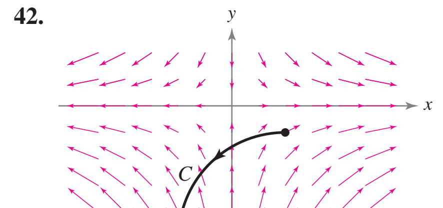
En los ejercicios 41 a 44, determinar si el trabajo efectuado a lo largo de la trayectoria C es positivo, negativo o cero. Explicar.



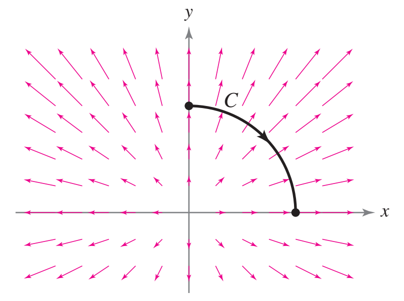
41.



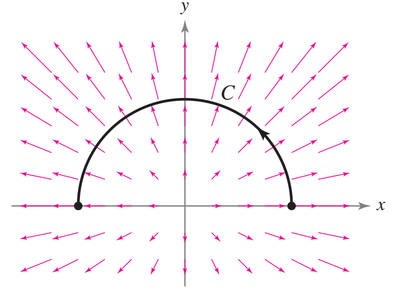
42.



43.



44.



En los ejercicios 45 y 46, para cada curva hallar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Analizar la orientación de la curva y su efecto sobre el valor de la integral.

45. $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$

a) $\mathbf{r}_1(t) = 2t\mathbf{i} + (t - 1)\mathbf{j}, \quad 1 \leq t \leq 3$

b) $\mathbf{r}_2(t) = 2(3 - t)\mathbf{i} + (2 - t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2$

46. $\mathbf{F}(x, y) = x^2y\mathbf{i} + xy^{3/2}\mathbf{j}$

a) $\mathbf{r}_1(t) = (t + 1)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2$

b) $\mathbf{r}_2(t) = (1 + 2\cos t)\mathbf{i} + (4\cos^2 t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq \pi/2$

En los ejercicios 47 a 50, demostrar la propiedad

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

independientemente de cuáles sean los puntos inicial y final de *C*, si el vector tangente r′(*t*) es ortogonal al campo de fuerzas F.

47. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$

C: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} - 2t\mathbf{j}$

48. $\mathbf{F}(x, y) = -3y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

C: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} - t^3\mathbf{j}$

49. $\mathbf{F}(x, y) = (x^3 - 2x^2)\mathbf{i} + \left(x - \frac{y}{2}\right)\mathbf{j}$

C: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$

50. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

C: $\mathbf{r}(t) = 3\,\text{sen}\,t\mathbf{i} + 3\cos t\mathbf{j}$

En los ejercicios 51 a 54, evaluar la integral de línea a lo largo de la trayectoria *C* dada por $x = 2t$, $y = 10t$, donde $0 \leq t \leq 1$.

51. $\int_C (x + 3y^2)\,dy$

52. $\int_C (x + 3y^2)\,dx$

53. $\int_C xy\,dx + y\,dy$

54. $\int_C (3y - x)\,dx + y^2\,dy$

En los ejercicios 55 a 62, evaluar la integral

$$\int_C (2x - y)\,dx + (x + 3y)\,dy$$

a lo largo de la trayectoria *C*.

55. C: eje x desde $x = 0$ hasta $x = 5$

56. C: eje y desde $y = 0$ hasta $y = 2$

57. C: los segmentos de recta de (0, 0) a (3, 0) y de (3, 0) a (3, 3)

58. C: los segmentos de recta de (0, 0) a (0, −3) y de (0, −3) a (2, −3)

59. C: arco sobre $y = 1 - x^2$ desde (0, 1) hasta (1, 0)

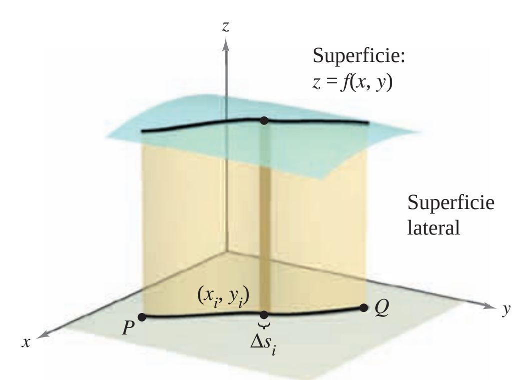
60. C: arco sobre $y = x^{3/2}$ desde (0, 0) hasta (4, 8)

61. C: trayectoria parabólica $x = t$, $y = 2t^2$, desde (0, 0) hasta (2, 8)

62. C: trayectoria elíptica $x = 4\,\text{sen}\,t$, $y = 3\cos t$, desde (0, 3) hasta (4, 0)

Área de una superficie lateral **En los ejercicios 63 a 70, hallar el área de la superficie lateral (ver la figura) sobre la curva *C* en el plano *xy* y bajo la superficie $z = f(x, y)$, donde**

$$\textbf{Área de la superficie lateral} = \int_C f(x, y)\,ds.$$



C: curva en el plano xy

63. $f(x, y) = h$, C: recta desde (0, 0) hasta (3, 4)

64. $f(x, y) = y$, C: recta desde (0, 0) hasta (4, 4)

65. $f(x, y) = xy$, C: $x^2 + y^2 = 1$ desde (1, 0) hasta (0, 1)

66. $f(x, y) = x + y$, C: $x^2 + y^2 = 1$ desde (1, 0) hasta (0, 1)

67. $f(x, y) = h$, C: $y = 1 - x^2$ desde (1, 0) hasta (0, 1)

68. $f(x, y) = y + 1$, C: $y = 1 - x^2$ desde (1, 0) hasta (0, 1)

69. $f(x, y) = xy$, C: $y = 1 - x^2$ desde (1, 0) hasta (0, 1)

70. $f(x, y) = x^2 - y^2 + 4$, C: $x^2 + y^2 = 4$

71. ***Diseño de motores*** Un motor de tractor tiene una pieza de acero con una base circular representada por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,t\mathbf{j}$. Su altura está dada por $z = 1 + y^2$. (Todas las medidas en centímetros.)

a) Hallar el área de la superficie lateral de la pieza.

b) La pieza tiene forma de capa de 0.2 centímetros de espesor. Utilizar el resultado del inciso *a*) para aproximar la cantidad de acero empleada para su fabricación.

c) Hacer un dibujo de la pieza.

72. ***Diseño de edificios*** La altura del techo de un edificio está dada por $z = 20 + \frac{1}{4}x$, y una de las paredes sigue una trayectoria representada por $y = x^{3/2}$. Calcular el área de la superficie de la pared si $0 \leq x \leq 40$. (Todas las medidas se dan en pies.)

Momentos de inercia **Considerar un cable de densidad $\rho(x, y)$ dado por la curva en el espacio**

$$C\colon\ \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad a \leq t \leq b.$$

Los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y están dados por

$$I_x = \int_C y^2\,\rho(x, y)\,ds$$

$$I_y = \int_C x^2\,\rho(x, y)\,ds.$$

En los ejercicios 73 y 74, hallar los momentos de inercia del cable dado con densidad ρ.

73. El cable se encuentra a lo largo de $\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,t\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ y $a > 0$, su densidad es $\rho(x, y) = 1$.

74. El cable se encuentra a lo largo de $\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,t\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ y $a > 0$, su densidad es $\rho(x, y) = y$.

CAS **75.** ***Investigación*** El borde exterior de un sólido con lados verticales y que descansa en el plano xy, se representa por $\mathbf{r}(t) = 3\cos t\mathbf{i} + 3\,\text{sen}\,t\mathbf{j} + (1 + \text{sen}^2\,2t)\mathbf{k}$, donde todas las medidas se dan en centímetros. La intersección del plano $y = b\ (-3 < b < 3)$ con la parte superior del sólido es una recta horizontal.

a) Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente el sólido.

b) Utilizar un sistema algebraico por computadora y aproximar el área de la superficie lateral del sólido.

c) Hallar (si es posible) el volumen del sólido.

76. ***Trabajo*** Una partícula se mueve a lo largo de la trayectoria $y = x^2$ desde el punto $(0, 0)$ hasta el punto $(1, 1)$. El campo de fuerzas $\mathbf{F}$ se mide en cinco puntos a lo largo de la trayectoria y los resultados se muestran en la tabla. Usar la regla de Simpson o una herramienta de graficación para aproximar el trabajo efectuado por el campo de fuerza.

(x, y)	$(0, 0)$	$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$	$\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{16}\right)$	$(1, 1)$
$\mathbf{F}(x, y)$	$\langle 5, 0\rangle$	$\langle 3.5, 1\rangle$	$\langle 2, 2\rangle$	$\langle 1.5, 3\rangle$	$\langle 1, 5\rangle$

77. ***Trabajo*** Determinar el trabajo hecho por una persona que pesa 175 libras y que camina exactamente una revolución hacia arriba en una escalera de forma helicoidal circular de 3 pies de radio si la persona sube 10 pies.

78. ***Investigación*** Determinar el valor c tal que el trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$\mathbf{F}(x, y) = 15[(4 - x^2y)\mathbf{i} - xy\mathbf{j}]$$

sobre un objeto que se mueve a lo largo de la trayectoria parabólica $y = c(1 - x^2)$ entre los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ sea mínimo. Comparar el resultado con el trabajo requerido para mover el objeto a lo largo de la trayectoria recta que une esos dos puntos.

Desarrollo de conceptos

79. Definir la integral de línea de una función f a lo largo de una curva suave C en el plano y en el espacio. ¿Cómo se evalúa la integral de línea como integral definida?

80. Definir una integral de línea de un campo vectorial continuo $\mathbf{F}$ sobre una curva suave C. ¿Cómo se evalúa la integral de línea como integral definida?

81. Ordenar las superficies en forma ascendente del área de la superficie lateral bajo la superficie y sobre la curva $y = \sqrt{x}$ desde $(0, 0)$ hasta $(4, 2)$ en el plano xy. Explicar el orden elegido sin hacer cálculo alguno.

a) $z_1 = 2 + x$ *b*) $z_2 = 5 + x$

c) $z_3 = 2$ *d*) $z_4 = 10 + x + 2y$

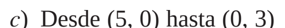
Para discusión

82. En cada uno de los incisos siguientes, determinar si el trabajo realizado para mover un objeto del primero hasta el segundo punto a través del campo de fuerzas mostrado en la figura es positivo, negativo o cero. Explicar la respuesta.

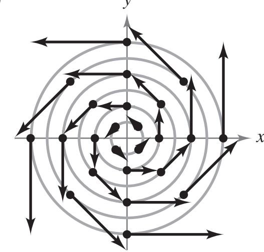
a) Desde $(-3, -3)$ hasta $(3, 3)$



b) Desde $(-3, 0)$ hasta $(0, 3)$



c) Desde $(5, 0)$ hasta $(0, 3)$



¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 83 a 86, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.**

83. Si C está dada por $x(t) = t$, $y(t) = t$, $0 \leq t \leq 1$, entonces

$$\int_C xy\,ds = \int_0^1 t^2\,dt.$$

84. Si $C_2 = -C_1$, entonces $\int_{C_1} f(x, y)\,ds + \int_{C_2} f(x, y)\,ds = 0$.

85. Las funciones vectoriales $\mathbf{r}_1 = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 1$, y $\mathbf{r}_2 = (1 - t)\mathbf{i} + (1 - t)^2\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 1$, definen la misma curva.

86. Si $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds = 0$, entonces $\mathbf{F}$ y $\mathbf{T}$ son ortogonales.

87. ***Trabajo*** Considerar una partícula que se mueve a través del campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y) = (y - x)\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$ del punto $(0, 0)$ al punto $(0, 1)$ a lo largo de la curva $x = kt(1 - t)$, $y = t$. Hallar el valor de k, tal que el trabajo realizado por el campo de fuerzas sea 1.

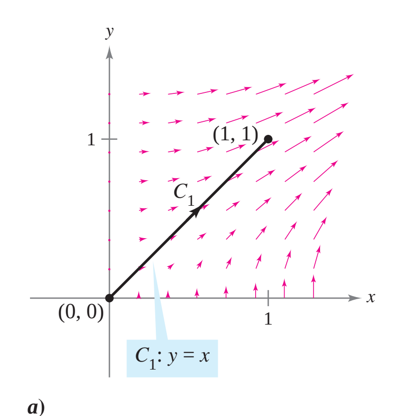
15.3 Campos vectoriales conservativos e independencia de la trayectoria

- **Comprender y utilizar el teorema fundamental de las integrales de línea.**
- **Comprender el concepto de independencia de la trayectoria.**
- **Comprender el concepto de conservación de energía.**

Teorema fundamental de las integrales de línea

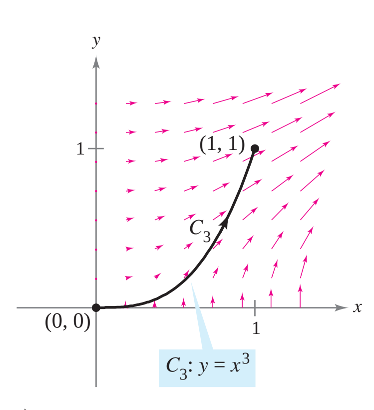
El estudio realizado en la sección anterior indica que en un campo gravitatorio el trabajo realizado por la gravedad sobre un objeto que se mueve entre dos puntos en el campo es independiente de la trayectoria seguida por el objeto. En esta sección se estudia una generalización importante de este resultado, a la que se le conoce como **teorema fundamental de las integrales de línea**.

Para empezar, se presenta un ejemplo en el que se evalúa la integral de línea de un *campo vectorial conservativo* por tres trayectorias diferentes.



a)

b)



c)

Figura 15.19

EJEMPLO 1 Integral de línea de un campo vectorial conservativo

Hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{2}xy\mathbf{i} + \frac{1}{4}x^2\mathbf{j}$$

sobre una partícula que se mueve de (0, 0) a (1, 1) a lo largo de cada una de las trayectorias, como se muestra en la figura 15.19.

a) C_1: $y = x$ ***b***) C_2: $x = y^2$ ***c***) C_3: $y = x^3$

Solución

a) Sea $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}$ para $0 \le t \le 1$, por lo que

$$d\mathbf{r} = (\mathbf{i} + \mathbf{j})\,dt \qquad \text{y} \qquad \mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{2}t^2\mathbf{i} + \frac{1}{4}t^2\mathbf{j}.$$

Entonces, el trabajo realizado es

$$W = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \frac{3}{4}t^2\,dt = \frac{1}{4}t^3\Big]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

b) Sea $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \sqrt{t}\mathbf{j}$ para $0 \le t \le 1$, por lo que

$$d\mathbf{r} = \left(\mathbf{i} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\mathbf{j}\right)dt \qquad \text{y} \qquad \mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{2}t^{3/2}\mathbf{i} + \frac{1}{4}t^2\mathbf{j}.$$

Entonces, el trabajo realizado es

$$W = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \frac{5}{8}t^{3/2}\,dt = \frac{1}{4}t^{5/2}\Big]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

c) Sea $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}t\mathbf{i} + \frac{1}{8}t^3\mathbf{j}$ para $0 \le t \le 2$, por lo que

$$d\mathbf{r} = \left(\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{3}{8}t^2\mathbf{j}\right)dt \qquad \text{y} \qquad \mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{32}t^4\mathbf{i} + \frac{1}{16}t^2\mathbf{j}.$$

Entonces, el trabajo realizado es

$$W = \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^2 \frac{5}{128}t^4\,dt = \frac{1}{128}t^5\Big]_0^2 = \frac{1}{4}.$$

Por tanto, el trabajo realizado por un campo vectorial conservativo es el mismo para todas las trayectorias.

En el ejemplo 1, obsérvese que el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{2}xy\mathbf{i} + \frac{1}{4}x^2\mathbf{j}$ es conservativo porque $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$, donde $f(x, y) = \frac{1}{4}x^2y$. En tales casos, el teorema siguiente establece que el valor de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ está dado por

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= f(x(1), y(1)) - f(x(0), y(0)) \\ &= \frac{1}{4} - 0 \\ &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

TEOREMA 15.5 TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAS INTEGRALES DE LÍNEA

Sea C una curva suave a trozos contenida en una región abierta R y dada por

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad a \le t \le b.$$

Si $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ es conservativo en R, y M y N son continuas en R, entonces,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a))$$

donde f es una función potencial de $\mathbf{F}$. Es decir, $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$.

NOTA El teorema fundamental de las integrales de línea es similar al teorema fundamental de cálculo (sección 4.4) que establece que

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

donde $F'(x) = f(x)$. ■

DEMOSTRACIÓN Esta demostración es sólo para una curva suave. Para curvas suaves a trozos (o por partes), el procedimiento se lleva a cabo por separado para cada trozo suave. Como $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}$, se sigue que

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt \\ &= \int_a^b \left[f_x(x, y)\frac{dx}{dt} + f_y(x, y)\frac{dy}{dt} \right] dt\end{aligned}$$

y, por la regla de la cadena (teorema 13.6), se tiene

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \frac{d}{dt}[f(x(t), y(t))]\, dt \\ &= f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a)).\end{aligned}$$

El último paso es una aplicación del teorema fundamental del cálculo.

En el espacio, el teorema fundamental de las integrales de línea adopta la forma siguiente. Sea C una curva suave a trozos contenida en una región abierta Q y dada por

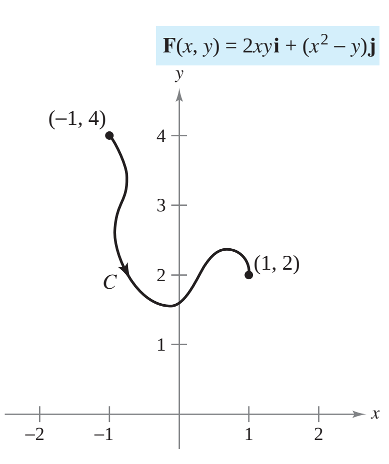
$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad a \le t \le b.$$

Si $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es conservativo y M, N y P son continuas, entonces

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} \\ &= f(x(b), y(b), z(b)) - f(x(a), y(a), z(a))\end{aligned}$$

donde $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$.

El teorema fundamental de las integrales de línea establece que si el campo vectorial $\mathbf{F}$ es conservativo, entonces la integral de línea entre dos puntos cualesquiera es simplemente la diferencia entre los valores de la función *potencial* f en estos puntos.



Aplicación del teorema fundamental de las integrales de línea, $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$
Figura 15.20

EJEMPLO 2 Aplicación del teorema fundamental de las integrales de línea

Evaluar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde C es una curva suave a trozos desde $(-1, 4)$ hasta $(1, 2)$ y

$$\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 - y)\mathbf{j}$$

como se muestra en la figura 15.20.

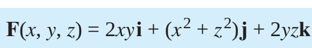
Solución Por el ejemplo 6 de la sección 15.1, se sabe que **F** es el gradiente de f, donde

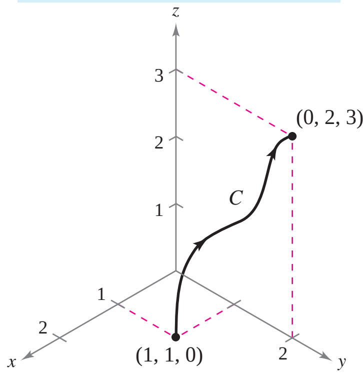
$$f(x, y) = x^2y - \frac{y^2}{2} + K.$$

Por consiguiente, **F** es conservativo, y por el teorema fundamental de las integrales de línea, se sigue que

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= f(1, 2) - f(-1, 4) \\ &= \left[1^2(2) - \frac{2^2}{2}\right] - \left[(-1)^2(4) - \frac{4^2}{2}\right] \\ &= 4.\end{aligned}$$

Nótese que no es necesario incluir una constante K como parte de f, ya que se cancela por sustracción.





Aplicación del teorema fundamental de las integrales de línea, $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$
Figura 15.21

EJEMPLO 3 Aplicación del teorema fundamental de las integrales de línea

Evaluar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde C es una curva suave a trozos desde $(1, 1, 0)$ hasta $(0, 2, 3)$ y

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 + z^2)\mathbf{j} + 2yz\mathbf{k}$$

como se muestra en la figura 15.21.

Solución Por el ejemplo 8 en la sección 15.1, se sabe que **F** es el gradiente de f, donde $f(x, y, z) = x^2y + yz^2 + K$. Por consiguiente, **F** es conservativo, y por el teorema fundamental de las integrales de línea, se sigue que

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= f(0, 2, 3) - f(1, 1, 0) \\ &= [(0)^2(2) + (2)(3)^2] - [(1)^2(1) + (1)(0)^2] \\ &= 17.\end{aligned}$$

En los ejemplos 2 y 3, es importante notar que el valor de la integral de línea es el mismo para cualquier curva suave C que tenga los puntos inicial y final dados. Así, en el ejemplo 3, trátese de evaluar la integral de línea de la curva dada por

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{i} + (1 + t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}.$$

Se obtendrá

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 (30t^2 + 16t - 1)\, dt \\ &= 17.\end{aligned}$$

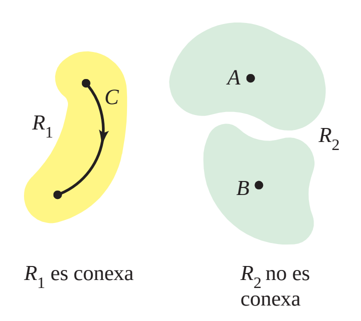


Figura 15.22

Independencia de la trayectoria

Por el teorema fundamental de las integrales de línea es evidente que si **F** es continuo y conservativo en una región abierta R, el valor de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es el mismo para toda curva suave a trozos C que vaya de un punto fijo de R a otro punto fijo de R. Esto se describe diciendo que la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es **independiente de la trayectoria** en la región R.

Una región en el plano (o en el espacio) es **conexa** si cada dos puntos en la región pueden ser unidos por una curva suave a trozos que se encuentre completamente dentro de la región, como se muestra en la figura 15.22. En regiones abiertas y *conexas*, la independencia de la trayectoria de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es equivalente a la condición de que **F** sea conservativo.

TEOREMA 15.6 INDEPENDENCIA DE LA TRAYECTORIA Y CAMPOS VECTORIALES CONSERVATIVOS

Si **F** es continuo en una región abierta y conexa, entonces la integral de línea

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

es independiente de la trayectoria si y sólo si **F** es conservativo.

DEMOSTRACIÓN Si **F** es conservativo, entonces, por el teorema fundamental de las integrales de línea, la integral de línea es independiente de la trayectoria. Ahora se demuestra el recíproco para una región plana conexa R. Sea $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$, y sea (x_0, y_0) un punto fijo en R. Si (x, y) es cualquier punto en R, elíjase una curva suave a trozos C que vaya de (x_0, y_0) a (x, y), y defínase f como

$$f(x, y) = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C M\,dx + N\,dy.$$

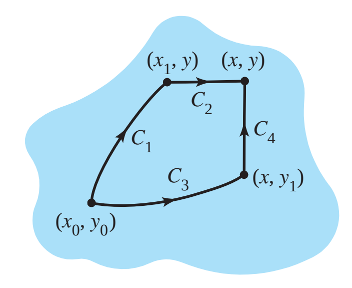


Figura 15.23

La existencia de C en R está garantizada por el hecho de que R es conexa. Se puede mostrar que f es una función potencial de **F** considerando dos trayectorias diferentes entre (x_0, y_0) y (x, y). Para la *primera* trayectoria, elíjase (x_1, y) en R tal que $x \neq x_1$. Esto es posible ya que R es abierta. Después elíjanse C_1 y C_2, como se muestra en la figura 15.23. Utilizando la independencia de la trayectoria, se sigue que

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_C M\,dx + N\,dy \\ &= \int_{C_1} M\,dx + N\,dy + \int_{C_2} M\,dx + N\,dy. \end{aligned}$$

Como la primera integral no depende de x, y como $dy = 0$ en la segunda integral, se tiene

$$f(x, y) = g(y) + \int_{C_2} M\,dx$$

y entonces, la derivada parcial de f con respecto a x es $f_x(x, y) = M$. Para la *segunda* trayectoria, se elige un punto (x, y_1). Utilizando un razonamiento similar al empleado para la primera trayectoria, se concluye que $f_y(x, y) = N$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} \\ &= M\mathbf{i} + N\mathbf{j} \\ &= \mathbf{F}(x, y) \end{aligned}$$

y se sigue que **F** es conservativo.

EJEMPLO 4 Trabajo en un campo de fuerzas conservativo

Para el campo de fuerzas dado por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = e^x \cos y\mathbf{i} - e^x \operatorname{sen} y\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

mostrar que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria, y calcular el trabajo realizado por **F** sobre un objeto que se mueve a lo largo de una curva C desde $(0, \pi/2, 1)$ hasta $(1, \pi, 3)$.

Solución Al expresar el campo de fuerzas en la forma $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$, se tiene $M = e^x \cos y$, $N = -e^x \operatorname{sen} y$ y $P = 2$, y se sigue que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N}{\partial z}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 = \frac{\partial M}{\partial z}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -e^x \operatorname{sen} y = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Por tanto, **F** es conservativo. Si f es una función potencial de **F**, entonces

$$f_x(x, y, z) = e^x \cos y$$

$$f_y(x, y, z) = -e^x \operatorname{sen} y$$

$$f_z(x, y, z) = 2.$$

Integrando con respecto a x, y y z por separado, se obtiene

$$f(x, y, z) = \int f_x(x, y, z)\, dx = \int e^x \cos y\, dx = e^x \cos y + g(y, z)$$

$$f(x, y, z) = \int f_y(x, y, z)\, dy = \int -e^x \operatorname{sen} y\, dy = e^x \cos y + h(x, z)$$

$$f(x, y, z) = \int f_z(x, y, z)\, dz = \int 2\, dz = 2z + k(x, y).$$

Comparando estas tres versiones de $f(x, y, z)$, se concluye que

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + 2z + K.$$

Así, el trabajo realizado por **F** a lo largo de *cualquier* curva C desde $(0, \pi/2, 1)$ hasta $(1, \pi, 3)$ es

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \Big[e^x \cos y + 2z \Big]_{(0,\, \pi/2,\, 1)}^{(1,\, \pi,\, 3)} \\ &= (-e + 6) - (0 + 2) \\ &= 4 - e. \end{aligned}$$

¿Cuánto trabajo se realizaría si el objeto del ejemplo 4 se moviera del punto $(0, \pi/2, 1)$ al punto $(1, \pi, 3)$ y después volviera al punto de partida $(0, \pi/2, 1)$? El teorema fundamental de las integrales de línea establece que el trabajo realizado sería cero. Recuérdese que, por definición, el trabajo puede ser negativo. Así, en el momento en el que el objeto vuelve a su punto de partida, la cantidad de trabajo que se registra positivamente se cancela por la cantidad de trabajo que se registra negativamente.

Una curva C dada por $\mathbf{r}(t)$ para $a \le t \le b$ es **cerrada** si $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$. Por el teorema fundamental de las integrales de línea, se puede concluir que si $\mathbf{F}$ es continuo y conservativo en una región abierta R, entonces la integral de línea sobre toda curva cerrada C es 0.

NOTA El teorema 15.7 proporciona varias opciones para calcular una integral de línea de un campo vectorial conservativo. Se puede usar una función potencial, o puede ser más conveniente elegir una trayectoria particularmente simple, como un segmento de recta. ■

TEOREMA 15.7 CONDICIONES EQUIVALENTES

Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ con primeras derivadas parciales continuas en una región abierta conexa R, y sea C una curva suave a trozos en R. Las condiciones siguientes son equivalentes.

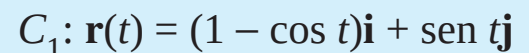
1. $\mathbf{F}$ es conservativo. Es decir, $\mathbf{F} = \nabla f$ para alguna función f.
2. $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria.
3. $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda curva *cerrada* C en R.

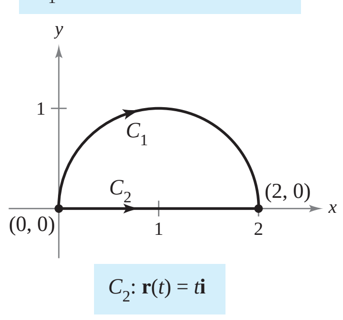
EJEMPLO 5 Evaluación de una integral de línea

Evaluar $\displaystyle\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde

$$\mathbf{F}(x, y) = (y^3 + 1)\mathbf{i} + (3xy^2 + 1)\mathbf{j}$$

y C_1 es la trayectoria semicircular de (0, 0) a (2, 0), que se muestra en la figura 15.24.





C_2: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i}$

Figura 15.24

Solución Se tienen las tres opciones siguientes.

***a*)** Se puede utilizar el método presentado en la sección anterior para evaluar la integral de línea a lo largo de la *curva dada*. Para esto, se puede usar la parametrización $\mathbf{r}(t) = (1 - \cos t)\mathbf{i} + \text{sen } t\mathbf{j}$, donde $0 \le t \le \pi$. Con esta parametrización, se sigue que $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)\, dt = (\text{sen } t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j})\, dt$, y

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi} (\text{sen } t + \text{sen}^4 t + \cos t + 3\text{sen}^2 t \cos t - 3\text{sen}^2 t \cos^2 t)\, dt.$$

Esta integral desanimará a cualquiera que haya elegido esta opción.

***b*)** Se puede intentar hallar una *función potencial* y evaluar la integral de línea mediante el teorema fundamental de las integrales de línea. Empleando la técnica demostrada en el ejemplo 4, se encuentra que la función potencial es $f(x, y) = xy^3 + x + y + K$, y, por el teorema fundamental,

$$W = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(2, 0) - f(0, 0) = 2.$$

***c*)** Sabiendo que $\mathbf{F}$ es conservativo, se tiene una tercera opción. Como el valor de la integral de línea es independiente de la trayectoria, se puede reemplazar la trayectoria semicircular con una *trayectoria más simple*. Supóngase que se elige la trayectoria rectilínea C_2 desde (0, 0) hasta (2, 0). Entonces, $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i}$, donde $0 \le t \le 2$. Así, $d\mathbf{r} = \mathbf{i}\, dt$ y $\mathbf{F}(x, y) = (y^3 + 1)\mathbf{i} + (3xy^2 + 1)\mathbf{j} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, de manera que

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^2 1\, dt = t\Big]_0^2 = 2.$$

Obviamente, de las tres opciones, la tercera es la más sencilla.

Conservación de la energía

The Granger Collection

MICHAEL FARADAY (1791-1867)

Varios filósofos de la ciencia han considerado que la ley de Faraday de la conservación de la energía es la mayor generalización concebida por el pensamiento humano. Muchos físicos han contribuido a nuestro conocimiento de esta ley; dos de los primeros y más importantes fueron James Prescott Joule (1818-1889) y Hermann Ludwig Helmholtz (1821-1894).

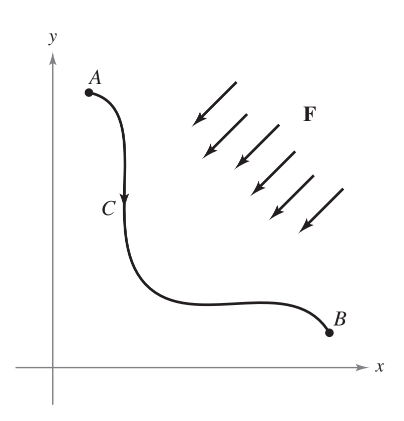
En 1840, el físico inglés Michael Faraday escribió: "En ninguna parte hay una creación o producción pura de energía sin un consumo correspondiente de algo que la proporcione." Esta declaración representa la primera formulación de una de las leyes más importantes de la física: la **ley de conservación de la energía**. En la terminología moderna, la ley dice lo siguiente: *En un campo de fuerzas conservativo, la suma de energías potencial y cinética de un objeto se mantiene constante de punto a punto*.

Se puede usar el teorema fundamental de las integrales de línea para deducir esta ley. De la física se sabe que la **energía cinética** de una partícula de masa m y velocidad v es $k = \frac{1}{2}mv^2$. La **energía potencial** p de una partícula en el punto (x, y, z) en un campo vectorial conservativo $\mathbf{F}$ se define como $p(x, y, z) = -f(x, y, z)$, donde f es la función potencial de $\mathbf{F}$. Consecuentemente, el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ a lo largo de una curva suave C desde A hasta B es

$$\begin{aligned} W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= f(x, y, z)\Big]_A^B \\ &= -p(x, y, z)\Big]_A^B \\ &= p(A) - p(B) \end{aligned}$$

como se muestra en la figura 15.25. En otras palabras, el trabajo W es igual a la diferencia entre las energías potenciales en A y B. Ahora, supóngase que $\mathbf{r}(t)$ es el vector posición de una partícula que se mueve a lo largo de C desde $A = \mathbf{r}(a)$ hasta $B = \mathbf{r}(b)$. En cualquier instante t, la velocidad, aceleración y rapidez de la partícula son $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$, $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ y $v(t) = \|\mathbf{v}(t)\|$, respectivamente. Así, por la segunda ley del movimiento de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}(t) = m(\mathbf{v}'(t))$, y el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ es

$$\begin{aligned} W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt \\ &= \int_a^b \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}(t)\, dt = \int_a^b [m\mathbf{v}'(t)] \cdot \mathbf{v}(t)\, dt \\ &= \int_a^b m[\mathbf{v}'(t) \cdot \mathbf{v}(t)]\, dt \\ &= \frac{m}{2}\int_a^b \frac{d}{dt}[\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t)]\, dt \\ &= \frac{m}{2}\int_a^b \frac{d}{dt}[\|\mathbf{v}(t)\|^2]\, dt \\ &= \frac{m}{2}\Big[\|\mathbf{v}(t)\|^2\Big]_a^b \\ &= \frac{m}{2}\Big[[v(t)]^2\Big]_a^b \\ &= \frac{1}{2}m[v(b)]^2 - \frac{1}{2}m[v(a)]^2 \\ &= k(B) - k(A). \end{aligned}$$



El trabajo realizado por $\mathbf{F}$ a lo largo de C es

$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = p(A) - p(B)$

Figura 15.25

Igualando estos dos resultados obtenidos para W se tiene

$$\begin{aligned} p(A) - p(B) &= k(B) - k(A) \\ p(A) + k(A) &= p(B) + k(B) \end{aligned}$$

lo cual implica que la suma de energías potencial y cinética permanece constante de punto a punto.

15.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, mostrar que el valor de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es el mismo para cada representación paramétrica de *C*.

1. $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$
   a) $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 1$
   b) $\mathbf{r}_2(\theta) = \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}^2\theta\,\mathbf{j}, \quad 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$
2. $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} - x\mathbf{j}$
   a) $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + \sqrt{t}\,\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 4$
   b) $\mathbf{r}_2(w) = w^2\mathbf{i} + w\mathbf{j}, \quad 0 \le w \le 2$
3. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$
   a) $\mathbf{r}_1(\theta) = \sec\theta\,\mathbf{i} + \tan\theta\,\mathbf{j}, \quad 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{3}$
   b) $\mathbf{r}_2(t) = \sqrt{t + 1}\,\mathbf{i} + \sqrt{t}\,\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 3$
4. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$
   a) $\mathbf{r}_1(t) = (2 + t)\mathbf{i} + (3 - t)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 3$
   b) $\mathbf{r}_2(w) = (2 + \ln w)\mathbf{i} + (3 - \ln w)\mathbf{j}, \quad 1 \le w \le e^3$

En los ejercicios 5 a 10, determinar si el campo vectorial es o no conservativo.

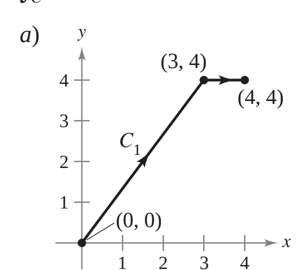
5. $\mathbf{F}(x, y) = e^x(\operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + \cos y\,\mathbf{j})$
6. $\mathbf{F}(x, y) = 15x^2y^2\mathbf{i} + 10x^3y\mathbf{j}$
7. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{1}{y^2}(y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$
8. $\mathbf{F}(x, y, z) = y \ln z\,\mathbf{i} - x \ln z\,\mathbf{j} + \dfrac{xy}{z}\mathbf{k}$
9. $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2z\mathbf{i} + 2xyz\mathbf{j} + xy^2\mathbf{k}$
10. $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen} yz\,\mathbf{i} + xz\cos yz\,\mathbf{j} + xy\operatorname{sen} yz\,\mathbf{k}$

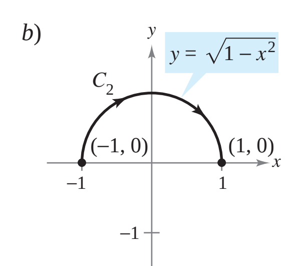
En los ejercicios 11 a 24, hallar el valor de la integral de línea

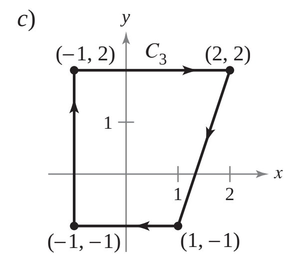
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

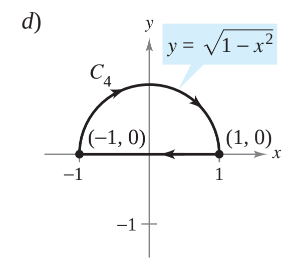
(*Sugerencia:* Si F es conservativo, la integración puede ser más sencilla a través de una trayectoria alternativa.)

11. $\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$
    a) $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 1$
    b) $\mathbf{r}_2(t) = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 1$
12. $\mathbf{F}(x, y) = ye^{xy}\mathbf{i} + xe^{xy}\mathbf{j}$
    a) $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} - (t - 3)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 3$
    b) La trayectoria cerrada que consiste en segmentos de recta desde (0, 3) hasta (0, 0), después desde (0, 0) hasta (3, 0) y desde (3, 0) hasta (0, 3)
13. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$
    a) $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 1$
    b) $\mathbf{r}_2(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 1$
    c) $\mathbf{r}_3(t) = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 1$
14. $\mathbf{F}(x, y) = xy^2\mathbf{i} + 2x^2y\mathbf{j}$
    a) $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + \dfrac{1}{t}\mathbf{j}, \quad 1 \le t \le 3$
    b) $\mathbf{r}_2(t) = (t + 1)\mathbf{i} - \frac{1}{3}(t - 3)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 2$
15. $\displaystyle\int_C y^2\,dx + 2xy\,dy$

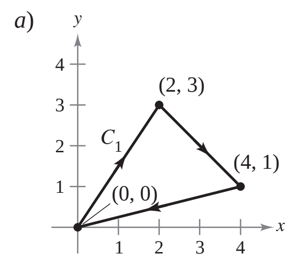
a)


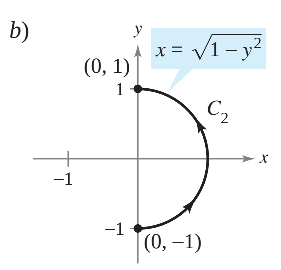
b)


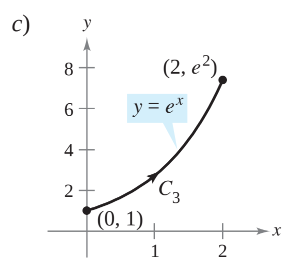
c)


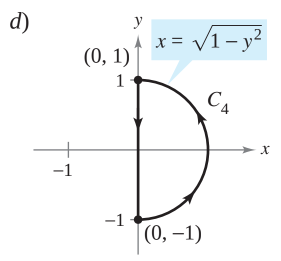
d)


16. $\displaystyle\int_C (2x - 3y + 1)\,dx - (3x + y - 5)\,dy$

a)


b)


c)


d)


17. $\displaystyle\int_C 2xy\,dx + (x^2 + y^2)\,dy$
    a) C: elipse $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ desde (5, 0) hasta (0, 4)
    b) C: parábola $y = 4 - x^2$ desde (2, 0) hasta (0, 4)

18. $\int_C (x^2 + y^2)\, dx + 2xy\, dy$

a) $\mathbf{r}_1(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 2$

b) $\mathbf{r}_2(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\, t\,\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

19. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$

a) $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 4$

b) $\mathbf{r}_2(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 2$

20. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + z\mathbf{j} + y\mathbf{k}$

a) $\mathbf{r}_1(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \text{sen}\, t\,\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \pi$

b) $\mathbf{r}_2(t) = (1 - 2t)\mathbf{i} + \pi^2 t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1$

21. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2y + x)\mathbf{i} + (x^2 - z)\mathbf{j} + (2y - 4z)\mathbf{k}$

a) $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1$

b) $\mathbf{r}_2(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (2t - 1)^2\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1$

22. $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 3xz^2\mathbf{k}$

a) $\mathbf{r}_1(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \text{sen}\, t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \pi$

b) $\mathbf{r}_2(t) = (1 - 2t)\mathbf{i} + \pi t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1$

23. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^z(y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + xy\mathbf{k})$

a) $\mathbf{r}_1(t) = 4\cos t\,\mathbf{i} + 4\,\text{sen}\, t\,\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \pi$

b) $\mathbf{r}_2(t) = (4 - 8t)\mathbf{i} + 3\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1$

24. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\text{sen}\, z\,\mathbf{i} + x\,\text{sen}\, z\,\mathbf{j} + xy\cos x\,\mathbf{k}$

a) $\mathbf{r}_1(t) = t^2\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 2$

b) $\mathbf{r}_2(t) = 4t\mathbf{i} + 4t\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 1$

En los ejercicios 25 a 34, evaluar la integral de línea utilizando el teorema fundamental de las integrales de línea. Utilizar un sistema algebraico por computadora y verificar los resultados.

25. $\int_C (3y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j}) \cdot d\mathbf{r}$

C: curva suave desde (0, 0) hasta (3, 8)

26. $\int_C [2(x + y)\mathbf{i} + 2(x + y)\mathbf{j}] \cdot d\mathbf{r}$

C: curva suave desde (–1, 1) hasta (3, 2)

27. $\int_C \cos x\,\text{sen}\, y\, dx + \text{sen}\, x \cos y\, dy$

C: curva suave desde $(0, -\pi)$ hasta $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

28. $\int_C \frac{y\, dx - x\, dy}{x^2 + y^2}$

C: curva suave desde (1, 1) hasta $\left(2\sqrt{3}, 2\right)$

29. $\int_C e^x\,\text{sen}\, y\, dx + e^x \cos y\, dy$

C: cicloide $x = \theta - \text{sen}\,\theta,\ y = 1 - \cos\theta$ desde (0, 0) hasta $(2\pi, 0)$

30. $\int_C \frac{2x}{(x^2 + y^2)^2}\, dx + \frac{2y}{(x^2 + y^2)^2}\, dy$

C: círculo $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 9$ en sentido de las manecillas del reloj desde (7, 5) hasta (1, 5)

31. $\int_C (z + 2y)\, dx + (2x - z)\, dy + (x - y)\, dz$

a) C: segmento de recta desde (0, 0, 0) hasta (1, 1, 1)

b) C: segmento de recta de (0, 0, 0) a (0, 0, 1) a (1, 1, 1)

c) C: segmento de recta de (0, 0, 0) a (1, 0, 0) a (1, 1, 0) y a (1, 1, 1)

32. Repetir el ejercicio 31 utilizando la integral

$$\int_C zy\, dx + xz\, dy + xy\, dz.$$

33. $\int_C -\text{sen}\, x\, dx + z\, dy + y\, dz$

C: curva suave desde (0, 0, 0) hasta $\left(\frac{\pi}{2}, 3, 4\right)$

34. $\int_C 6x\, dx - 4z\, dy - (4y - 20z)\, dz$

C: curva suave desde (0, 0, 0) hasta (3, 4, 0)

Trabajo **En los ejercicios 35 y 36, hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas F al mover un objeto desde *P* hasta *Q*.**

35. $\mathbf{F}(x, y) = 9x^2y^2\mathbf{i} + (6x^3y - 1)\mathbf{j};\ P(0, 0),\ Q(5, 9)$

36. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{2x}{y}\mathbf{i} - \frac{x^2}{y^2}\mathbf{j};\ P(-1, 1),\ Q(3, 2)$

37. ***Trabajo*** Una piedra de 1 libra atada al extremo de una cuerda de dos pies se hace girar horizontalmente con un extremo fijo. Realiza una revolución por segundo. Hallar el trabajo realizado por la fuerza **F** que mantiene a la piedra en una trayectoria circular. [*Sugerencia:* Usar fuerza = (masa)(aceleración centrípeta).]

38. ***Trabajo*** Si $\mathbf{F}(x, y, z) = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ es un campo vectorial de fuerza constante, mostrar que el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de la trayectoria desde P hasta Q es $W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{PQ}$.

39. ***Trabajo*** Para tener un medio de escape para los trabajadores en una arriesgada tarea a 50 metros sobre el nivel del suelo, se instala un tobogán de cable. Corre desde su posición hasta un punto a 50 metros de la base de la instalación donde se localizan los trabajadores. Mostrar que el trabajo realizado por el campo de fuerzas gravitatorio para que un hombre de 175 libras recorra la longitud del cable es el mismo en cada una de las trayectorias.

a) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (50 - t)\mathbf{j}$

b) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{50}(50 - t)^2\mathbf{j}$

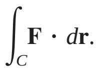
40. ***Trabajo*** ¿Se puede encontrar una trayectoria para el cable del tobogán del ejercicio 39 tal que el trabajo realizado por el campo de fuerzas gravitatorio sea distinto de las cantidades de trabajo realizadas para las dos trayectorias dadas? Explicar por qué sí o por qué no.

Desarrollo de conceptos

41. Enunciar el teorema fundamental de las integrales de línea.

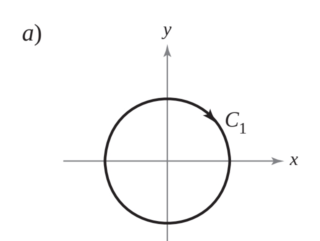
42. ¿Qué significa que una integral de línea sea independiente de la trayectoria? Enunciar el método para determinar si una integral de línea es independiente de la trayectoria.

43. ***Para pensar*** Sea $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{i} - \dfrac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$. Encontrar el valor de la integral de línea

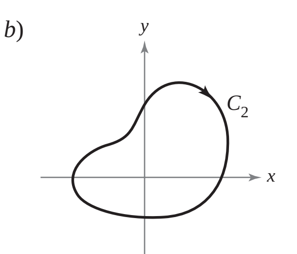


$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

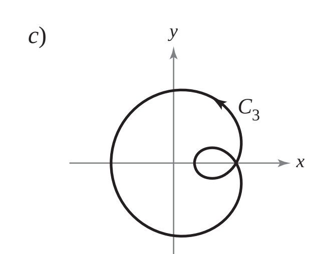
a)



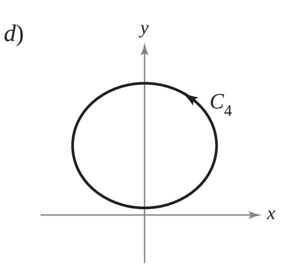
b)



c)

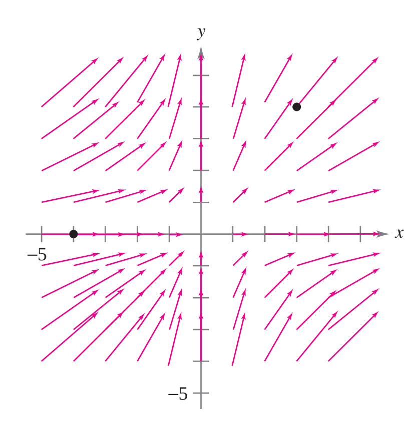


d)



Para discusión

44. Considerar el campo de fuerzas mostrado en la figura.



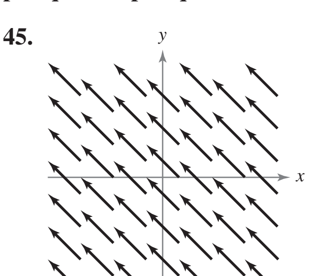
a) Argumentar verbalmente que el campo de fuerzas no es conservativo porque se pueden encontrar dos trayectorias que requieren cantidades diferentes de trabajo para mover un objeto desde $(-4, 0)$ hasta $(3, 4)$. Identificar dos trayectorias y decir cuál requiere mayor cantidad de trabajo.

b) Argumentar verbalmente que el campo de fuerzas no es conservativo porque se puede encontrar una curva cerrada C tal que

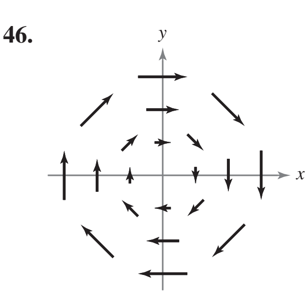
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \neq 0.$$

En los ejercicios 45 y 46, considerar el campo de fuerzas mostrado en la figura. ¿Es el campo de fuerzas conservativo? Explicar por qué sí o por qué no.

45.



46.



¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 47 a 50, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.**

47. Si C_1, C_2 y C_3 tienen los mismos puntos inicial y final y $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_2$, entonces $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 = \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_3$.

48. Si $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ y C está dada por $\mathbf{r}(t) = (4 \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (3 \cos t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq \pi$, entonces $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$.

49. Si $\mathbf{F}$ es conservativo en una región R limitada o acotada por una trayectoria cerrada simple y C está contenida en R, entonces $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria.

50. Si $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ y $\partial M/\partial x = \partial N/\partial y$, entonces $\mathbf{F}$ es conservativo.

51. Una función f es *armónica* si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. Demostrar que si f es armónica, entonces

$$\int_C \left(\frac{\partial f}{\partial y}\,dx - \frac{\partial f}{\partial x}\,dy\right) = 0$$

donde C es una curva suave cerrada en el plano.

52. ***Energía potencial y cinética*** La energía cinética de un objeto que se mueve a través de un campo de fuerzas conservativo disminuye a una velocidad o ritmo de 15 unidades por minuto. ¿A qué ritmo cambia su energía potencial?

53. Sea $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{i} - \dfrac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$.

a) Mostrar que

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

donde

$$M = \frac{y}{x^2 + y^2} \text{ y } N = \frac{-x}{x^2 + y^2}.$$

b) Si $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$ para $0 \leq t \leq \pi$, hallar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

c) Si $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$ para $0 \leq t \leq \pi$, hallar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

d) Si $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$ para $0 \leq t \leq 2\pi$, hallar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. ¿Por qué esto no contradice el teorema 15.7?

e) Mostrar que $\nabla\left(\arctan \dfrac{x}{y}\right) = \mathbf{F}$.

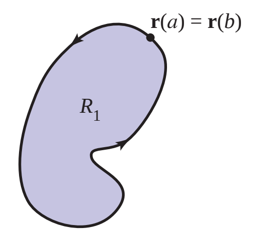
15.4 Teorema de Green

- Utilizar el teorema de Green para evaluar una integral de línea.
- Utilizar formas alternativas del teorema de Green.

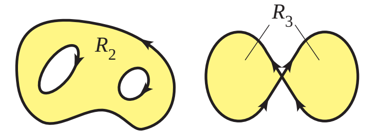
Teorema de Green

En esta sección se estudiará el **teorema de Green**, que recibe este nombre en honor del matemático inglés George Green (1793-1841). Este teorema establece que el valor de una integral doble sobre una región *simplemente conexa* R está determinado por el valor de una integral de línea a lo largo de la frontera de R.

Una curva C dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, donde $a \leq t \leq b$, es **simple** si no se corta a sí misma, es decir, $\mathbf{r}(c) \neq \mathbf{r}(d)$ para todo c y d en el intervalo abierto (a, b). Una región plana R es **simplemente conexa** si cada curva cerrada simple en R encierra sólo puntos que están en R (ver la figura 15.26).



Simplemente conexa



No simplemente conexas

Figura 15.26

> **TEOREMA 15.8 TEOREMA DE GREEN**
>
> Sea R una región simplemente conexa cuya frontera es una curva C suave a trozos, orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj (es decir, C se recorre *una vez* de manera que la región R siempre quede a la *izquierda*). Si M y N tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a R, entonces
>
> $$\int_C M\,dx + N\,dy = \int_R\!\!\int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA.$$

DEMOSTRACIÓN Se da una demostración sólo para una región que es vertical y horizontalmente simple, como se muestra en la figura 15.27.

$$\begin{aligned}\int_C M\,dx &= \int_{C_1} M\,dx + \int_{C_2} M\,dx\\ &= \int_a^b M(x, f_1(x))\,dx + \int_b^a M(x, f_2(x))\,dx\\ &= \int_a^b [M(x, f_1(x)) - M(x, f_2(x))]\,dx\end{aligned}$$

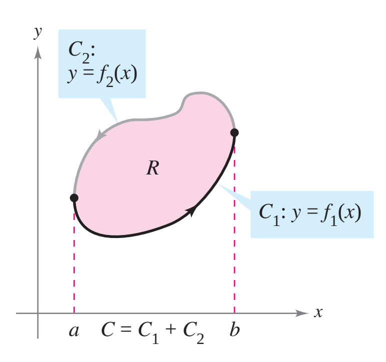
Por otro lado,

$$\begin{aligned}\int_R\!\!\int \frac{\partial M}{\partial y}\,dA &= \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}\,dy\,dx\\ &= \int_a^b M(x, y)\Big]_{f_1(x)}^{f_2(x)} dx\\ &= \int_a^b [M(x, f_2(x)) - M(x, f_1(x))]\,dx.\end{aligned}$$

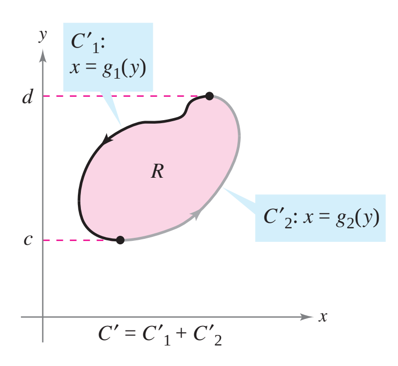
Por consiguiente,

$$\int_C M\,dx = -\int_R\!\!\int \frac{\partial M}{\partial y}\,dA.$$

De manera similar, se pueden usar $g_1(y)$ y $g_2(y)$ para demostrar que $\int_C N\,dy = \int_R\!\int \partial N/\partial x\,dA$. Sumando las integrales $\int_C M\,dx$ y $\int_C N\,dy$, se llega a la conclusión establecida en el teorema.

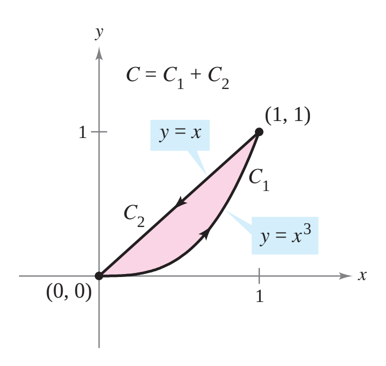


R es verticalmente simple



R es horizontalmente simple

Figura 15.27



C es simple y cerrada, y la región *R* siempre se encuentra a la izquierda de *C*
Figura 15.28

EJEMPLO 1 Aplicación del teorema de Green

Utilizar el teorema de Green para evaluar la integral de línea

$$\int_C y^3\,dx + (x^3 + 3xy^2)\,dy$$

donde C es la trayectoria desde (0, 0) hasta (1, 1) a lo largo de la gráfica de $y = x^3$ y desde (1, 1) hasta (0, 0) a lo largo de la gráfica de $y = x$, como se muestra en la figura 15.28.

Solución Como $M = y^3$ y $N = x^3 + 3xy^2$, se sigue que

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 3y^2.$$

Aplicando el teorema de Green, se tiene entonces

$$\begin{aligned}
\int_C y^3\,dx + (x^3 + 3xy^2)\,dy &= \int_R\int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA \\
&= \int_0^1 \int_{x^3}^{x} \left[(3x^2 + 3y^2) - 3y^2\right] dy\,dx \\
&= \int_0^1 \int_{x^3}^{x} 3x^2\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 3x^2y\Big]_{x^3}^{x} dx \\
&= \int_0^1 (3x^3 - 3x^5)\,dx \\
&= \left[\frac{3x^4}{4} - \frac{x^6}{2}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

GEORGE GREEN (1793-1841)

Green, autodidacta, hijo de un molinero, publicó por primera vez el teorema que lleva su nombre en 1828 en un ensayo sobre electricidad y magnetismo. En ese tiempo no había casi ninguna teoría matemática para explicar fenómenos eléctricos.

"Considerando cuán deseable sería que una energía de naturaleza universal, como la electricidad, fuera susceptible, hasta donde fuera posible, de someterse al cálculo. . . me vi impulsado a intentar descubrir cualquier posible relación general entre esta función y las cantidades de electricidad en los cuerpos que la producen."

El teorema de Green no se puede aplicar a toda integral de línea. Entre las restricciones establecidas en el teorema 15.8, la curva C debe ser simple y cerrada. Sin embargo, cuando el teorema de Green es aplicable, puede ahorrar tiempo. Para ver esto, tratar de aplicar las técnicas descritas en la sección 15.2 para evaluar la integral de línea del ejemplo l. Para esto, se necesitará escribir la integral de línea como

$$\int_C y^3\,dx + (x^3 + 3xy^2)\,dy =$$
$$\int_{C_1} y^3\,dx + (x^3 + 3xy^2)\,dy + \int_{C_2} y^3\,dx + (x^3 + 3xy^2)\,dy$$

donde C_1 es la trayectoria cúbica dada por

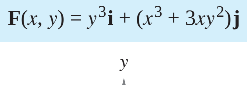
$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$$

desde $t = 0$ hasta $t = 1$, y C_2 es el segmento de recta dado por

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{i} + (1 - t)\mathbf{j}$$

desde $t = 0$ hasta $t = 1$.

EJEMPLO 2 Aplicación del teorema de Green para calcular trabajo



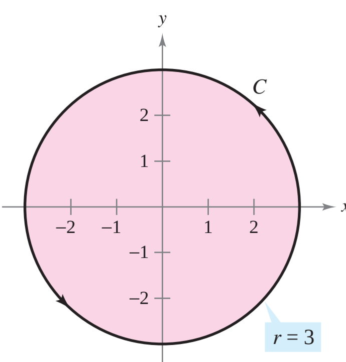


Figura 15.29

Estando sometida a la fuerza

$$\mathbf{F}(x, y) = y^3\mathbf{i} + (x^3 + 3xy^2)\mathbf{j}$$

una partícula recorre una vez el círculo de radio 3 mostrado en la figura 15.29. Aplicar el teorema de Green para hallar el trabajo realizado por **F**.

Solución Por el ejemplo 1, se sabe, de acuerdo con el teorema de Green, que

$$\int_C y^3\,dx + (x^3 + 3xy^2)\,dy = \int\!\!\int_R 3x^2\,dA.$$

En coordenadas polares, usando $x = r\cos\theta$ y $dA = r\,dr\,d\theta$, el trabajo realizado es

$$\begin{aligned}
W = \int\!\!\int_R 3x^2\,dA &= \int_0^{2\pi}\int_0^3 3(r\cos\theta)^2\,r\,dr\,d\theta \\
&= 3\int_0^{2\pi}\int_0^3 r^3\cos^2\theta\,dr\,d\theta \\
&= 3\int_0^{2\pi}\frac{r^4}{4}\cos^2\theta\bigg]_0^3\,d\theta \\
&= 3\int_0^{2\pi}\frac{81}{4}\cos^2\theta\,d\theta \\
&= \frac{243}{8}\int_0^{2\pi}(1 + \cos 2\theta)\,d\theta \\
&= \frac{243}{8}\left[\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{243\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Al evaluar integrales de línea sobre curvas cerradas, recuérdese que en campos vectoriales conservativos (campos en los que $\partial N/\partial x = \partial M/\partial y$), el valor de la integral de línea es 0. Éste es fácil de ver a partir de lo establecido en el teorema de Green:

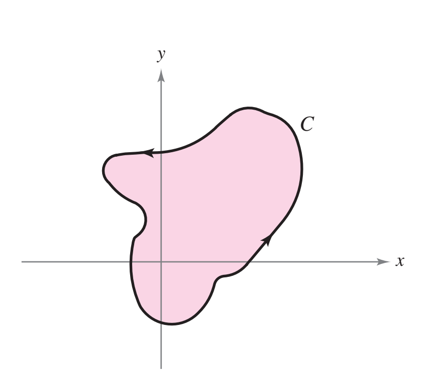
$$\int_C M\,dx + N\,dy = \int\!\!\int_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA = 0.$$

EJEMPLO 3 Teorema de Green y campos vectoriales conservativos

Evaluar la integral de línea

$$\int_C y^3\,dx + 3xy^2\,dy$$

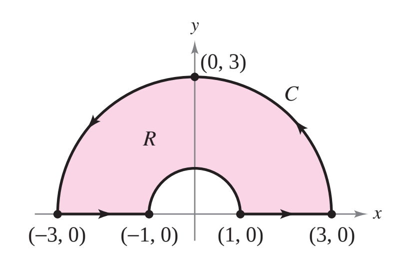
donde C es la trayectoria mostrada en la figura 15.30.



C es cerrada
Figura 15.30

Solución A partir de esta integral de línea, $M = y^3$ y $N = 3xy^2$. Así que, $\partial N/\partial x = 3y^2$ y $\partial M/\partial y = 3y^2$. Esto implica que el campo vectorial $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ es conservativo, y como C es cerrada, se concluye que

$$\int_C y^3\,dx + 3xy^2\,dy = 0.$$



C es suave a trozos
Figura 15.31

EJEMPLO 4 Aplicación del teorema de Green para una curva suave a trozos (o por partes)

Evaluar

$$\int_C (\arctan x + y^2)\, dx + (e^y - x^2)\, dy$$

donde C es la trayectoria que encierra la región anular mostrada en la figura 15.31.

Solución En coordenadas polares, R está dada por $1 \le r \le 3$ para $0 \le \theta \le \pi$. Y,

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = -2x - 2y = -2(r\cos\theta + r\,\text{sen}\,\theta).$$

Así, por el teorema de Green,

$$\begin{aligned}
\int_C (\arctan x + y^2)\, dx + (e^y - x^2)\, dy &= \int_R\int -2(x + y)\, dA \\
&= \int_0^{\pi}\int_1^3 -2r(\cos\theta + \text{sen}\,\theta) r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi} -2(\cos\theta + \text{sen}\,\theta)\frac{r^3}{3}\Big]_1^3\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi}\left(-\frac{52}{3}\right)(\cos\theta + \text{sen}\,\theta)\, d\theta \\
&= -\frac{52}{3}\Big[\text{sen}\,\theta - \cos\theta\Big]_0^{\pi} \\
&= -\frac{104}{3}.
\end{aligned}$$

En los ejemplos 1, 2 y 4, el teorema de Green se utilizó para evaluar integrales de línea como integrales dobles. También se puede utilizar el teorema para evaluar integrales dobles como integrales de línea. Una aplicación útil se da cuando $\partial N/\partial x - \partial M/\partial y = 1$.

$$\begin{aligned}
\int_C M\, dx + N\, dy &= \int_R\int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA \\
&= \int_R\int 1\, dA \qquad \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 1 \\
&= \text{área de la región } R
\end{aligned}$$

Entre las muchas opciones para M y N que satisfacen la condición establecida, la opción de $M = -y/2$ y $N = x/2$ da la siguiente integral de línea para el área de la región R.

TEOREMA 15.9 INTEGRAL DE LÍNEA PARA EL ÁREA

Si R es una región plana limitada o acotada por una curva simple C, cerrada y suave a trozos, orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj, entonces el área de R está dada por

$$A = \frac{1}{2}\int_C x\, dy - y\, dx.$$

EJEMPLO 5 Hallar el área mediante una integral de línea

Usar una integral de línea para hallar el área de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Solución Utilizando la figura 15.32, a la trayectoria elíptica se le puede inducir una orientación en sentido contrario a las manecillas del reloj haciendo

$$x = a \cos t \quad \text{y} \quad y = b \operatorname{sen} t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Figura 15.32

Por tanto, el área es

$$\begin{aligned} A = \frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [(a\cos t)(b\cos t)\,dt - (b\operatorname{sen} t)(-a\operatorname{sen} t)\,dt] \\ &= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)\,dt \\ &= \frac{ab}{2}\Big[t\Big]_0^{2\pi} \\ &= \pi ab. \end{aligned}$$

El teorema de Green puede extenderse para cubrir algunas regiones que no son simplemente conexas. Esto se demuestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 6 El teorema de Green extendido a una región con un orificio

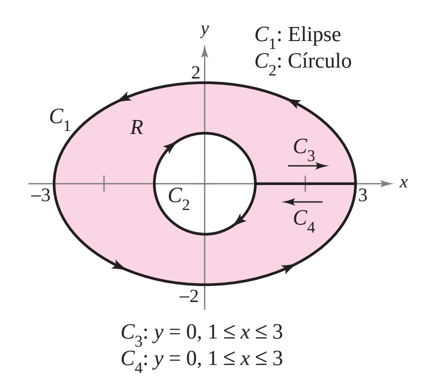


Figura 15.33

Sea R la región interior a la elipse $(x^2/9) + (y^2/4) = 1$ y exterior al círculo $x^2 + y^2 = 1$. Evaluar la integral de línea

$$\int_C 2xy\,dx + (x^2 + 2x)\,dy$$

donde $C = C_1 + C_2$ es la frontera de R, como se muestra en la figura 15.33.

Solución Para empezar, se pueden introducir los segmentos de recta C_3 y C_4, como se muestra en la figura 15.33. Nótese que como las curvas C_3 y C_4 tienen orientaciones opuestas, las integrales de línea sobre ellas se cancelan entre sí. Además, se puede aplicar el teorema de Green a la región R utilizando la frontera $C_1 + C_4 + C_2 + C_3$ para obtener

$$\begin{aligned} \int_C 2xy\,dx + (x^2 + 2x)\,dy &= \int\!\!\int_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA \\ &= \int\!\!\int_R (2x + 2 - 2x)\,dA \\ &= 2\int\!\!\int_R dA \\ &= 2(\text{área de } R) \\ &= 2(\pi ab - \pi r^2) \\ &= 2[\pi(3)(2) - \pi(1^2)] \\ &= 10\pi. \end{aligned}$$

En la sección 15.1 se estableció una condición necesaria y suficiente para campos vectoriales conservativos. Ahí sólo se presentó una dirección de la demostración. Ahora se puede dar la otra dirección, usando el teorema de Green. Sea $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ definido en un disco abierto R. Se quiere demostrar que si M y N tienen primeras derivadas parciales continuas y

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

entonces $\mathbf{F}$ es conservativo. Supóngase que C es una trayectoria cerrada que forma la frontera de una región conexa contenida en R. Entonces, usando el hecho de que $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$, se puede aplicar el teorema de Green para concluir que

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C M\,dx + N\,dy \\ &= \int_R\!\!\int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA \\ &= 0.\end{aligned}$$

Esto es, a su vez, equivalente a mostrar que $\mathbf{F}$ es conservativo (ver teorema 15.7).

Formas alternativas del teorema de Green

Esta sección concluye con la deducción de dos formulaciones vectoriales del teorema de Green para regiones en el plano. La extensión de estas formas vectoriales a tres dimensiones es la base del estudio en el resto de las secciones de este capítulo. Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial en el plano, se puede escribir

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

por lo que el rotacional de $\mathbf{F}$, como se describió en la sección 15.1, está dada por

$$\begin{aligned}\text{rot}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & N & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{\partial N}{\partial z}\mathbf{i} + \frac{\partial M}{\partial z}\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Por consiguiente,

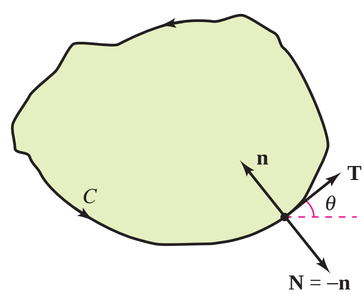
$$\begin{aligned}(\text{rot}\,\mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} &= \left[-\frac{\partial N}{\partial z}\mathbf{i} + \frac{\partial M}{\partial z}\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}\right] \cdot \mathbf{k} \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}.\end{aligned}$$

Con condiciones apropiadas sobre $\mathbf{F}$, C y R, se puede escribir el teorema de Green en forma vectorial

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_R\!\!\int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA \\ &= \int_R\!\!\int (\text{rot}\,\mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dA.\end{aligned}$$

Primera forma alternativa.

La extensión de esta forma vectorial del teorema de Green a superficies en el espacio da lugar al **teorema de Stokes**, que se estudia en la sección 15.8.



$\mathbf{T} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$

$\mathbf{n} = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{i} + \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{j}$

$\quad = -\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}$

$\mathbf{N} = \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} - \cos\theta\,\mathbf{j}$

Figura 15.34

Para la segunda forma vectorial del teorema de Green, supónganse las mismas condiciones sobre **F**, C y R. Utilizando el parámetro longitud de arco s para C, se tiene $\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j}$. Por tanto, un vector unitario tangente **T** a la curva C está dado por $\mathbf{r}'(s) = \mathbf{T} = x'(s)\mathbf{i} + y'(s)\mathbf{j}$. En la figura 15.34 se puede ver que el vector unitario normal *exterior* **N** puede entonces escribirse como

$$\mathbf{N} = y'(s)\mathbf{i} - x'(s)\mathbf{j}.$$

Por consiguiente, a $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ se le puede aplicar el teorema de Green para obtener

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,ds &= \int_a^b (M\mathbf{i} + N\mathbf{j})\cdot(y'(s)\mathbf{i} - x'(s)\mathbf{j})\,ds\\ &= \int_a^b \left(M\frac{dy}{ds} - N\frac{dx}{ds}\right)ds\\ &= \int_C M\,dy - N\,dx\\ &= \int_C -N\,dx + M\,dy\\ &= \int_R\!\!\int \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right)dA \qquad \text{Teorema de Green.}\\ &= \int_R\!\!\int \operatorname{div}\mathbf{F}\,dA.\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,ds = \int_R\!\!\int \operatorname{div}\mathbf{F}\,dA. \qquad \text{Segunda forma alternativa.}$$

La generalización de esta forma a tres dimensiones se llama **teorema de la divergencia**, discutido en la sección 15.7. En las secciones 15.7 y 15.8 se analizarán las interpretaciones físicas de divergencia y del rotacional.

15.4 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, comprobar el teorema de Green evaluando ambas integrales

$$\int_C y^2\,dx + x^2\,dy = \int_R\!\!\int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)dA$$

sobre la trayectoria dada.

1. C: frontera de la región que yace entre las gráficas de $y = x$ y $y = x^2$
2. C: frontera de la región que yace entre las gráficas de $y = x$ y $y = \sqrt{x}$
3. C: cuadrado con vértices (0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)
4. C: rectángulo con vértices (0, 0), (3, 0), (3, 4), (0, 4)

CAS **En los ejercicios 5 y 6, verificar el teorema de Green utilizando un sistema algebraico por computadora y evaluar ambas integrales**

$$\int_C xe^y\,dx + e^x\,dy = \int_R\!\!\int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)dA$$

sobre la trayectoria dada.

5. C: circunferencia dada por $x^2 + y^2 = 4$
6. C: frontera de la región comprendida entre las gráficas de $y = x$ y $y = x^3$ en el primer cuadrante

En los ejercicios 7 a 10, utilizar el teorema de Green para evaluar la integral

$$\int_C (y - x)\,dx + (2x - y)\,dy$$

sobre la trayectoria dada.

7. C: frontera de la región comprendida entre las gráficas de $y = x$ y $y = x^2 - 2x$
8. C: $x = 2\cos\theta$, $y = \operatorname{sen}\theta$
9. C: frontera de la región interior al rectángulo acotado por $x = -5$, $x = 5$, $y = -3$ y $y = 3$, y exterior al cuadrado acotado por $x = -1$, $x = 1$, $y = -1$ y $y = 1$.
10. C: frontera de la región interior al semicírculo $y = \sqrt{25 - x^2}$ y exterior al semicírculo $y = \sqrt{9 - x^2}$

En los ejercicios 11 a 20, utilizar el teorema de Green para evaluar la integral de línea.

11. $\int_C 2xy\,dx + (x + y)\,dy$

C: frontera de la región comprendida entre las gráficas de $y = 0$ y $y = 1 - x^2$

12. $\int_C y^2\,dx + xy\,dy$

C: frontera de la región comprendida entre las gráficas de $y = 0$, $y = \sqrt{x}$ y $x = 9$

13. $\int_C (x^2 - y^2)\,dx + 2xy\,dy$

C: $x^2 + y^2 = 16$

14. $\int_C (x^2 - y^2)\,dx + 2xy\,dy$

C: $r = 1 + \cos\theta$

15. $\int_C e^x \cos 2y\,dx - 2e^x \operatorname{sen} 2y\,dy$

C: $x^2 + y^2 = a^2$

16. $\int_C 2\arctan\frac{y}{x}\,dx + \ln(x^2 + y^2)\,dy$

C: $x = 4 + 2\cos\theta$, $y = 4 + \operatorname{sen}\theta$

17. $\int_C \cos y\,dx + (xy - x\operatorname{sen} y)\,dy$

C: frontera de la región comprendida entre las gráficas de $y = x$ y $y = \sqrt{x}$

18. $\int_C (e^{-x^2/2} - y)\,dx + (e^{-y^2/2} + x)\,dy$

C: frontera de la región comprendida entre las gráficas del círculo $x = 6\cos\theta$, $y = 6\operatorname{sen}\theta$ y la elipse $x = 3\cos\theta$, $y = 2\operatorname{sen}\theta$

19. $\int_C (x - 3y)\,dx + (x + y)\,dy$

C: frontera de la región comprendida entre las gráficas de $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 9$

20. $\int_C 3x^2 e^y\,dx + e^y\,dy$

C: frontera de la región comprendida entre los cuadrados cuyos vértices son $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ y $(1, -1)$, y $(2, 2)$, $(-2, 2)$, $(-2, -2)$ y $(2, -2)$

Trabajo **En los ejercicios 21 a 24, utilizar el teorema de Green para calcular el trabajo realizado por la fuerza F sobre una partícula que se mueve, en sentido contrario a las manecillas del reloj, por la trayectoria cerrada *C*.**

21. $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$

C: $x^2 + y^2 = 1$

22. $\mathbf{F}(x, y) = (e^x - 3y)\mathbf{i} + (e^y + 6x)\mathbf{j}$

C: $r = 2\cos\theta$

23. $\mathbf{F}(x, y) = (x^{3/2} - 3y)\mathbf{i} + (6x + 5\sqrt{y})\mathbf{j}$

C: contorno del triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(5, 0)$ y $(0, 5)$

24. $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2 + y)\mathbf{i} + 4xy^2\,\mathbf{j}$

C: frontera de la región comprendida entre las gráficas de $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ y $x = 9$

Área **En los ejercicios 25 a 28, utilizar una integral de línea para hallar el área de la región *R*.**

25. R: región acotada por la gráfica de $x^2 + y^2 = a^2$

26. R: triángulo acotado por las gráficas de $x = 0$, $3x - 2y = 0$ y $x + 2y = 8$

27. R: región acotada por las gráficas de $y = 5x - 3$ y $y = x^2 + 1$

28. R: región interior al lazo de la hoja o folio de Descartes acotada por la gráfica de

$$x = \frac{3t}{t^3 + 1}, \quad y = \frac{3t^2}{t^3 + 1}$$

Desarrollo de conceptos

29. Enunciar el teorema de Green.

30. Dar la integral de línea para el área de una región R acotada por una curva simple suave a trozos C.

En los ejercicios 31 y 32, utilizar el teorema de Green para verificar las fórmulas de las integrales de línea.

31. El centroide de una región de área A acotada por una trayectoria simple cerrada C es

$$\bar{x} = \frac{1}{2A}\int_C x^2\,dy, \quad \bar{y} = -\frac{1}{2A}\int_C y^2\,dx.$$

32. El área de una región plana acotada por la trayectoria simple cerrada C dada en coordenadas polares es $A = \frac{1}{2}\int_C r^2\,d\theta.$

CAS ***Centroide*** **En los ejercicios 33 a 36, utilizar un sistema algebraico por computadora y los resultados del ejercicio 31 para hallar el centroide de la región.**

33. R: región acotada por las gráficas de $y = 0$ y $y = 4 - x^2$

34. R: región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ y $y = 0$

35. R: región acotada por las gráficas de $y = x^3$ y $y = x$, $0 \le x \le 1$

36. R: triángulo cuyos vértices son $(-a, 0)$, $(a, 0)$ y (b, c), donde $-a \le b \le a$

CAS ***Área*** **En los ejercicios 37 a 40, utilizar un sistema algebraico por computadora y los resultados del ejercicio 32 para hallar el área de la región acotada por la gráfica de la ecuación polar.**

37. $r = a(1 - \cos\theta)$

38. $r = a\cos 3\theta$

39. $r = 1 + 2\cos\theta$ (lazo interior)

40. $r = \dfrac{3}{2 - \cos\theta}$

41. *a*) Evaluar $\int_{C_1} y^3\,dx + (27x - x^3)\,dy$, donde C_1 es el círculo unitario dado por $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$.

b) Encontrar el valor máximo de $\int_C y^3\,dx + (27x - x^3)\,dy$, donde C es cualquier curva cerrada en el plano xy, orientada en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Para discusión

42. Para cada trayectoria dada, verificar el teorema de Green al demostrar que

$$\int_C y^2\,dx + x^2\,dy = \int_R\int\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA.$$

Para cada trayectoria, ¿cuál de las integrales es más fácil evaluar? Explicar.

a) C: triángulo con vértices (0, 0), (4, 0), (4, 4)

b) C: círculo dado por $x^2 + y^2 = 1$

43. ***Para pensar*** Sea

$$I = \int_C \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}$$

donde C es una circunferencia orientada en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Mostrar que $I = 0$ si C no contiene el origen. ¿Cuál es el valor de I si C contiene al origen?

44. *a*) Sea C el segmento de recta que une (x_1, y_1) y (x_2, y_2). Mostrar que

$$\int_C -y\,dx + x\,dy = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

b) Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ los vértices de un polígono. Demostrar que el área encerrada es

$$\tfrac{1}{2}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \cdots + (x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1}) + (x_ny_1 - x_1y_n)].$$

Área **En los ejercicios 45 y 46, utilizar el resultado del ejercicio 44*b* para hallar el área encerrada por el polígono cuyos vértices se dan.**

45. Pentágono: (0, 0), (2, 0), (3, 2), (1, 4), (−1, 1)

46. Hexágono: (0, 0), (2, 0), (3, 2), (2, 4), (0, 3), (−1, 1)

En los ejercicios 47 y 48, demostrar la identidad, donde R es una región simplemente conexa con frontera C. Suponer que las derivadas parciales requeridas de las funciones escalares f y g son continuas. Las expresiones $D_{\mathbf{N}} f$ y $D_{\mathbf{N}} g$ son las derivadas en dirección del vector normal exterior N de C, y se definen por $D_{\mathbf{N}} f = \nabla f \cdot \mathbf{N}$ y $D_{\mathbf{N}} g = \nabla g \cdot \mathbf{N}$.

47. Primera identidad de Green:

$$\int_R\int (f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g)\,dA = \int_C f D_{\mathbf{N}} g\,ds$$

[*Sugerencia:* Utilizar la segunda forma alternativa del teorema de Green y la propiedad div $(f\mathbf{G}) = f \operatorname{div} \mathbf{G} + \nabla f \cdot \mathbf{G}$.]

48. Segunda identidad de Green:

$$\int_R\int (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,dA = \int_C (f D_{\mathbf{N}} g - g D_{\mathbf{N}} f)\,ds$$

(*Sugerencia:* Utilizar la primera identidad de Green, dada en el ejercicio 47, dos veces.)

49. Utilizar el teorema de Green para demostrar que

$$\int_C f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0$$

si f y g son funciones derivables y C es una trayectoria cerrada simple suave a trozos.

50. Sea $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$, donde M y N tienen primeras derivadas parciales continuas en una región simplemente conexa R. Demostrar que si C es cerrada, simple y suave, y $N_x = M_y$, entonces

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

PROYECTO DE TRABAJO

Funciones hiperbólicas y trigonométricas

a) Dibujar la curva plana representada por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \cosh t\,\mathbf{i} + \operatorname{senh} t\,\mathbf{j}$ en el intervalo $0 \le t \le 5$. Mostrar que la ecuación rectangular que corresponde a $\mathbf{r}(t)$ es la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$. Verificar el dibujo utilizando una herramienta de graficación para representar la hipérbola.

b) Sea $P = (\cosh \phi, \operatorname{senh} \phi)$ el punto de la hipérbola correspondiente a $\mathbf{r}(\phi)$ para $\phi > 0$. Utilizar la fórmula para el área

$$A = \frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx$$

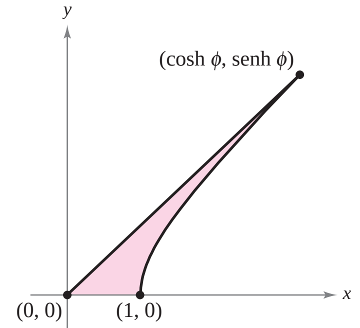
para verificar que el área de la región mostrada en la figura es $\frac{1}{2}\phi$.

c) Mostrar que el área de la región indicada está también dada por la integral

$$A = \int_0^{\operatorname{senh}\phi} \left[\sqrt{1 + y^2} - (\coth \phi)y\right] dy.$$

Confirmar la respuesta del inciso *b*) aproximando esta integral numéricamente para $\phi = 1, 2, 4$ y 10.

d) Considerar la circunferencia unitaria dada por $x^2 + y^2 = 1$. Sea θ el ángulo formado por el eje x y el radio a (x, y). El área del sector correspondiente es $\frac{1}{2}\theta$. Es decir, las funciones trigonométricas $f(\theta) = \cos \theta$ y $g(\theta) = \operatorname{sen} \theta$ podrían haber sido definidas como las coordenadas del punto $(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)$ en el círculo unitario que determina un sector de área $\frac{1}{2}\theta$. Escribir un párrafo breve explicando cómo definir las funciones hiperbólicas de una manera similar, utilizando la "hipérbola unitaria" $x^2 - y^2 = 1$.



15.5 Superficies paramétricas

- **Comprender la definición y esbozar la gráfica de una superficie paramétrica.**
- **Hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas para representar una superficie.**
- **Hallar un vector normal y un plano tangente a una superficie paramétrica.**
- **Hallar el área de una superficie paramétrica.**

Superficies paramétricas

Ya se sabe representar una curva en el plano o en el espacio mediante un conjunto de ecuaciones paramétricas o, equivalentemente, por una función vectorial.

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \qquad \text{Curva en el plano.}$$

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \qquad \text{Curva en el espacio.}$$

En esta sección se aprenderá a representar una superficie en el espacio mediante un conjunto de ecuaciones paramétricas o mediante una función vectorial. Obsérvese que en el caso de las curvas, la función vectorial **r** es función de un *solo* parámetro t. En el caso de las superficies, la función vectorial es función de *dos* parámetros u y v.

DEFINICIÓN DE SUPERFICIE PARAMÉTRICA

Sean x, y y z funciones de u y v, continuas en un dominio D del plano uv. Al conjunto de puntos (x, y, z) dado por

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \qquad \text{Superficie paramétrica.}$$

se le llama una **superficie paramétrica**. Las ecuaciones

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \quad \text{y} \quad z = z(u, v) \qquad \text{Ecuaciones paramétricas.}$$

son las **ecuaciones paramétricas** para la superficie.

Si S es una superficie paramétrica dada por la función vectorial **r**, entonces S es trazada por el vector posición $\mathbf{r}(u, v)$ a medida que el punto (u, v) se mueve por el dominio D, como se indica en la figura 15.35.

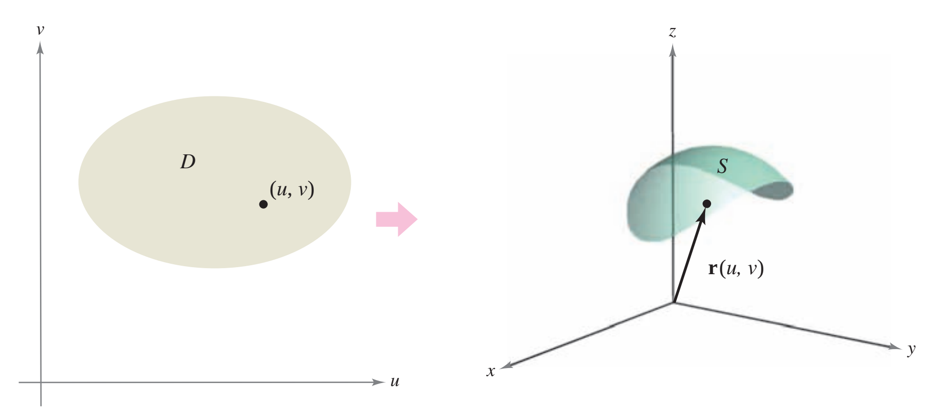


Figura 15.35

TECNOLOGÍA Algunos sistemas algebraicos por computadora dibujan superficies paramétricas. Si se tiene acceso a este tipo de software, utilícese para representar gráficamente algunas de las superficies de los ejemplos y ejercicios de esta sección.

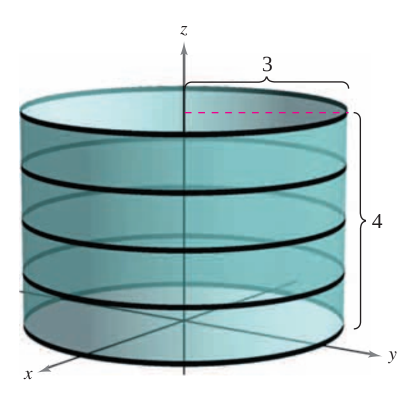


Figura 15.36

EJEMPLO 1 Trazado de una superficie paramétrica

Identificar y dibujar la superficie paramétrica S dada por

$$\mathbf{r}(u, v) = 3 \cos u\mathbf{i} + 3 \operatorname{sen} u\mathbf{j} + v\mathbf{k}$$

donde $0 \leq u \leq 2\pi$ y $0 \leq v \leq 4$.

Solución Como $x = 3 \cos u$ y $y = 3 \operatorname{sen} u$, se sabe que en cada punto (x, y, z) de la superficie, x y y están relacionados mediante la ecuación $x^2 + y^2 = 3^2$. En otras palabras, cada sección transversal de S, paralela al plano xy, es una circunferencia de radio 3, centrado en el eje z. Como $z = v$, donde $0 \leq v \leq 4$, se ve que la superficie es un cilindro circular recto de altura 4. El radio del cilindro es 3, y el eje z forma el eje del cilindro, como se muestra en la figura 15.36.

Como ocurre con las representaciones paramétricas de curvas, las representaciones paramétricas de superficies no son únicas. Es decir, hay muchos conjuntos de ecuaciones paramétricas que podrían usarse para representar la superficie mostrada en la figura 15.36.

EJEMPLO 2 Trazado de una superficie paramétrica

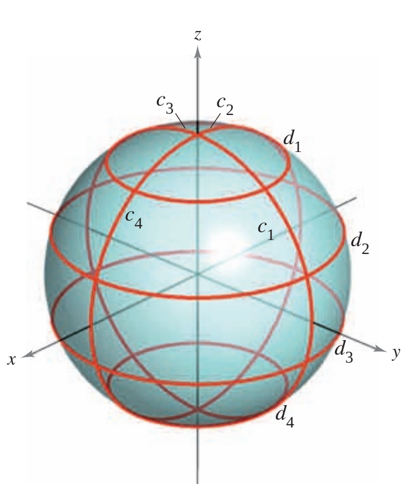


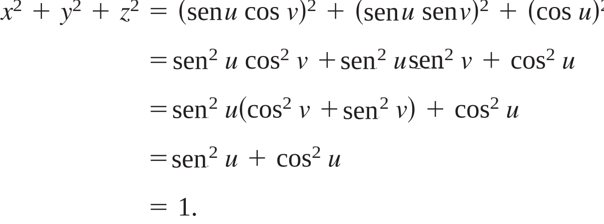
Figura 15.37

Identificar y dibujar una superficie paramétrica S dada por

$$\mathbf{r}(u, v) = \operatorname{sen} u \cos v\mathbf{i} + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + \cos u\mathbf{k}$$

donde $0 \leq u \leq \pi$ y $0 \leq v \leq 2\pi$.

Solución Para identificar la superficie, se puede tratar de emplear identidades trigonométricas para eliminar los parámetros. Después de experimentar un poco, se descubre que



$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (\operatorname{sen} u \cos v)^2 + (\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v)^2 + (\cos u)^2 \\ &= \operatorname{sen}^2 u \cos^2 v + \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen}^2 v + \cos^2 u \\ &= \operatorname{sen}^2 u(\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v) + \cos^2 u \\ &= \operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u \\ &= 1. \end{aligned}$$

Así pues, cada punto en S se encuentra en la esfera unitaria o esfera unidad, centrada en el origen, como se muestra en la figura 15.37. Para $u = d_i$, $\mathbf{r}(u, v)$ traza circunferencias de latitud

$$x^2 + y^2 = \operatorname{sen}^2 d_i, \quad 0 \leq d_i \leq \pi$$

paralelos al plano xy, y para $v = c_i$, $\mathbf{r}(u, v)$ traza semicírculos de longitud (o meridianos).

NOTA Para convencerse de que la función vectorial del ejemplo 2 traza toda la esfera unitaria o esfera unidad, recuérdese que las ecuaciones paramétricas

$$x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \quad \text{y} \quad z = \rho \cos \phi$$

donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq \phi \leq \pi$, describen la conversión de coordenadas esféricas a coordenadas rectangulares, como se vio en la sección 11.7.

Ecuaciones paramétricas para superficies

En los ejemplos 1 y 2 se pidió identificar la superficie descrita por un conjunto dado de ecuaciones paramétricas. El problema inverso, el de asignar un conjunto de ecuaciones paramétricas a una superficie dada, es generalmente más difícil. Sin embargo, un tipo de superficie para la que este problema es sencillo, es una superficie dada por $z = f(x, y)$. Tal superficie se puede parametrizar como

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}.$$

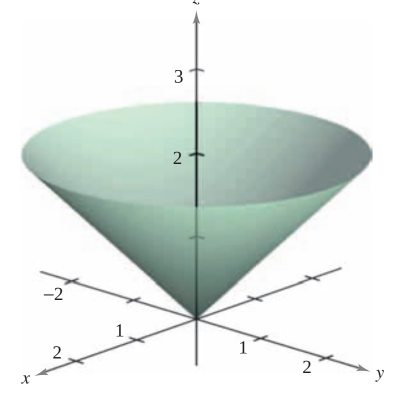


Figura 15.38

EJEMPLO 3 Representar una superficie paramétricamente

Dar un conjunto de ecuaciones paramétricas para el cono dado por

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

como el que se muestra en la figura 15.38.

Solución Como esta superficie está dada en la forma $z = f(x, y)$, se pueden tomar x y y como parámetros. Entonces el cono se representa por la función vectorial

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathbf{k}$$

donde (x, y) varía sobre todo el plano xy.

Otro tipo de superficie fácil de representar paramétricamente es una superficie de revolución. Por ejemplo, para representar la superficie generada por revolución de la gráfica de $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, en torno al eje x, se utiliza

$$x = u, \quad y = f(u)\cos v \quad \text{y} \quad z = f(u)\operatorname{sen} v$$

donde $a \leq u \leq b$ y $0 \leq v \leq 2\pi$.

EJEMPLO 4 Representación de una superficie de revolución paramétricamente

Dar un conjunto de ecuaciones paramétricas para la superficie de revolución obtenida al hacer girar

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad 1 \leq x \leq 10$$

en torno al eje x.

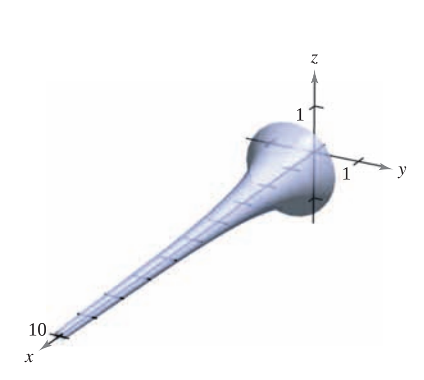


Figura 15.39

Solución Utilizar los parámetros u y v como se describió arriba para obtener

$$x = u, \quad y = f(u)\cos v = \frac{1}{u}\cos v \quad \text{y} \quad z = f(u)\operatorname{sen} v = \frac{1}{u}\operatorname{sen} v$$

donde $1 \leq u \leq 10$ y $0 \leq v \leq 2\pi$. La superficie resultante es una porción de la *trompeta de Gabriel*, como se muestra en la figura 15.39.

La superficie de revolución del ejemplo 4 se forma haciendo girar la gráfica de $y = f(x)$ en torno al eje x. Para otros tipos de superficies de revolución, puede usarse una parametrización similar. Por ejemplo, para parametrizar la superficie formada por revolución de la gráfica de $x = f(z)$ en torno al eje z, se puede usar

$$z = u, \quad x = f(u)\cos v \quad \text{y} \quad y = f(u)\operatorname{sen} v.$$

Vectores normales y planos tangentes

Sea S una superficie paramétrica dada por

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

sobre una región abierta D tal que x, y y z tienen derivadas parciales continuas en D. Las **derivadas parciales de r** con respecto a u y v están definidas como

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u, v)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u, v)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u, v)\mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u, v)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u, v)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u, v)\mathbf{k}.$$

Cada una de estas derivadas parciales es una función vectorial que puede interpretarse geométricamente en términos de vectores tangentes. Por ejemplo, si $v = v_0$ se mantiene constante, entonces $\mathbf{r}(u, v_0)$ es una función vectorial de un solo parámetro y define una curva C_1 que se encuentra en la superficie S. El vector tangente a C_1 en el punto $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$ está dado por

$$\mathbf{r}_u(u_0, v_0) = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{k}$$

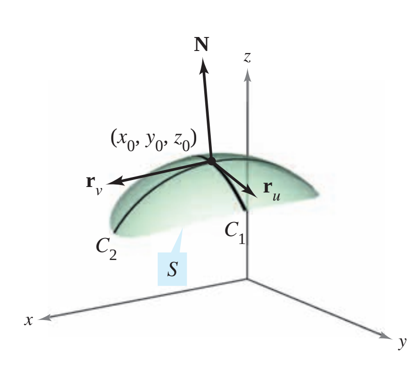


Figura 15.40

como se muestra en la figura 15.40. De manera similar, si $u = u_0$ se mantiene constante, entonces $\mathbf{r}(u_0, v)$ es una función vectorial de un solo parámetro y define una curva C_2 que se encuentra en la superficie S. El vector tangente a C_2 en el punto $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$ está dado por

$$\mathbf{r}_v(u_0, v_0) = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{k}.$$

Si el vector normal $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ no es $\mathbf{0}$ para todo (u, v) en D, se dice que la superficie S es **suave** y tendrá un plano tangente. De manera informal, una superficie suave es una superficie que no tiene puntos angulosos o cúspides. Por ejemplo, esferas, elipsoides y paraboloides son suaves, mientras que el cono del ejemplo 3 no es suave.

VECTOR NORMAL A UNA SUPERFICIE PARAMÉTRICA SUAVE

Sea S una superficie paramétrica suave

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

definida sobre una región abierta D en el plano uv. Sea (u_0, v_0) un punto en D. Un vector normal en el punto

$$(x_0, y_0, z_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$$

está dado por

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

NOTA La figura 15.40 muestra el vector normal $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$. El vector $\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_u$ también es normal a S y apunta en la dirección opuesta. ■

EJEMPLO 5 Hallar un plano tangente a una superficie paramétrica

Hallar una ecuación para el plano tangente al paraboloide dado por

$$\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (u^2 + v^2)\mathbf{k}$$

en el punto (1, 2, 5).

Solución El punto en el plano uv que es llevado al punto $(x, y, z) = (1, 2, 5)$ es $(u, v) = (1, 2)$. Las derivadas parciales de $\mathbf{r}$ son

$$\mathbf{r}_u = \mathbf{i} + 2u\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_v = \mathbf{j} + 2v\mathbf{k}.$$

El vector normal está dado por

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = -2u\mathbf{i} - 2v\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

lo cual implica que el vector normal en (1, 2, 5) es $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = -2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Por tanto, una ecuación del plano tangente en (1, 2, 5) es

$$-2(x - 1) - 4(y - 2) + (z - 5) = 0$$
$$-2x - 4y + z = -5.$$

El plano tangente se muestra en la figura 15.41.

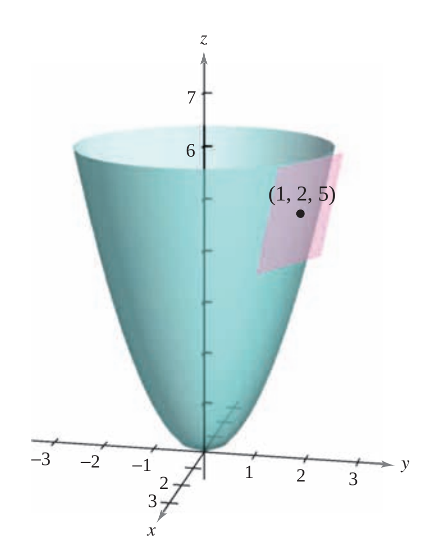


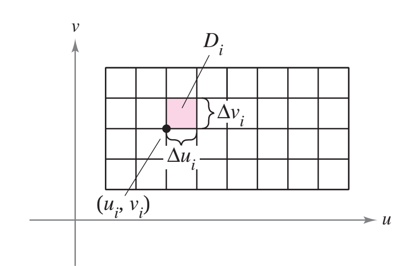
Figura 15.41

Área de una superficie paramétrica

Para definir el área de una superficie paramétrica, se puede usar un desarrollo similar al dado en la sección 14.5. Para empezar se construye una partición interna de D que consiste en n rectángulos, donde el área del rectángulo i-ésimo D_i es $\Delta A_i = \Delta u_i \, \Delta v_i$, como se muestra en la figura 15.42. En cada D_i sea (u_i, v_i) el punto más cercano al origen. En el punto $(x_i, y_i, z_i) = (x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i))$ de la superficie S, se construye un plano tangente T_i. El área de la porción de S que corresponde a D_i, ΔT_i, puede ser aproximada por un paralelogramo en el plano tangente. Es decir, $\Delta T_i \approx \Delta S_i$. Por tanto, la superficie de S está dada por $\Sigma \, \Delta S_i \approx \Sigma \, \Delta T_i$. El área del paralelogramo en el plano tangente es

$$\|\Delta u_i \mathbf{r}_u \times \Delta v_i \mathbf{r}_v\| = \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \, \Delta u_i \, \Delta v_i$$

lo cual conduce a la definición siguiente.



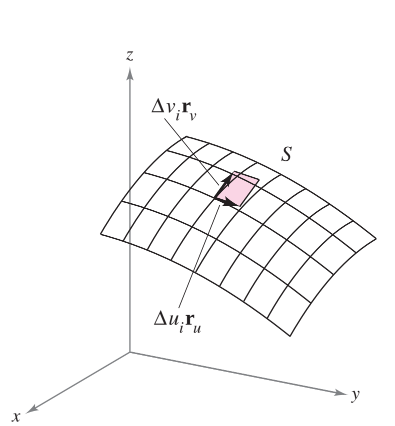


Figura 15.42

ÁREA DE UNA SUPERFICIE PARAMÉTRICA

Sea S una superficie paramétrica suave

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

definida sobre una región abierta D en el plano uv. Si cada punto de la superficie S corresponde exactamente a un punto del dominio D, entonces el **área de la superficie** S está dada por

$$\text{Área de la superficie} = \int\!\!\int_S dS = \int\!\!\int_D \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \, dA$$

donde $\mathbf{r}_u = \dfrac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \dfrac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}_v = \dfrac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}$.

Para una superficie S dada por $z = f(x, y)$, esta fórmula para el área de la superficie corresponde a la dada en la sección 14.5. Para ver esto, se puede parametrizar la superficie utilizando la función vectorial

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}$$

definida sobre la región R en el plano xy. Utilizando

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + f_x(x, y)\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + f_y(x, y)\mathbf{k}$$

se tiene

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_x(x, y) \\ 0 & 1 & f_y(x, y) \end{vmatrix} = -f_x(x, y)\mathbf{i} - f_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

y $\|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\| = \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}$. Esto implica que el área de la superficie de S es

$$\begin{aligned} \text{Área de la superficie} &= \int\!\!\int_R \|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\|\, dA \\ &= \int\!\!\int_R \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\, dA. \end{aligned}$$

EJEMPLO 6 Hallar el área de una superficie

NOTA La superficie del ejemplo 6 no satisface totalmente la hipótesis de que cada punto de la superficie corresponde exactamente a un punto de D. En esta superficie, $\mathbf{r}(u, 0) = \mathbf{r}(u, 2\pi)$ para todo valor fijo de u. Sin embargo, como el traslape consiste sólo en un semicírculo (que no tiene área), se puede aplicar la fórmula para el área de una superficie paramétrica. ■

Hallar el área de la superficie de la esfera unitaria (o esfera unidad) dada por

$$\mathbf{r}(u, v) = \operatorname{sen} u \cos v\mathbf{i} + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + \cos u\mathbf{k}$$

donde el dominio D está dado por $0 \le u \le \pi$ y $0 \le v \le 2\pi$.

Solución Para empezar se calcula $\mathbf{r}_u$ y $\mathbf{r}_v$.

$$\mathbf{r}_u = \cos u \cos v\mathbf{i} + \cos u \operatorname{sen} v\mathbf{j} - \operatorname{sen} u\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}_v = -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\mathbf{i} + \operatorname{sen} u \cos v\mathbf{j}$$

El producto vectorial de estos dos vectores es

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos u \cos v & \cos u \operatorname{sen} v & -\operatorname{sen} u \\ -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v & \operatorname{sen} u \cos v & 0 \end{vmatrix} \\ &= \operatorname{sen}^2 u \cos v\mathbf{i} + \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + \operatorname{sen} u \cos u\mathbf{k} \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| &= \sqrt{(\operatorname{sen}^2 u \cos v)^2 + (\operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen} v)^2 + (\operatorname{sen} u \cos u)^2} \\ &= \sqrt{\operatorname{sen}^4 u + \operatorname{sen}^2 u \cos^2 u} \\ &= \sqrt{\operatorname{sen}^2 u} \\ &= \operatorname{sen} u. \qquad \operatorname{sen} u > 0 \text{ para } 0 \le u \le \pi. \end{aligned}$$

Por último, el área de la superficie de la esfera es

$$\begin{aligned} A = \int\!\!\int_D \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|\, dA &= \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} \operatorname{sen} u\, du\, dv \\ &= \int_0^{2\pi} 2\, dv \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

EXPLORACIÓN

Para el toro del ejemplo 7, describir la función $\mathbf{r}(u, v)$ para u fijo. Después describir la función $\mathbf{r}(u, v)$ para v fijo.

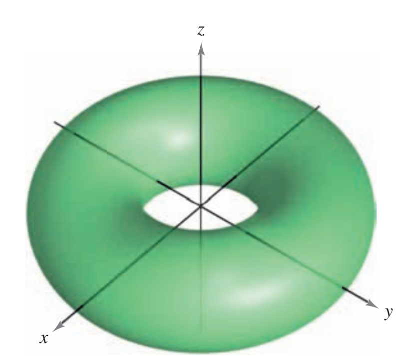


Figura 15.43

EJEMPLO 7 Hallar el área de una superficie

Hallar el área de la superficie del toro dado por

$$\mathbf{r}(u, v) = (2 + \cos u)\cos v\mathbf{i} + (2 + \cos u)\operatorname{sen} v\mathbf{j} + \operatorname{sen} u\mathbf{k}$$

donde el dominio D está dado por $0 \le u \le 2\pi$ y $0 \le v \le 2\pi$. (Ver la figura 15.43.)

Solución Para empezar se calculan $\mathbf{r}_u$ y $\mathbf{r}_v$.

$$\mathbf{r}_u = -\operatorname{sen} u \cos v\mathbf{i} - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + \cos u\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}_v = -(2 + \cos u)\operatorname{sen} v\mathbf{i} + (2 + \cos u)\cos v\mathbf{j}$$

El producto vectorial de estos dos vectores es

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\operatorname{sen} u \cos v & -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v & \cos u \\ -(2 + \cos u)\operatorname{sen} v & (2 + \cos u)\cos v & 0 \end{vmatrix} \\ &= -(2 + \cos u)(\cos v \cos u\mathbf{i} + \operatorname{sen} v \cos u\mathbf{j} + \operatorname{sen} u\mathbf{k})\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned}\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| &= (2 + \cos u)\sqrt{(\cos v \cos u)^2 + (\operatorname{sen} v \cos u)^2 + \operatorname{sen}^2 u} \\ &= (2 + \cos u)\sqrt{\cos^2 u(\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v) + \operatorname{sen}^2 u} \\ &= (2 + \cos u)\sqrt{\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u} \\ &= 2 + \cos u.\end{aligned}$$

Por último, el área de la superficie del toro es

$$\begin{aligned}A = \iint_D \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|\, dA &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (2 + \cos u)\, du\, dv \\ &= \int_0^{2\pi} 4\pi\, dv \\ &= 8\pi^2.\end{aligned}$$

Si la superficie S es una superficie de revolución, se puede mostrar que la fórmula para el área de la superficie, dada en la sección 7.4, es equivalente a la fórmula dada en esta sección. Por ejemplo, supóngase que f sea una función no negativa tal que f' sea continua sobre el intervalo $[a, b]$. Sea S la superficie de revolución formada por revolución de la gráfica de f, donde $a \le x \le b$, en torno al eje x. De acuerdo con la sección 7.4, se sabe que el área de la superficie está dada por

$$\text{Área de la superficie} = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Para representar S paramétricamente, sea $x = u$, $y = f(u)\cos v$ y $z = f(u)\operatorname{sen} v$, donde $a \le u \le b$ y $0 \le v \le 2\pi$. Entonces,

$$\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + f(u)\cos v\mathbf{j} + f(u)\operatorname{sen} v\mathbf{k}.$$

Tratar de mostrar que la fórmula

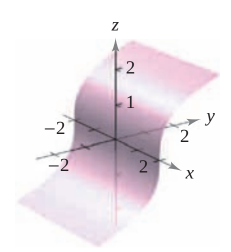
$$\text{Área de la superficie} = \iint_D \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|\, dA$$

es equivalente a la fórmula dada arriba (ver ejercicio 58).

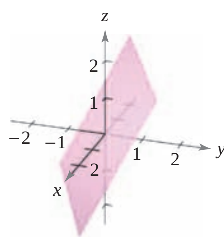
15.5 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, relacionar la función vectorial con su gráfica. [Las gráficas están marcadas *a*), *b*), *c*), *d*), *e*) y *f*).]

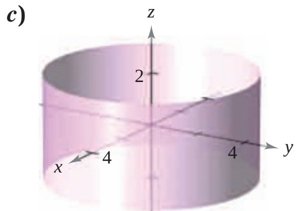
a)



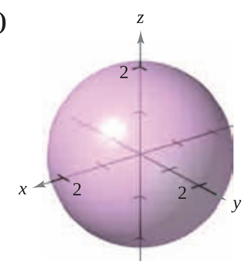
b)



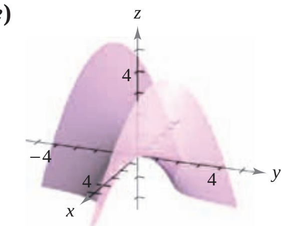
c)



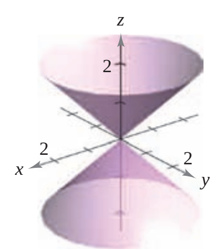
d)



e)



f)



1. $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + uv\mathbf{k}$
2. $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$
3. $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + \frac{1}{2}(u + v)\mathbf{j} + v\mathbf{k}$
4. $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + \frac{1}{4}v^3\mathbf{j} + v\mathbf{k}$
5. $\mathbf{r}(u, v) = 2 \cos v \cos u\mathbf{i} + 2 \cos v \operatorname{sen} u\mathbf{j} + 2 \operatorname{sen} v\mathbf{k}$
6. $\mathbf{r}(u, v) = 4 \cos u\mathbf{i} + 4 \operatorname{sen} u\mathbf{j} + v\mathbf{k}$

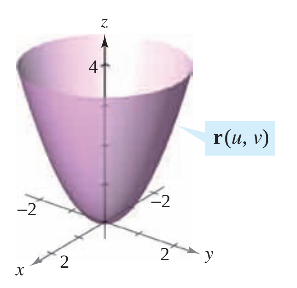
En los ejercicios 7 a 10, hallar la ecuación rectangular de la superficie por eliminación de los parámetros de la función vectorial. Identificar la superficie y dibujar su gráfica.

7. $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \dfrac{v}{2}\mathbf{k}$
8. $\mathbf{r}(u, v) = 2u \cos v\mathbf{i} + 2u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + \frac{1}{2}u^2\mathbf{k}$
9. $\mathbf{r}(u, v) = 2 \cos u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + 2 \operatorname{sen} u\mathbf{k}$
10. $\mathbf{r}(u, v) = 3 \cos v \cos u\mathbf{i} + 3 \cos v \operatorname{sen} u\mathbf{j} + 5 \operatorname{sen} v\mathbf{k}$

CAS **En los ejercicios 11 a 16, utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la superficie dada por la función vectorial.**

11. $\mathbf{r}(u, v) = 2u \cos v\mathbf{i} + 2u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + u^4\mathbf{k}$
    $0 \le u \le 1, \quad 0 \le v \le 2\pi$
12. $\mathbf{r}(u, v) = 2 \cos v \cos u\mathbf{i} + 4 \cos v \operatorname{sen} u\mathbf{j} + \operatorname{sen} v\mathbf{k}$
    $0 \le u \le 2\pi, \quad 0 \le v \le 2\pi$
13. $\mathbf{r}(u, v) = 2 \operatorname{senh} u \cos v\mathbf{i} + \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + \cosh u\mathbf{k}$
    $0 \le u \le 2, \quad 0 \le v \le 2\pi$
14. $\mathbf{r}(u, v) = 2u \cos v\mathbf{i} + 2u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + v\mathbf{k}$
    $0 \le u \le 1, \quad 0 \le v \le 3\pi$
15. $\mathbf{r}(u, v) = (u - \operatorname{sen} u)\cos v\mathbf{i} + (1 - \cos u)\operatorname{sen} v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$
    $0 \le u \le \pi, \quad 0 \le v \le 2\pi$
16. $\mathbf{r}(u, v) = \cos^3 u \cos v\mathbf{i} + \operatorname{sen}^3 u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$
    $0 \le u \le \dfrac{\pi}{2}, \quad 0 \le v \le 2\pi$

Para pensar **En los ejercicios 17 a 20, determinar cómo la gráfica de la superficie $\mathbf{s}(u, v)$ difiere de la gráfica de $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$ (ver la figura) donde $0 \le u \le 2$ y $0 \le v \le 2\pi$. (No es necesario representar s gráficamente.)**



17. $\mathbf{s}(u, v) = u \cos v\mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\mathbf{j} - u^2\mathbf{k}$
    $0 \le u \le 2, \quad 0 \le v \le 2\pi$
18. $\mathbf{s}(u, v) = u \cos v\mathbf{i} + u^2\mathbf{j} + u \operatorname{sen} v\mathbf{k}$
    $0 \le u \le 2, \quad 0 \le v \le 2\pi$
19. $\mathbf{s}(u, v) = u \cos v\mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$
    $0 \le u \le 3, \quad 0 \le v \le 2\pi$
20. $\mathbf{s}(u, v) = 4u \cos v\mathbf{i} + 4u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$
    $0 \le u \le 2, \quad 0 \le v \le 2\pi$

En los ejercicios 21 a 30, hallar una función vectorial cuya gráfica sea la superficie indicada.

21. El plano $z = y$
22. El plano $x + y + z = 6$
23. El cono $y = \sqrt{4x^2 + 9z^2}$
24. El cono $x = \sqrt{16y^2 + z^2}$
25. El cilindro $x^2 + y^2 = 25$
26. El cilindro $4x^2 + y^2 = 16$
27. El cilindro $z = x^2$
28. El elipsoide $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{1} = 1$
29. La parte del plano $z = 4$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = 9$
30. La parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = 9$

Superficie de revolución **En los ejercicios 31 a 34, dar un conjunto de ecuaciones paramétricas para la superficie de revolución obtenida por revolución de la gráfica de la función en torno al eje dado.**

Función	*Eje de revolución*
31. $y = \frac{x}{2}, \quad 0 \le x \le 6$	eje x
32. $y = \sqrt{x}, \quad 0 \le x \le 4$	eje x
33. $x = \operatorname{sen} z, \quad 0 \le z \le \pi$	eje z
34. $z = y^2 + 1, \quad 0 \le y \le 2$	eje y

Plano tangente **En los ejercicios 35 a 38, hallar una ecuación para el plano tangente a la superficie dada por la función vectorial, en el punto indicado.**

35. $\mathbf{r}(u, v) = (u + v)\mathbf{i} + (u - v)\mathbf{j} + v\mathbf{k}, \quad (1, -1, 1)$

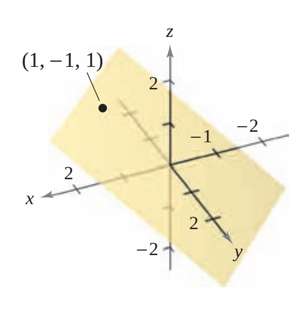


Figura para 35

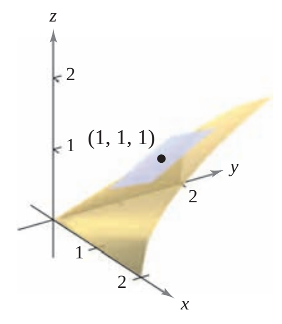
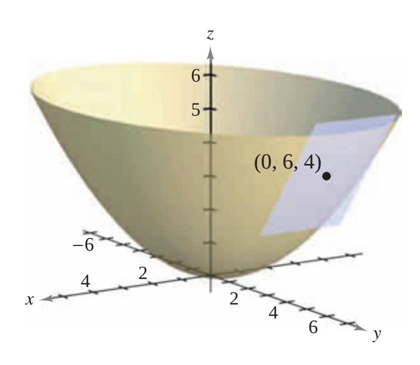


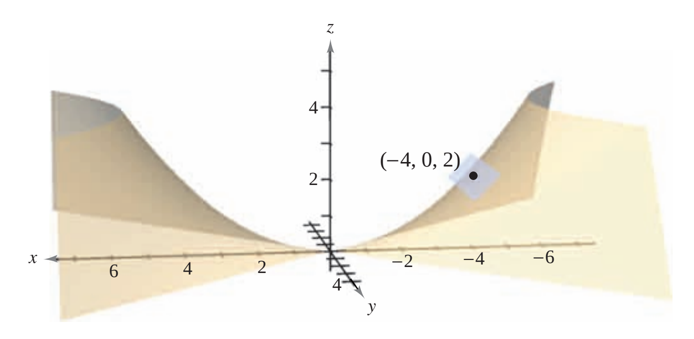
Figura para 36

36. $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \sqrt{uv}\,\mathbf{k}, \quad (1, 1, 1)$

37. $\mathbf{r}(u, v) = 2u \cos v\mathbf{i} + 3u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}, \quad (0, 6, 4)$



38. $\mathbf{r}(u, v) = 2u \cosh v\mathbf{i} + 2u \operatorname{senh} v\mathbf{j} + \frac{1}{2}u^2\mathbf{k}, \quad (-4, 0, 2)$



Área **En los ejercicios 39 a 46, hallar el área de la superficie sobre la región dada. Utilizar un sistema algebraico por computadora y verificar los resultados.**

39. La parte del plano $\mathbf{r}(u, v) = 4u\mathbf{i} - v\mathbf{j} + v\mathbf{k}$, donde $0 \le u \le 2$ y $0 \le v \le 1$

40. La parte del paraboloide $\mathbf{r}(u, v) = 2u \cos v\mathbf{i} + 2u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$, donde $0 \le u \le 2$ y $0 \le v \le 2\pi$

41. La parte del cilindro $\mathbf{r}(u, v) = a \cos u\mathbf{i} + a \operatorname{sen} u\mathbf{j} + v\mathbf{k}$, donde $0 \le u \le 2\pi$ y $0 \le v \le b$

42. La esfera $\mathbf{r}(u, v) = a \operatorname{sen} u \cos v\mathbf{i} + a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + a \cos u\mathbf{k}$, donde $0 \le u \le \pi$ y $0 \le v \le 2\pi$

43. La parte del cono $\mathbf{r}(u, v) = au \cos v\mathbf{i} + au \operatorname{sen} v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$, donde $0 \le u \le b$ y $0 \le v \le 2\pi$

44. El toro $\mathbf{r}(u, v) = (a + b \cos v)\cos u\mathbf{i} + (a + b \cos v)\operatorname{sen} u\mathbf{j} + b \operatorname{sen} v\mathbf{k}$, donde $a > b$, $0 \le u \le 2\pi$, y $0 \le v \le 2\pi$

45. La superficie de revolución $\mathbf{r}(u, v) = \sqrt{u} \cos v\mathbf{i} + \sqrt{u} \operatorname{sen} v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$, donde $0 \le u \le 4$ y $0 \le v \le 2\pi$

46. La superficie de revolución $\mathbf{r}(u, v) = \operatorname{sen} u \cos v\mathbf{i} + u\mathbf{j} + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\mathbf{k}$, donde $0 \le u \le \pi$ y $0 \le v \le 2\pi$

Desarrollo de conceptos

47. Definir una superficie paramétrica.

48. Dar la integral doble con las que se obtiene el área de la superficie de una superficie paramétrica sobre una región abierta D.

49. Mostrar que se puede representar el cono del ejemplo 3 de manera paramétrica mediante $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$, donde $0 \le u$ y $0 \le v \le 2\pi$.

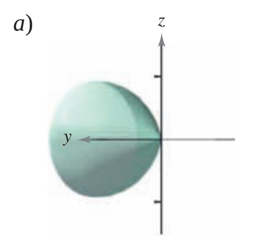
Para discusión

50. Las cuatro figuras son gráficas de la superficie
$\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + \operatorname{sen} u \cos v\mathbf{j} + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\mathbf{k}$,

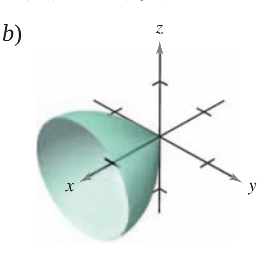
$0 \le u \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le v \le 2\pi.$

Relacionar cada una de las cuatro gráficas con el punto en el espacio desde el cual se contempla la superficie. Los cuatro puntos son (10, 0, 0), (−10,10, 0), (0, 10, 0) y (10, 10, 10).

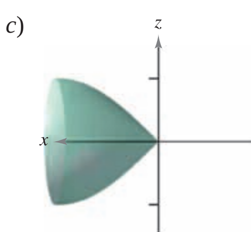
a)



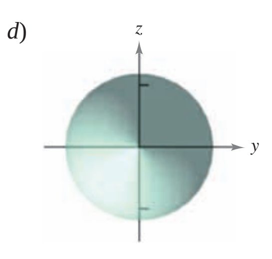
b)



c)



d)



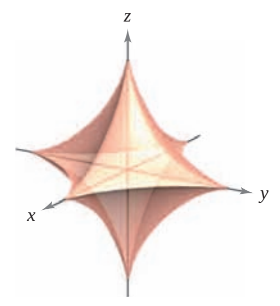
51. ***Esfera asteroidal*** Una ecuación de una **esfera asteroidal** en x, y y z es

$$x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}.$$

Abajo se presenta una gráfica de una esfera asteroidal. Mostrar que esta superficie puede representarse paramétricamente por medio de

$$\mathbf{r}(u, v) = a \operatorname{sen}^3 u \cos^3 v\mathbf{i} + a \operatorname{sen}^3 u \operatorname{sen}^3 v\mathbf{j} + a \cos^3 u\mathbf{k}$$

donde $0 \leq u \leq \pi$ y $0 \leq v \leq 2\pi$.



CAS **52.** Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente tres perspectivas de la gráfica de la función vectorial

$$\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + v\mathbf{k}, \quad 0 \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq v \leq \pi$$

desde los puntos (10, 0, 0), (0, 0, 10) y (10, 10, 10).

CAS **53.** ***Investigación*** Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente el toro

$$\mathbf{r}(u, v) = (a + b \cos v) \cos u\mathbf{i} + (a + b \cos v) \operatorname{sen} u\mathbf{j} + b \operatorname{sen} v\mathbf{k}$$

para cada conjunto de valores de a y b, donde $0 \leq u \leq 2\pi$ y $0 \leq v \leq 2\pi$. Utilizar los resultados para describir los efectos de a y b en la forma del toro.

a) $a = 4$, $b = 1$ *b*) $a = 4$, $b = 2$

c) $a = 8$, $b = 1$ *d*) $a = 8$, $b = 3$

54. ***Investigación*** Considerar la función del ejercicio 14.

a) Dibujar una gráfica de la función donde u se mantenga constante en $u = 1$. Identificar la gráfica.

b) Dibujar una gráfica de la función donde v se mantenga constante en $v = 2\pi/3$. Identificar la gráfica.

c) Suponer que una superficie está representada por la función vectorial $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$. ¿Qué generalización se puede hacer acerca de la gráfica de la función si uno de los parámetros se mantiene constante?

55. ***Área de la superficie*** La superficie de la cúpula de un museo está dada por

$$\mathbf{r}(u, v) = 20 \operatorname{sen} u \cos v\mathbf{i} + 20 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + 20 \cos u\mathbf{k}$$

donde $0 \leq u \leq \pi/3$, $0 \leq v \leq 2\pi$ y $\mathbf{r}$ está en metros. Hallar el área de la superficie de la cúpula.

56. Hallar una función vectorial para el hiperboloide

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

y determinar el plano tangente en (1, 0, 0).

57. Representar gráficamente y hallar el área de una vuelta completa de la rampa en espiral

$$\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + 2v\mathbf{k}$$

donde $0 \leq u \leq 3$ y $0 \leq v \leq 2\pi$.

58. Sea f una función no negativa tal que f' es continua en el intervalo $[a, b]$. Sea S la superficie de revolución formada por revolución de la gráfica de f, donde $a \leq x \leq b$, en torno al eje x. Sea $x = u$, $y = f(u) \cos v$ y $z = f(u) \operatorname{sen} v$, donde $a \leq u \leq b$ y $0 \leq v \leq 2\pi$. Entonces, S se representa paramétricamente mediante $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + f(u) \cos v\mathbf{j} + f(u) \operatorname{sen} v\mathbf{k}$. Mostrar que las fórmulas siguientes son equivalentes.

$$\text{Área de la superficie} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

$$\text{Área de la superficie} = \int_D\int \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|\, dA$$

CAS **59.** ***Proyecto abierto*** Las ecuaciones paramétricas

$$x = 3 + \operatorname{sen} u[7 - \cos(3u - 2v) - 2 \cos(3u + v)]$$

$$y = 3 + \cos u[7 - \cos(3u - 2v) - 2 \cos(3u + v)]$$

$$z = \operatorname{sen}(3u - 2v) + 2 \operatorname{sen}(3u + v)$$

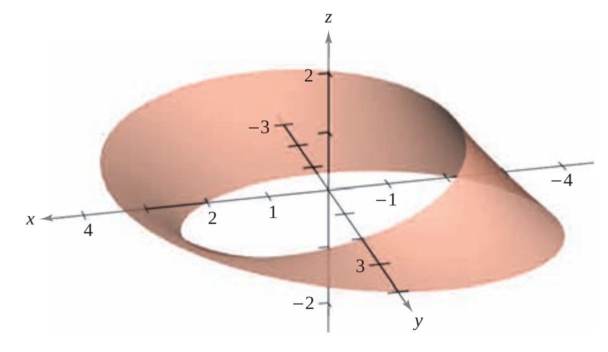
donde $-\pi \leq u \leq \pi$ y $-\pi \leq v \leq \pi$, representan la superficie mostrada en la figura. Tratar de crear una superficie paramétrica propia utilizando un sistema algebraico por computadora.



CAS **60.** ***Banda de Möbius*** La superficie mostrada en la figura se llama **banda de Möbius** y puede representarse mediante las ecuaciones paramétricas

$$x = \left(a + u \cos\frac{v}{2}\right) \cos v,\ y = \left(a + u \cos\frac{v}{2}\right) \operatorname{sen} v,\ z = u \operatorname{sen}\frac{v}{2}$$

donde $-1 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 2\pi$ y $a = 3$. Trate de representar gráficamente otra banda de Möbius para diferentes valores de a utilizando un sistema algebraico por computadora.



15.6 Integrales de superficie

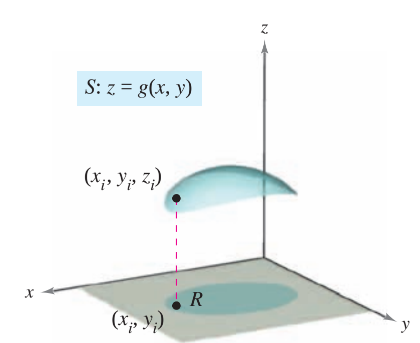
- **Evaluar una integral de superficie como una integral doble.**
- **Evaluar integrales de superficie sobre superficies paramétricas.**
- **Determinar la orientación de una superficie.**
- **Comprender el concepto de integral de flujo.**

Integrales de superficie

El resto de este capítulo se ocupa principalmente de **integrales de superficie**. Primero se considerarán superficies dadas por $z = g(x, y)$. Más adelante, en esta sección, se considerarán superficies más generales dadas en forma paramétrica.

Sea S una superficie dada por $z = g(x, y)$ y sea R su proyección sobre el plano xy, como se muestra en la figura 15.44. Supóngase que g, g_x y g_y son continuas en todos los puntos de R y que f está definida en S. Empleando el procedimiento usado para hallar el área de una superficie en la sección 14.5, se evalúa f en (x_i, y_i, z_i) y se forma la suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta S_i$$



La función escalar f asigna un número a cada punto de S
Figura 15.44

donde $\Delta S_i \approx \sqrt{1 + [g_x(x_i, y_i)]^2 + [g_y(x_i, y_i)]^2}\,\Delta A_i$. Siempre que el límite de la suma anterior cuando $\|\Delta\|$ tiende a 0 exista, la **integral de superficie de f sobre S** se define como

$$\int_S\int f(x, y, z)\,dS = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta S_i.$$

Esta integral se puede evaluar mediante una integral doble.

TEOREMA 15.10 EVALUACIÓN DE UNA INTEGRAL DE SUPERFICIE

Sea S una superficie cuya ecuación es $z = g(x, y)$ y sea R su proyección sobre el plano xy. Si g, g_x y g_y son continuas en R y f es continua en S, entonces la integral de superficie de f sobre S es

$$\int_S\int f(x, y, z)\,dS = \int_R\int f(x, y, g(x, y))\sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2}\,dA.$$

Para superficies descritas por funciones de x y z (o de y y z), al teorema 15.10 se le pueden hacer los ajustes siguientes. Si S es la gráfica de $y = g(x, z)$ y R es su proyección sobre el plano xz, entonces,

$$\int_S\int f(x, y, z)\,dS = \int_R\int f(x, g(x, z), z)\sqrt{1 + [g_x(x, z)]^2 + [g_z(x, z)]^2}\,dA.$$

Si S es la gráfica de $x = g(y, z)$ y R es su proyección sobre el plano yz, entonces

$$\int_S\int f(x, y, z)\,dS = \int_R\int f(g(y, z), y, z)\sqrt{1 + [g_y(y, z)]^2 + [g_z(y, z)]^2}\,dA.$$

Si $f(x, y, z) = 1$, la integral de superficie sobre S da el área de la superficie de S. Por ejemplo, supóngase que la superficie S es el plano dado por $z = x$, donde $0 \le x \le 1$ y $0 \le y \le 1$. El área de la superficie de S es $\sqrt{2}$ unidades cuadradas. Trátese de verificar que $\int_S\int f(x, y, z)\,dS = \sqrt{2}$.

EJEMPLO 1 Evaluación de una integral de superficie

Evaluar la integral de superficie

$$\int_S\int (y^2 + 2yz)\, dS$$

donde S es la porción del plano $2x + y + 2z = 6$ que se encuentra en el primer octante.

Solución Para empezar se escribe S como

$$z = \frac{1}{2}(6 - 2x - y)$$

$$g(x, y) = \frac{1}{2}(6 - 2x - y).$$

Usando las derivadas parciales $g_x(x, y) = -1$ y $g_y(x, y) = -\frac{1}{2}$, se puede escribir

$$\sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2} = \sqrt{1 + 1 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{2}.$$

Utilizando la figura 15.45 y el teorema 15.10, se obtiene

$$\begin{aligned}\int_S\int (y^2 + 2yz)\, dS &= \int_R\int f(x, y, g(x, y))\sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2}\, dA \\ &= \int_R\int \left[y^2 + 2y\left(\frac{1}{2}\right)(6 - 2x - y)\right]\left(\frac{3}{2}\right) dA \\ &= 3\int_0^3\int_0^{2(3-x)} y(3 - x)\, dy\, dx \\ &= 6\int_0^3 (3 - x)^3\, dx \\ &= -\frac{3}{2}(3 - x)^4\Big]_0^3 \\ &= \frac{243}{2}.\end{aligned}$$

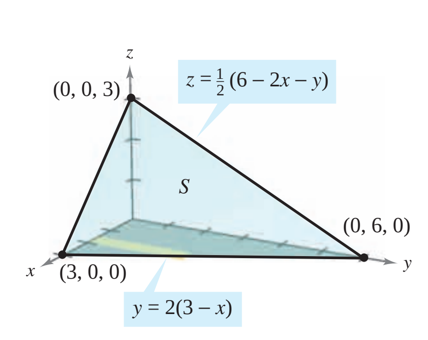


Figura 15.45

Una solución alternativa para el ejemplo 1 sería proyectar S sobre el plano yz, como se muestra en la figura 15.46. Entonces, $x = \frac{1}{2}(6 - y - 2z)$, y

$$\sqrt{1 + [g_y(y, z)]^2 + [g_z(y, z)]^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + 1} = \frac{3}{2}.$$

Por tanto, la integral de superficie es

$$\begin{aligned}\int_S\int (y^2 + 2yz)\, dS &= \int_R\int f(g(y, z), y, z)\sqrt{1 + [g_y(y, z)]^2 + [g_z(y, z)]^2}\, dA \\ &= \int_0^6\int_0^{(6-y)/2} (y^2 + 2yz)\left(\frac{3}{2}\right) dz\, dy \\ &= \frac{3}{8}\int_0^6 (36y - y^3)\, dy \\ &= \frac{243}{2}.\end{aligned}$$

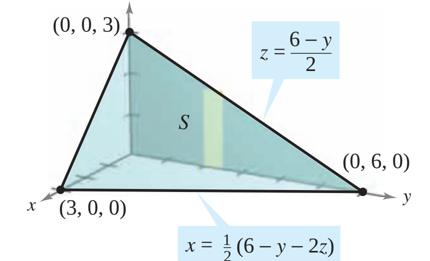


Figura 15.46

Trátese de resolver el ejemplo 1 proyectando S sobre el plano xz.

En el ejemplo 1 se podría haber proyectado la superficie S en cualquiera de los tres planos de coordenadas. En el ejemplo 2, S es una porción de un cilindro centrado en el eje x, y puede ser proyectado en el plano xz o en el plano xy.

EJEMPLO 2 Evaluación de una integral de superficie

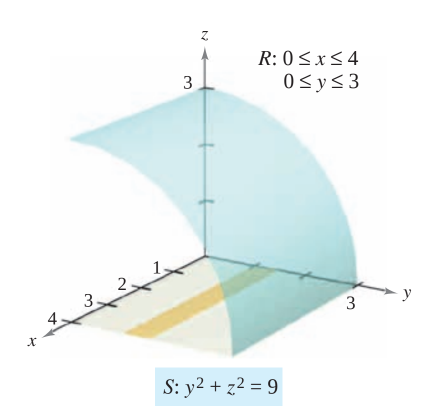


Figura 15.47

Evaluar la integral de superficie

$$\int_S\int (x + z)\, dS$$

donde S es la porción del cilindro $y^2 + z^2 = 9$ que se encuentra en el primer octante, entre $x = 0$ y $x = 4$, como se muestra en la figura 15.47.

Solución Se proyecta S sobre el plano xy, de manera que $z = g(x, y) = \sqrt{9 - y^2}$, y se obtiene

$$\sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{-y}{\sqrt{9 - y^2}}\right)^2}$$
$$= \frac{3}{\sqrt{9 - y^2}}.$$

El teorema 15.10 no se puede aplicar directamente porque g_y no es continua en $y = 3$. Sin embargo, se puede aplicar el teorema para $0 \leq b < 3$ y después tomar el límite cuando b se aproxima a 3, como sigue.

$$\int_S\int (x + z)\, dS = \lim_{b\to 3^-} \int_0^b \int_0^4 \left(x + \sqrt{9 - y^2}\right)\frac{3}{\sqrt{9 - y^2}}\, dx\, dy$$
$$= \lim_{b\to 3^-} 3\int_0^b \int_0^4 \left(\frac{x}{\sqrt{9 - y^2}} + 1\right) dx\, dy$$
$$= \lim_{b\to 3^-} 3\int_0^b \left[\frac{x^2}{2\sqrt{9 - y^2}} + x\right]_0^4 dy$$
$$= \lim_{b\to 3^-} 3\int_0^b \left(\frac{8}{\sqrt{9 - y^2}} + 4\right) dy$$
$$= \lim_{b\to 3^-} 3\left[4y + 8 \operatorname{arcsen} \frac{y}{3}\right]_0^b$$
$$= \lim_{b\to 3^-} 3\left(4b + 8 \operatorname{arcsen} \frac{b}{3}\right)$$
$$= 36 + 24\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= 36 + 12\pi$$

TECNOLOGÍA Algunos sistemas algebraicos por computadora evalúan integrales impropias. Si se tiene acceso a uno de estos programas, utilícese para evaluar la integral impropia

$$\int_0^3 \int_0^4 \left(x + \sqrt{9 - y^2}\right)\frac{3}{\sqrt{9 - y^2}}\, dx\, dy.$$

¿Se obtiene el mismo resultado que en el ejemplo 2?

Se ha visto que si la función f definida sobre la superficie S es simplemente $f(x, y, z) = 1$, la integral de superficie da el *área de la superficie S*.

$$\text{Área de la superficie} = \int\!\!\int_S 1\, dS$$

Por otro lado, si S es una lámina de densidad variable y $\rho(x, y, z)$ es la densidad en el punto (x, y, z), entonces la *masa* de la lámina está dada por

$$\text{Masa de la lámina} = \int\!\!\int_S \rho(x, y, z)\, dS.$$

EJEMPLO 3 Hallar la masa de una lámina bidimensional

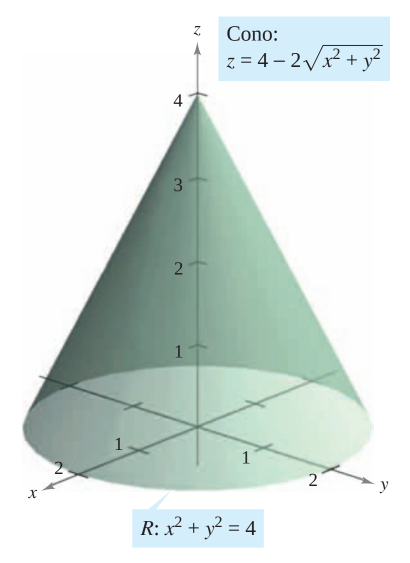


Figura 15.48

Una lámina bidimensional S en forma de cono está dada por

$$z = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}, \quad 0 \le z \le 4$$

como se muestra en la figura 15.48. En todo punto de S, la densidad es proporcional a la distancia entre el punto y el eje z. Hallar la masa m de la lámina.

Solución Al proyectar S sobre el plano xy se obtiene

$$S: z = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2} = g(x, y), \quad 0 \le z \le 4$$
$$R: x^2 + y^2 \le 4$$

con densidad $\rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$. Usando una integral de superficie, se halla que es

$$\begin{aligned}
m &= \int\!\!\int_S \rho(x, y, z)\, dS \\
&= \int\!\!\int_R k\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2}\, dA \\
&= k\int\!\!\int_R \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{1 + \frac{4x^2}{x^2 + y^2} + \frac{4y^2}{x^2 + y^2}}\, dA \\
&= k\int\!\!\int_R \sqrt{5}\sqrt{x^2 + y^2}\, dA \\
&= k\int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(\sqrt{5}r\right) r\, dr\, d\theta && \text{Coordenadas polares.} \\
&= \frac{\sqrt{5}k}{3}\int_0^{2\pi} r^3\Big]_0^2\, d\theta \\
&= \frac{8\sqrt{5}k}{3}\int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \frac{8\sqrt{5}k}{3}\Big[\theta\Big]_0^{2\pi} = \frac{16\sqrt{5}k\pi}{3}.
\end{aligned}$$

TECNOLOGÍA Utilizar un sistema algebraico por computadora y confirmar el resultado del ejemplo 3. El sistema algebraico por computadora *Maple* calculó la integral así:

$$k\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{5}\sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy = k\int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(\sqrt{5}r\right) r\, dr\, d\theta = \frac{16\sqrt{5}k\pi}{3}$$

Superficies paramétricas e integrales de superficie

Se puede mostrar que para una superficie S dada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$ Superficie paramétrica.

definida sobre una región D en el plano uv, la integral de superficie de $f(x, y, z)$ sobre S está dada por

$$\int\int_S f(x, y, z)\, dS = \int\int_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\, \|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\|\, dA.$$

Obsérvese la analogía con una integral de línea sobre una curva C en el espacio.

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\, \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt$$ Integral de línea.

NOTA Véase que ds y dS pueden escribirse como $ds = \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt$ y $dS = \|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\|\, dA$. ■

EJEMPLO 4 Evaluación de una integral de superficie

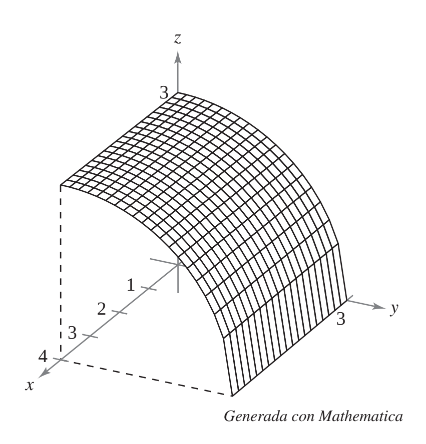


Figura 15.49

En el ejemplo 2 se mostró una evaluación de la integral de superficie

$$\int\int_S (x + z)\, dS$$

donde S es la porción, en el primer octante, del cilindro $y^2 + z^2 = 9$ entre $x = 0$ y $x = 4$ (ver la figura 15.49). Evaluar esta misma integral, ahora en forma paramétrica.

Solución En forma paramétrica, la superficie está dada por

$$\mathbf{r}(x, \theta) = x\mathbf{i} + 3\cos\theta\mathbf{j} + 3\operatorname{sen}\theta\mathbf{k}$$

donde $0 \le x \le 4$ y $0 \le \theta \le \pi/2$. Para evaluar la integral de superficie en forma paramétrica, se empieza por calcular lo siguiente.

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i}$$

$$\mathbf{r}_\theta = -3\operatorname{sen}\theta\mathbf{j} + 3\cos\theta\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3\operatorname{sen}\theta & 3\cos\theta \end{vmatrix} = -3\cos\theta\mathbf{j} - 3\operatorname{sen}\theta\mathbf{k}$$

$$\|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta\| = \sqrt{9\cos^2\theta + 9\operatorname{sen}^2\theta} = 3$$

Por tanto, la integral de superficie puede ser evaluada como sigue.

$$\begin{aligned}\int\int_D (x + 3\operatorname{sen}\theta)3\, dA &= \int_0^4\int_0^{\pi/2} (3x + 9\operatorname{sen}\theta)\, d\theta\, dx \\ &= \int_0^4 \Big[3x\theta - 9\cos\theta\Big]_0^{\pi/2} dx \\ &= \int_0^4 \left(\frac{3\pi}{2}x + 9\right) dx \\ &= \left[\frac{3\pi}{4}x^2 + 9x\right]_0^4 \\ &= 12\pi + 36\end{aligned}$$

Orientación de una superficie

Para inducir una orientación en una superficie S en el espacio se utilizan vectores unitarios normales. Se dice que una superficie es **orientable** si en todo punto de S que no sea un punto frontera puede definirse un vector unitario normal $\mathbf{N}$ de manera tal que los vectores normales varíen continuamente sobre la superficie S. Si esto es posible, S es una **superficie orientada**.

Una superficie orientable S tiene dos caras. Así, cuando se orienta una superficie, se elige uno de los dos vectores unitarios normales posibles. Si S es una superficie cerrada, como por ejemplo una esfera, se acostumbra escoger como vector unitario normal $\mathbf{N}$, el que apunta hacia fuera de la esfera.

Las superficies más comunes, como esferas, paraboloides, elipses y planos, son orientables. (Ver en el ejercicio 43 un ejemplo de una superficie que *no* es orientable.) En una superficie orientable, el vector gradiente proporciona una manera adecuada de hallar un vector unitario normal. Es decir, en una superficie orientable S dada por

$$z = g(x, y) \qquad \text{Superficie orientable.}$$

se hace

$$G(x, y, z) = z - g(x, y).$$

Entonces, S puede orientarse, ya sea por el vector unitario normal

$$\mathbf{N} = \frac{\nabla G(x, y, z)}{\|\nabla G(x, y, z)\|} = \frac{-g_x(x, y)\mathbf{i} - g_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2}} \qquad \text{Unitario normal hacia arriba.}$$

o por el vector unitario normal

$$\mathbf{N} = \frac{-\nabla G(x, y, z)}{\|\nabla G(x, y, z)\|} = \frac{g_x(x, y)\mathbf{i} + g_y(x, y)\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2}} \qquad \text{Unitario normal hacia abajo.}$$

como se muestra en la figura 15.50. Si la superficie suave orientable S está dada en forma paramétrica por

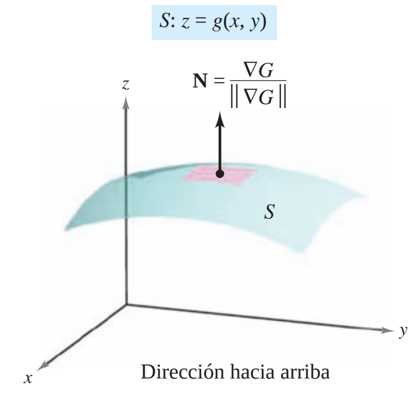
$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \qquad \text{Superficie paramétrica.}$$

los vectores unitarios normales están dados por

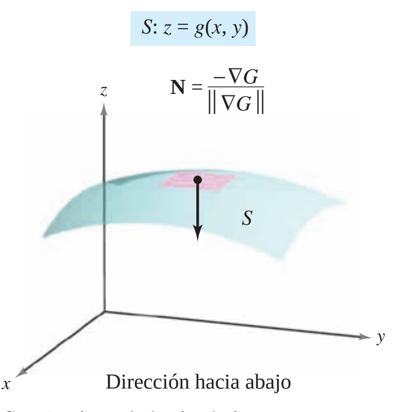
$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|}$$

y

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_u}{\|\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_u\|}.$$



S está orientada hacia arriba



S está orientada hacia abajo

Figura 15.50

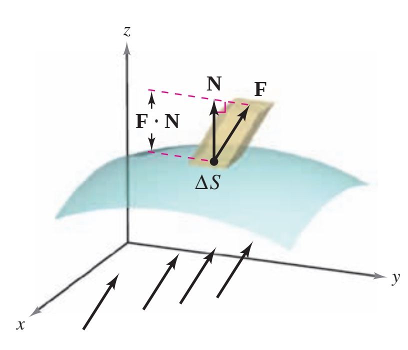
NOTA Supóngase que la superficie orientable está dada por $y = g(x, z)$ o $x = g(y, z)$. Entonces se puede usar el vector gradiente

$$\nabla G(x, y, z) = -g_x(x, z)\mathbf{i} + \mathbf{j} - g_z(x, z)\mathbf{k} \qquad G(x, y, z) = y - g(x, z).$$

o

$$\nabla G(x, y, z) = \mathbf{i} - g_y(y, z)\mathbf{j} - g_z(y, z)\mathbf{k} \qquad G(x, y, z) = x - g(y, z).$$

para orientar la superficie. ■



El campo de velocidad **F** indica la dirección de flujo del fluido
Figura 15.51

Integrales de flujo

Una de las aplicaciones principales que emplean la forma vectorial de una integral de superficie se refiere al flujo de un fluido a través de una superficie S. Supóngase que una superficie orientada S se sumerge en un fluido que tiene un campo de velocidad continua $\mathbf{F}$. Sea ΔS el área de una pequeña porción de la superficie S sobre la cual $\mathbf{F}$ es casi constante. Entonces la cantidad de fluido que atraviesa esta región por unidad de tiempo se aproxima mediante el volumen de la columna de altura $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}$, que se muestra en la figura 15.51. Es decir,

$$\Delta V = (\text{altura})(\text{área de la base}) = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{N})\Delta S.$$

Por consiguiente, el volumen del fluido que atraviesa la superficie S por unidad de tiempo (llamada el **flujo de F a través de *S***) está dado por la integral de superficie de la definición siguiente.

DEFINICIÓN DE INTEGRAL DE FLUJO

Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$, donde M, N y P tienen primeras derivadas parciales continuas sobre la superficie S orientada mediante un vector unitario normal $\mathbf{N}$. La **integral de flujo de F a través de *S*** está dada por

$$\int_S\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS.$$

Geométricamente, una integral de flujo es la integral de superficie sobre S de la *componente normal* de $\mathbf{F}$. Si $\rho(x, y, z)$ es la densidad del fluido en (x, y, z), la integral de flujo

$$\int_S\int \rho\, \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$$

representa la *masa* del fluido que fluye a través de S por unidad de tiempo.

Para evaluar una integral de flujo de una superficie dada por $z = g(x, y)$, se hace

$$G(x, y, z) = z - g(x, y).$$

Entonces, $\mathbf{N}\, dS$ puede escribirse como sigue.

$$\begin{aligned}\mathbf{N}\, dS &= \frac{\nabla G(x, y, z)}{\|\nabla G(x, y, z)\|}\, dS \\ &= \frac{\nabla G(x, y, z)}{\sqrt{(g_x)^2 + (g_y)^2 + 1}} \sqrt{(g_x)^2 + (g_y)^2 + 1}\, dA \\ &= \nabla G(x, y, z)\, dA\end{aligned}$$

TEOREMA 15.11 EVALUACIÓN DE UNA INTEGRAL DE FLUJO

Sea S una superficie orientada dada por $z = g(x, y)$ y sea R su proyección sobre el plano xy.

$$\int_S\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \int_R\int \mathbf{F} \cdot [-g_x(x, y)\mathbf{i} - g_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}]\, dA \quad \text{Orientada hacia arriba.}$$

$$\int_S\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \int_R\int \mathbf{F} \cdot [g_x(x, y)\mathbf{i} + g_y(x, y)\mathbf{j} - \mathbf{k}]\, dA \quad \text{Orientada hacia abajo.}$$

En la primera integral, la superficie está orientada hacia arriba, y en la segunda integral, la superficie está orientada hacia abajo.

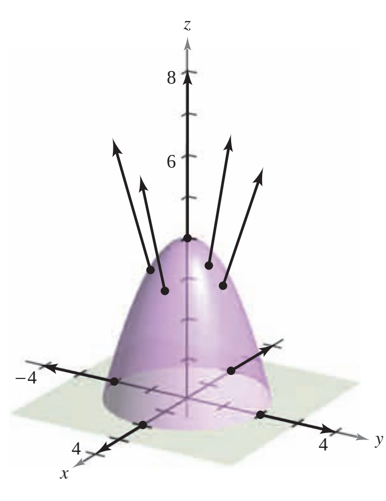


Figura 15.52

EJEMPLO 5 Usar una integral de flujo para hallar la tasa o ritmo del flujo de masa

Sea S la porción del paraboloide

$$z = g(x, y) = 4 - x^2 - y^2$$

que se encuentra sobre el plano xy, orientado por medio de un vector unitario normal dirigido hacia arriba, como se muestra en la figura 15.52. Un fluido de densidad constante ρ fluye a través de la superficie S de acuerdo con el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Hallar la tasa o ritmo de flujo de masa a través de S.

Solución Se empieza por calcular las derivadas parciales de g.

$$g_x(x, y) = -2x$$

y

$$g_y(x, y) = -2y$$

La tasa o el ritmo de flujo de masa a través de la superficie S es

$$\begin{aligned}
\int_S\int \rho\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS &= \rho\int_R\int \mathbf{F}\cdot[-g_x(x, y)\mathbf{i} - g_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}]\,dA \\
&= \rho\int_R\int [x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (4 - x^2 - y^2)\mathbf{k}]\cdot(2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k})\,dA \\
&= \rho\int_R\int [2x^2 + 2y^2 + (4 - x^2 - y^2)]\,dA \\
&= \rho\int_R\int (4 + x^2 + y^2)\,dA \\
&= \rho\int_0^{2\pi}\int_0^2 (4 + r^2)r\,dr\,d\theta \qquad \text{Coordenadas polares.} \\
&= \rho\int_0^{2\pi} 12\,d\theta \\
&= 24\pi\rho.
\end{aligned}$$

Para una superficie orientada S dada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \qquad \text{Superficie paramétrica.}$$

definida sobre una región D del plano uv, se puede definir la integral de flujo de $\mathbf{F}$ a través de S como

$$\begin{aligned}
\int_S\int \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS &= \int_D\int \mathbf{F}\cdot\left(\frac{\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|}\right)\|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|\,dA \\
&= \int_D\int \mathbf{F}\cdot(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)\,dA.
\end{aligned}$$

Nótese la semejanza de esta integral con la integral de línea

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds.$$

En la página 1121 se presenta un resumen de las fórmulas para integrales de línea y de superficie.

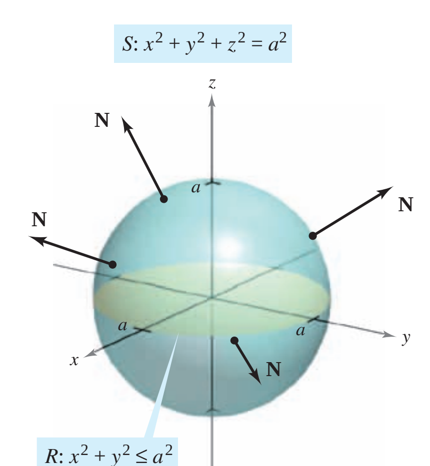


Figura 15.53

EJEMPLO 6 Hallar el flujo de un campo cuadrático inverso

Hallar el flujo sobre la esfera S dada por

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \qquad \text{Esfera } S.$$

donde **F** es un campo cuadrático inverso dado por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{kq}{\|\mathbf{r}\|^2}\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} = \frac{kq\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} \qquad \text{Campo cuadrático inverso } \mathbf{F}.$$

y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Supóngase que S está orientada hacia afuera, como se muestra en la figura 15.53.

Solución La esfera está dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(u, v) &= x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}\\ &= a \operatorname{sen} u \cos v\mathbf{i} + a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + a \cos u\mathbf{k}\end{aligned}$$

donde $0 \leq u \leq \pi$ y $0 \leq v \leq 2\pi$. Las derivadas parciales de **r** son

$$\mathbf{r}_u(u, v) = a \cos u \cos v\,\mathbf{i} + a \cos u \operatorname{sen} v\,\mathbf{j} - a \operatorname{sen} u\mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{r}_v(u, v) = -a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\mathbf{i} + a \operatorname{sen} u \cos v\mathbf{j}$$

lo cual implica que el vector normal $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ es

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a \cos u \cos v & a \cos u \operatorname{sen} v & -a \operatorname{sen} u \\ -a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v & a \operatorname{sen} u \cos v & 0 \end{vmatrix}\\ &= a^2(\operatorname{sen}^2 u \cos v\mathbf{i} + \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + \operatorname{sen} u \cos u\mathbf{k}).\end{aligned}$$

Ahora, usando

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(x, y, z) &= \frac{kq\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}\\ &= kq\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\|x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}\|^3}\\ &= \frac{kq}{a^3}(a \operatorname{sen} u \cos v\mathbf{i} + a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + a \cos u\mathbf{k})\end{aligned}$$

se sigue que

$$\begin{aligned}\mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) &= \frac{kq}{a^3}[(a \operatorname{sen} u \cos v\mathbf{i} + a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + a \cos u\mathbf{k}) \cdot\\ &\qquad a^2(\operatorname{sen}^2 u \cos v\mathbf{i} + \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + \operatorname{sen} u \cos u\mathbf{k})]\\ &= kq(\operatorname{sen}^3 u \cos^2 v + \operatorname{sen}^3 u \operatorname{sen}^2 v + \operatorname{sen} u \cos^2 u)\\ &= kq \operatorname{sen} u.\end{aligned}$$

Por último, el flujo sobre la esfera S está dado por

$$\begin{aligned}\int\!\!\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS &= \int\!\!\int_D (kq \operatorname{sen} u)\, dA\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} kq \operatorname{sen} u\, du\, dv\\ &= 4\pi kq.\end{aligned}$$

El resultado del ejemplo 6 muestra que el flujo a través de una esfera S en un campo cuadrático inverso es independiente del radio de S. En particular, si $\mathbf{E}$ es un campo eléctrico, el resultado obtenido en el ejemplo 6, junto con la ley de Coulomb, proporciona una de las leyes básicas de electrostática, conocida como la **ley de Gauss**:

$$\int_S\int \mathbf{E}\cdot\mathbf{N}\,dS = 4\pi kq$$

Ley de Gauss.

donde q es un carga puntual localizada en el centro de la esfera y k es la constante de Coulomb. La ley de Gauss es válida para superficies cerradas más generales que contengan el origen, y relaciona el flujo que sale de la superficie con la carga total q dentro de la superficie.

Esta sección concluye con un resumen de fórmulas de integrales de línea y de integrales de superficie.

Resumen de integrales de línea y de superficie

Integrales de línea

$$ds = \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt$$
$$= \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt$$

$$\int_C f(x, y, z)\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\,ds$$

Forma escalar.

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$$
$$= \int_a^b \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt$$

Forma vectorial.

Integrales de superficie $[z = g(x, y)]$

$$dS = \sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2}\,dA$$

$$\int_S\int f(x, y, z)\,dS = \int_R\int f(x, y, g(x, y))\sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2}\,dA$$

Forma escalar.

$$\int_S\int \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \int_R\int \mathbf{F}\cdot[-g_x(x, y)\mathbf{i} - g_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}]\,dA$$

Forma vectorial (normal hacia arriba).

Integrales de superficie (forma paramétrica)

$$dS = \|\mathbf{r}_u(u, v)\times\mathbf{r}_v(u, v)\|\,dA$$

$$\int_S\int f(x, y, z)\,dS = \int_D\int f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\,dS$$

Forma escalar.

$$\int_S\int \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \int_D\int \mathbf{F}\cdot(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)\,dA$$

Forma vectorial.

15.6 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, evaluar $\int_S\int (x - 2y + z)\, dS$.

1. S: $z = 4 - x$, $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 3$
2. S: $z = 15 - 2x + 3y$, $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 4$
3. S: $z = 2$, $x^2 + y^2 \le 1$
4. S: $z = \frac{2}{3}x^{3/2}$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x$

En los ejercicios 5 y 6, evaluar $\int_S\int xy\, dS$.

5. S: $z = 3 - x - y$, primer octante
6. S: $z = h$, $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le \sqrt{4 - x^2}$

CAS **En los ejercicios 7 y 8, utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar**

$$\int_S\int xy\, dS.$$

7. S: $z = 9 - x^2$, $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le x$
8. S: $z = \frac{1}{2}xy$, $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 4$

CAS **En los ejercicios 9 y 10, utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar**

$$\int_S\int (x^2 - 2xy)\, dS.$$

9. S: $z = 10 - x^2 - y^2$, $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2$
10. S: $z = \cos x$, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$, $0 \le y \le \dfrac{1}{2}x$

Masa **En los ejercicios 11 y 12, hallar la masa de la lámina bidimensional S de densidad ρ.**

11. S: $2x + 3y + 6z = 12$, primer octante, $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$
12. S: $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $\rho(x, y, z) = kz$

En los ejercicios 13 a 16, evaluar $\int_S\int f(x, y)\, dS$.

13. $f(x, y) = y + 5$
    S: $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + 2v\mathbf{k}$, $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 2$
14. $f(x, y) = xy$
    S: $\mathbf{r}(u, v) = 2\cos u\,\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\, u\,\mathbf{j} + v\mathbf{k}$
    $0 \le u \le \dfrac{\pi}{2}$, $0 \le v \le 1$
15. $f(x, y) = x + y$
    S: $\mathbf{r}(u, v) = 2\cos u\,\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\, u\,\mathbf{j} + v\mathbf{k}$
    $0 \le u \le \dfrac{\pi}{2}$, $0 \le v \le 1$
16. $f(x, y) = x + y$
    S: $\mathbf{r}(u, v) = 4u\cos v\,\mathbf{i} + 4u\,\text{sen}\, v\,\mathbf{j} + 3u\mathbf{k}$
    $0 \le u \le 4$, $0 \le v \le \pi$

En los ejercicios 17 a 22, evaluar $\int_S\int f(x, y, z)\, dS$.

17. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
    S: $z = x + y$, $x^2 + y^2 \le 1$
18. $f(x, y, z) = \dfrac{xy}{z}$
    S: $z = x^2 + y^2$, $4 \le x^2 + y^2 \le 16$
19. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
    S: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \le 4$
20. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
    S: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x - 1)^2 + y^2 \le 1$
21. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
    S: $x^2 + y^2 = 9$, $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 3$, $0 \le z \le 9$
22. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
    S: $x^2 + y^2 = 9$, $0 \le x \le 3$, $0 \le z \le x$

En los ejercicios 23 a 28, hallar el flujo de F a través de S,

$$\int_S\int \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS$$

donde N es el vector unitario normal a S dirigido hacia arriba.

23. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3z\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + y\mathbf{k}$
    S: $z = 1 - x - y$, primer octante
24. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
    S: $z = 6 - 3x - 2y$, primer octante
25. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
    S: $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \ge 0$
26. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
    S: $x^2 + y^2 + z^2 = 36$, primer octante
27. $\mathbf{F}(x, y, z) = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$
    S: $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \le 4$
28. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$
    S: $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

En los ejercicios 29 y 30, hallar el flujo de F sobre la superficie cerrada. (Sea N el vector unitario normal a la superficie dirigido hacia afuera.)

29. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
    S: $z = 16 - x^2 - y^2$, $z = 0$
30. $\mathbf{F}(x, y, z) = 4xy\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$
    S: cubo unitario limitado o acotado por $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$
31. ***Carga eléctrica*** Sea $\mathbf{E} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ un campo electrostático. Usar la ley de Gauss para hallar la carga total que hay en el interior de la superficie cerrada formada por el hemisferio $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y su base circular en el plano xy.

32. ***Carga eléctrica*** Sea $\mathbf{E} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ un campo electrostático. Usar la ley de Gauss para hallar la carga total que hay en el interior de la superficie cerrada formada por el hemisferio $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y su base circular en el plano xy.

Momento de inercia **En los ejercicios 33 y 34, utilizar las fórmulas siguientes para los momentos de inercia con respecto a los ejes coordenados de una lámina bidimensional de densidad ρ.**

$$I_x = \iint_S (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dS$$

$$I_y = \iint_S (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dS$$

$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, dS$$

33. Verificar que el momento de inercia de una capa cónica de densidad uniforme, con respecto a su eje, es $\frac{1}{2}ma^2$, donde m es la masa y a es el radio y altura.

34. Verificar que el momento de inercia de una capa esférica de densidad uniforme, con respecto a su diámetro, es $\frac{2}{3}ma^2$, donde m es la masa y a es el radio.

Momento de inercia **En los ejercicios 35 y 36, calcular I_z para la lámina especificada con densidad uniforme igual a 1. Utilizar un sistema algebraico por computadora y verificar los resultados.**

35. $x^2 + y^2 = a^2, \quad 0 \le z \le h$

36. $z = x^2 + y^2, \quad 0 \le z \le h$

CAS ***Ritmo o tasa de flujo*** **En los ejercicios 37 y 38, utilizar un sistema algebraico por computadora y hallar el ritmo o tasa de flujo de masa de un fluido de densidad ρ a través de la superficie S orientada hacia arriba, si el campo de velocidad está dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = 0.5z\mathbf{k}$.**

37. S: $z = 16 - x^2 - y^2, \quad z \ge 0$

38. S: $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

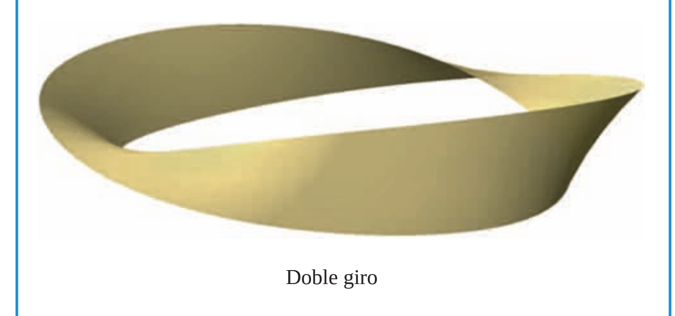
Desarrollo de conceptos

39. Definir la integral de superficie de la función escalar f sobre una superficie $z = g(x, y)$. Explicar cómo se calculan las integrales de superficie.

40. Describir una superficie orientable.

41. Definir una integral de flujo y explicar cómo se evalúa.

42. ¿Es orientable la superficie de la figura adjunta? Explicar.



Doble giro

CAS **43.** ***Investigación***

a) Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la función vectorial

$$\mathbf{r}(u, v) = (4 - v\,\mathrm{sen}\,u)\cos(2u)\mathbf{i} + (4 - v\,\mathrm{sen}\,u)\mathrm{sen}(2u)\mathbf{j} + v\cos u\mathbf{k}, \quad 0 \le u \le \pi, \quad -1 \le v \le 1.$$

A esta superficie se le llama banda de Möbius.

b) Explicar por qué esta superficie no es orientable.

c) Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la curva en el espacio dada por $\mathbf{r}(u, 0)$. Identificar la curva.

d) Construir una banda de Möbius cortando una tira de papel, dándole un solo giro, y pegando los extremos.

e) Cortar la banda de Möbius a lo largo de la curva en el espacio del inciso *c*), y describir el resultado.

Para discusión

44. Considerar el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$$

y la superficie orientable S dada por la forma paramétrica

$$\mathbf{r}(u, v) = (u + v^2)\mathbf{i} + (u - v)\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}, \quad 0 \le u \le 2, -1 \le v \le 1.$$

a) Encontrar e interpretar $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$.

b) Encontrar $\mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)$ como una función de u y v.

c) Encontrar u y v en el punto $P(3, 1, 4)$.

d) Explicar cómo encontrar la componente normal de $\mathbf{F}$ a la superficie en P. Encontrar después su valor.

e) Evaluar la integral de flujo $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$.

PROYECTO DE TRABAJO

Hiperboloide de una hoja

Considerar la superficie paramétrica dada por la función

$$\mathbf{r}(u, v) = a\cosh u\cos v\mathbf{i} + a\cosh u\,\mathrm{sen}\,v\mathbf{j} + b\,\mathrm{senh}\,u\mathbf{k}.$$

a) Usar una herramienta de graficación para representar $\mathbf{r}$ para varios valores de las constantes a y b. Describir el efecto de las constantes sobre la forma de la superficie.

b) Mostrar que la superficie es un hiperboloide de una hoja dado por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

c) Para valores fijos $u = u_0$, describir las curvas dadas por

$$\mathbf{r}(u_0, v) = a\cosh u_0\cos v\mathbf{i} + a\cosh u_0\,\mathrm{sen}\,v\mathbf{j} + b\,\mathrm{senh}\,u_0\mathbf{k}.$$

d) Para valores fijos $v = v_0$, describir las curvas dadas por

$$\mathbf{r}(u, v_0) = a\cosh u\cos v_0\mathbf{i} + a\cosh u\,\mathrm{sen}\,v_0\mathbf{j} + b\,\mathrm{senh}\,u\mathbf{k}.$$

e) Hallar un vector normal a la superficie en $(u, v) = (0, 0)$.

15.7 Teorema de la divergencia

- **Comprender y utilizar el teorema de la divergencia.**
- **Utilizar el teorema de la divergencia para calcular flujo.**



CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855)

Al **teorema de la divergencia** también se le llama **teorema de Gauss**, en honor al famoso matemático alemán Carl Friedrich Gauss. Gauss es reconocido, junto con Newton y Arquímedes, como uno de los tres más grandes matemáticos de la historia. Una de sus muchas contribuciones a las matemáticas la hizo a los 22 años, cuando, como parte de su tesis doctoral, demostró el *teorema fundamental del álgebra*.

Teorema de la divergencia

Recordar que en la sección 15.4 se vio que una forma alternativa del teorema de Green es

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, ds = \int_R\int \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dA$$
$$= \int_R\int \operatorname{div} \mathbf{F}\, dA.$$

De manera análoga, el **teorema de la divergencia** da la relación entre una integral triple sobre una región sólida Q y una integral de superficie sobre la superficie de Q. En el enunciado del teorema, la superficie S es **cerrada** en el sentido de que forma toda la frontera completa del sólido Q. Ejemplos de superficies cerradas surgen de las regiones limitadas o acotadas por esferas, elipsoides, cubos, tetraedros, o combinaciones de estas superficies. Se supone que Q es una región sólida sobre la cual se evalúa una integral triple, y que la superficie cerrada S está orientada mediante vectores normales unitarios dirigidos hacia el *exterior*, como se muestra en la figura 15.54. Con estas restricciones sobre S y Q, el teorema de la divergencia es como sigue.

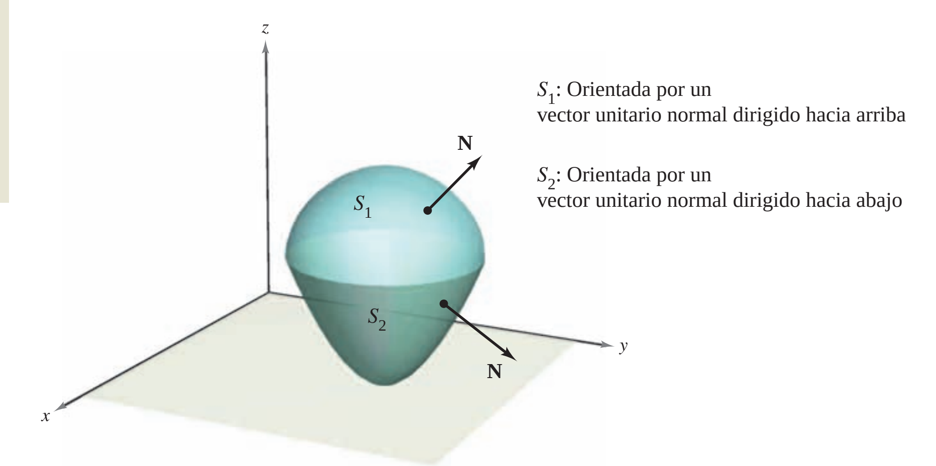


Figura 15.54

TEOREMA 15.12 TEOREMA DE LA DIVERGENCIA

Sea Q una región sólida limitada o acotada por una superficie cerrada S orientada por un vector unitario normal dirigido hacia el exterior de Q. Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en Q, entonces

$$\int_S\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \iiint_Q \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV.$$

NOTA Como se indica arriba, al teorema de la divergencia a veces se le llama teorema de Gauss. También se le llama teorema de Ostrogradsky, en honor al matemático ruso Michel Ostrogradsky (1801-1861).

NOTA Esta prueba se restringe a una región sólida *simple*. Es mejor dejar la prueba general para un curso de cálculo avanzado.

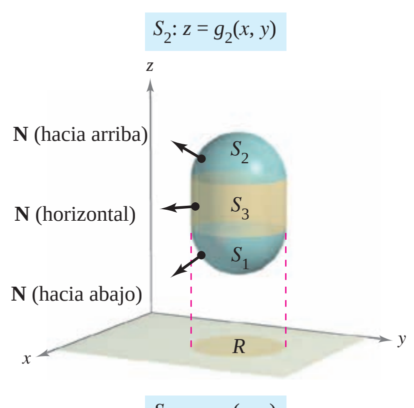


Figura 15.55

DEMOSTRACIÓN Si se hace $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$, el teorema toma la forma

$$\int_S\!\!\int \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \int_S\!\!\int (M\mathbf{i}\cdot\mathbf{N} + N\mathbf{j}\cdot\mathbf{N} + P\mathbf{k}\cdot\mathbf{N})\,dS$$

$$= \iiint_Q \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\right) dV.$$

Esto se puede demostrar verificando que las tres ecuaciones siguientes son válidas.

$$\int_S\!\!\int M\mathbf{i}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iiint_Q \frac{\partial M}{\partial x}\,dV$$

$$\int_S\!\!\int N\mathbf{j}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iiint_Q \frac{\partial N}{\partial y}\,dV$$

$$\int_S\!\!\int P\mathbf{k}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iiint_Q \frac{\partial P}{\partial z}\,dV$$

Como las verificaciones de las tres ecuaciones son similares, sólo se verá la tercera. La demostración se restringe a una región **sólida simple**, con superficie superior

$$z = g_2(x, y) \qquad \text{Superficie superior.}$$

y superficie inferior

$$z = g_1(x, y) \qquad \text{Superficie inferior.}$$

cuyas proyecciones sobre el plano xy coinciden y forman la región R. Si Q tiene una superficie lateral como S_3 en la figura 15.55, entonces un vector normal es horizontal, lo cual implica que $P\mathbf{k}\cdot\mathbf{N} = 0$. Por consiguiente, se tiene

$$\int_S\!\!\int P\mathbf{k}\cdot\mathbf{N}\,dS = \int_{S_1}\!\!\int P\mathbf{k}\cdot\mathbf{N}\,dS + \int_{S_2}\!\!\int P\mathbf{k}\cdot\mathbf{N}\,dS + 0.$$

Sobre la superficie superior S_2, el vector normal dirigido hacia el exterior apunta hacia arriba, mientras que en la superficie inferior S_1, el vector normal dirigido hacia el exterior apunta hacia abajo. Por tanto, por el teorema 15.11, se tiene lo siguiente.

$$\int_{S_1}\!\!\int P\mathbf{k}\cdot\mathbf{N}\,dS = \int_R\!\!\int P(x, y, g_1(x, y))\mathbf{k}\cdot\left(\frac{\partial g_1}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial g_1}{\partial y}\mathbf{j} - \mathbf{k}\right) dA$$

$$= -\int_R\!\!\int P(x, y, g_1(x, y))\,dA$$

$$\int_{S_2}\!\!\int P\mathbf{k}\cdot\mathbf{N}\,dS = \int_R\!\!\int P(x, y, g_2(x, y))\mathbf{k}\cdot\left(-\frac{\partial g_2}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g_2}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right) dA$$

$$= \int_R\!\!\int P(x, y, g_2(x, y))\,dA$$

Sumando estos resultados, se obtiene

$$\int_S\!\!\int P\mathbf{k}\cdot\mathbf{N}\,dS = \int_R\!\!\int [P(x, y, g_2(x, y)) - P(x, y, g_1(x, y))]\,dA$$

$$= \int_R\!\!\int \left[\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} \frac{\partial P}{\partial z}\,dz\right] dA$$

$$= \iiint_Q \frac{\partial P}{\partial z}\,dV.$$

EJEMPLO 1 Aplicación del teorema de la divergencia

Sea Q la región sólida limitada o acotada por los planos coordenados y el plano $2x + 2y + z = 6$, y sea $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Hallar

$$\int_S\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$$

donde S es la superficie de Q.

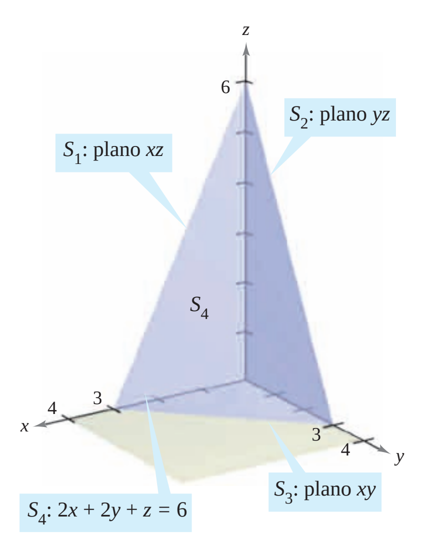


Figura 15.56

Solución En la figura 15.56 se ve que Q está limitada o acotada por cuatro superficies. Por tanto, se necesitarán cuatro *integrales de superficie* para evaluarla

$$\int_S\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS.$$

Sin embargo, por el teorema de la divergencia, sólo se necesita una integral triple. Como

$$\begin{aligned}\text{div}\, \mathbf{F} &= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\\ &= 1 + 2y + 1\\ &= 2 + 2y\end{aligned}$$

se tiene

$$\begin{aligned}\int_S\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS &= \iiint_Q \text{div}\, \mathbf{F}\, dV\\ &= \int_0^3 \int_0^{3-y} \int_0^{6-2x-2y} (2 + 2y)\, dz\, dx\, dy\\ &= \int_0^3 \int_0^{3-y} (2z + 2yz)\Big]_0^{6-2x-2y} dx\, dy\\ &= \int_0^3 \int_0^{3-y} (12 - 4x + 8y - 4xy - 4y^2)\, dx\, dy\\ &= \int_0^3 \Big[12x - 2x^2 + 8xy - 2x^2y - 4xy^2\Big]_0^{3-y} dy\\ &= \int_0^3 (18 + 6y - 10y^2 + 2y^3)\, dy\\ &= \Big[18y + 3y^2 - \frac{10y^3}{3} + \frac{y^4}{2}\Big]_0^3\\ &= \frac{63}{2}.\end{aligned}$$

TECNOLOGÍA Si se tiene acceso a un sistema algebraico por computadora que pueda evaluar integrales iteradas triples, utilícese para verificar el resultado del ejemplo 1. Al usar este sistema algebraico por computadora obsérvese que el primer paso es convertir la integral triple en una integral iterada; este paso debe hacerse a mano. Para adquirir práctica para realizar este paso importante, hallar los límites de integración de las integrales iteradas siguientes. Después usar una computadora para verificar que el valor es el mismo que el obtenido en el ejemplo 1.

$$\int_?^? \int_?^? \int_?^? (2 + 2y)\, dy\, dz\, dx, \qquad \int_?^? \int_?^? \int_?^? (2 + 2y)\, dx\, dy\, dz$$



EJEMPLO 2 Verificación del teorema de la divergencia

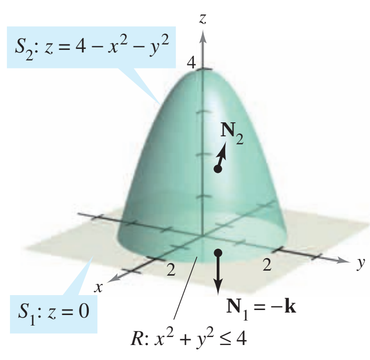


Figura 15.57

Sea Q la región sólida entre el paraboloide

$$z = 4 - x^2 - y^2$$

y el plano xy. Verificar el teorema de la divergencia para

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}.$$

Solución En la figura 15.57 se ve que el vector normal a la superficie S_1 que apunta hacia afuera es $\mathbf{N}_1 = -\mathbf{k}$, mientras que el vector normal a la superficie S_2 que apunta hacia afuera es

$$\mathbf{N}_2 = \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$

Por tanto, por el teorema 15.11, se tiene

$$\begin{aligned}
\int_S\!\!\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS
&= \int_{S_1}\!\!\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1\, dS + \int_{S_2}\!\!\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2\, dS \\
&= \int_{S_1}\!\!\int \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{k})\, dS + \int_{S_2}\!\!\int \mathbf{F} \cdot \frac{(2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k})}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}\, dS \\
&= \int_R\!\!\int -y^2\, dA + \int_R\!\!\int (4xz + 2xy + y^2)\, dA \\
&= -\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} y^2\, dx\, dy + \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (4xz + 2xy + y^2)\, dx\, dy \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (4xz + 2xy)\, dx\, dy \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} [4x(4 - x^2 - y^2) + 2xy]\, dx\, dy \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (16x - 4x^3 - 4xy^2 + 2xy)\, dx\, dy \\
&= \int_{-2}^{2}\Big[8x^2 - x^4 - 2x^2y^2 + x^2y\Big]_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\, dy \\
&= \int_{-2}^{2} 0\, dy \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por otro lado, como

$$\text{div}\, \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}[2z] + \frac{\partial}{\partial y}[x] + \frac{\partial}{\partial z}[y^2] = 0 + 0 + 0 = 0$$

se puede aplicar el teorema de la divergencia para obtener el resultado equivalente

$$\begin{aligned}
\int_S\!\!\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS &= \iiint_Q \text{div}\, \mathbf{F}\, dV \\
&= \iiint_Q 0\, dV = 0.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Aplicación del teorema de la divergencia

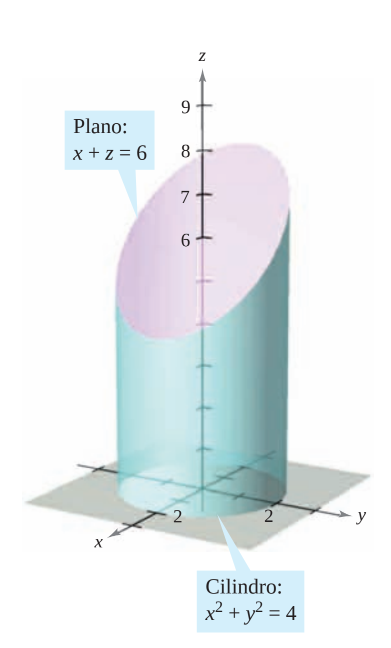


Figura 15.58

Sea Q el sólido limitado o acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, el plano $x + z = 6$ y el plano xy, como se muestra en la figura 15.58. Hallar

$$\int_S\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$$

donde S es la superficie de Q y

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + \text{sen } z)\mathbf{i} + (xy + \cos z)\mathbf{j} + e^y\mathbf{k}.$$

Solución La evaluación directa de esta integral de superficie sería difícil. Sin embargo, por el teorema de la divergencia, se puede evaluar la integral como sigue.

$$\begin{aligned}
\int_S\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS &= \iiint_Q \text{div } \mathbf{F}\, dV \\
&= \iiint_Q (2x + x + 0)\, dV \\
&= \iiint_Q 3x\, dV \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{6-r\cos\theta} (3r\cos\theta) r\, dz\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (18r^2\cos\theta - 3r^3\cos^2\theta)\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (48\cos\theta - 12\cos^2\theta) d\theta \\
&= \left[48\,\text{sen}\,\theta - 6\left(\theta + \frac{1}{2}\text{sen}\,2\theta\right)\right]_0^{2\pi} \\
&= -12\pi
\end{aligned}$$

Nótese que para evaluar la integral triple se emplearon coordenadas cilíndricas con $x = r \cos\theta$ y $dV = r\, dz\, dr\, d\theta$.

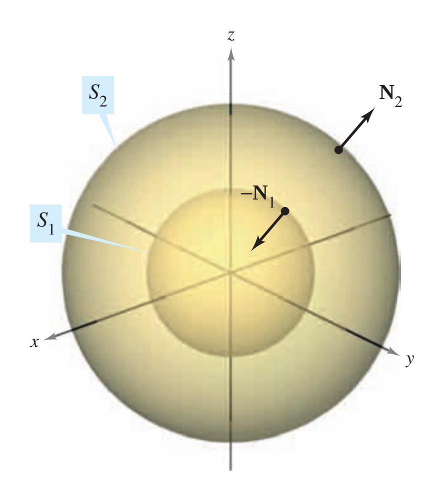


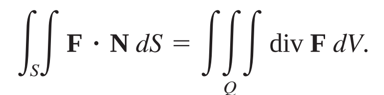
Figura 15.59

Aunque el teorema de la divergencia se formuló para una región sólida simple Q limitada o acotada por una superficie cerrada, el teorema también es válido para regiones que son uniones finitas de regiones sólidas simples. Por ejemplo, sea Q el sólido limitado o acotado por las superficies cerradas S_1 y S_2, como se muestra en la figura 15.59. Para aplicar el teorema de la divergencia a este sólido, sea $S = S_1 \cup S_2$. El vector normal $\mathbf{N}$ a S está dado por $-\mathbf{N}_1$ en S_1 y por $\mathbf{N}_2$ en S_2. Por tanto, se puede escribir

$$\begin{aligned}
\iiint_Q \text{div } \mathbf{F}\, dV &= \int_S\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS \\
&= \int_{S_1}\int \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{N}_1)\, dS + \int_{S_2}\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2\, dS \\
&= -\int_{S_1}\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1\, dS + \int_{S_2}\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2\, dS.
\end{aligned}$$

Flujo y el teorema de la divergencia

Con el fin de comprender mejor el teorema de la divergencia, considérense los dos miembros de la ecuación



$$\int_S\int \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iiint_Q \text{div}\,\mathbf{F}\,dV.$$

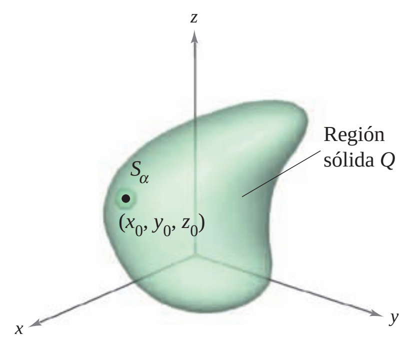


Figura 15.60

De acuerdo con la sección 15.6 se sabe que la integral de flujo de la izquierda determina el flujo total de fluido que atraviesa la superficie S por unidad de tiempo. Esto puede aproximarse sumando el flujo que fluye a través de fragmentos pequeños de la superficie. La integral triple de la derecha mide este mismo flujo de fluido a través de S, pero desde una perspectiva muy diferente; a saber, calculando el flujo de fluido dentro (o fuera) de *cubos* pequeños de volumen ΔV_i. El flujo en el cubo i-ésimo es aproximadamente

$$\text{El flujo en el } i\text{-ésimo cubo} \approx \text{div}\,\mathbf{F}(x_i, y_i, z_i)\,\Delta V_i$$

para algún punto (x_i, y_i, z_i) en el i-ésimo cubo. Nótese que en un cubo en el interior de Q, la ganancia (o pérdida) de fluido a través de cualquiera de sus seis caras es compensada por una pérdida (o ganancia) correspondiente a través de una de las caras de un cubo adyacente. Después de sumar sobre todos los cubos en Q, el único flujo de fluido que no se cancela uniendo cubos es el de las caras exteriores en los cubos del borde. Así, la suma

$$\sum_{i=1}^{n} \text{div}\,\mathbf{F}(x_i, y_i, z_i)\,\Delta V_i$$

aproxima el flujo total dentro (o fuera) de Q, y por consiguiente a través de la superficie S.

Para ver qué se quiere dar a entender con divergencia de **F** en un punto, considérese ΔV_α como el volumen de una esfera pequeña S de radio y centro (x_0, y_0, z_0), contenida en la región Q, como se muestra en la figura 15.60. Aplicando el teorema de la divergencia a S_α resulta

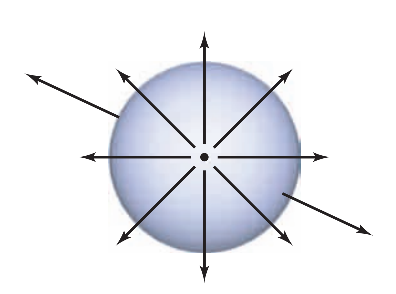
$$\text{Flujo de } \mathbf{F} \text{ a través de } S_\alpha = \iiint_{Q_\alpha} \text{div}\,\mathbf{F}\,dV$$
$$\approx \text{div}\,\mathbf{F}(x_0, y_0, z_0)\,\Delta V_\alpha$$

donde Q_α es el interior de S_α. Por consiguiente, se tiene

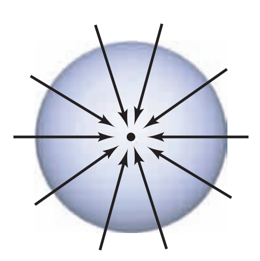
$$\text{div}\,\mathbf{F}(x_0, y_0, z_0) \approx \frac{\text{flujo de } \mathbf{F} \text{ a través de } S_\alpha}{\Delta V_\alpha}$$

y, tomando el límite cuando $\alpha \to 0$, se obtiene la divergencia de **F** en el punto (x_0, y_0, z_0).

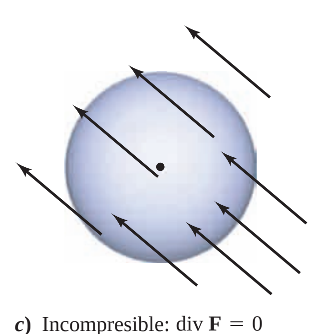
$$\text{div}\,\mathbf{F}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\text{flujo de } \mathbf{F} \text{ a través de } S_\alpha}{\Delta V_\alpha}$$
$$= \text{flujo por unidad de volumen en } (x_0, y_0, z_0)$$



***a*)** Fuente: div **F** > 0



***b*)** Sumidero: div **F** < 0



***c*)** Incompresible: div **F** $= 0$

Figura 15.61

En un campo vectorial el punto (x_0, y_0, z_0) es clasificado como una fuente, un sumidero o incompresible, como sigue.

1. **Fuente,** si div **F** > 0 — Ver figura 15.61*a*.
2. **Sumidero,** si div **F** < 0 — Ver figura 15.61*b*.
3. **Incompresible,** si div **F** $= 0$ — Ver figura 15.61*c*.



NOTA En hidrodinámica, una *fuente* es un punto por el que se considera que se introduce fluido adicional a la región ocupada por el fluido. Un *sumidero* es un punto en el que se considera que escapa fluido. ■

EJEMPLO 4 Calcular el flujo mediante el teorema de la divergencia

Sea Q la región limitada o acotada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Hallar el flujo dirigido hacia afuera del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x^3\mathbf{i} + 2y^3\mathbf{j} + 2z^3\mathbf{k}$ a través de la esfera.

Solución Por el teorema de la divergencia, se tiene

$$\begin{aligned}
\text{Flujo a través de } S &= \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iiint_Q \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV \\
&= \iiint_Q 6(x^2+y^2+z^2)\,dV \\
&= 6\int_0^2\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \rho^4 \operatorname{sen}\phi\,d\theta\,d\phi\,d\rho \qquad \text{Coordenadas esféricas.} \\
&= 6\int_0^2\int_0^\pi 2\pi\rho^4 \operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\rho \\
&= 12\pi\int_0^2 2\rho^4\,d\rho \\
&= 24\pi\left(\frac{32}{5}\right) \\
&= \frac{768\pi}{5}.
\end{aligned}$$

15.7 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, verificar el teorema de la divergencia evaluando

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$$

como una integral de superficie y como una integral triple.

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

   S: cubo limitado o acotado por los planos $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = a$, $z = 0$, $z = a$

2. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

   S: cilindro $x^2 + y^2 = 4$, $0 \le z \le h$

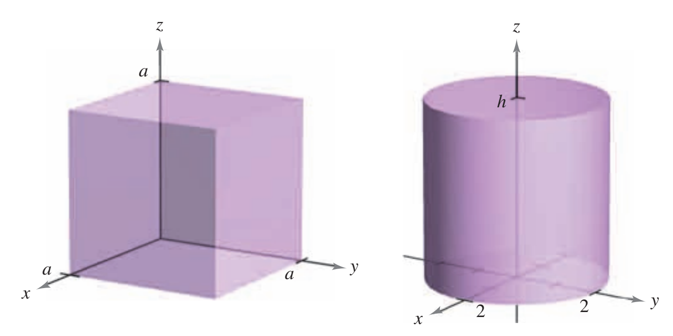


Figura para 1 **Figura para 2**

3. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x - y)\mathbf{i} - (2y - z)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

   S: superficie limitada o acotada por los planos $2x + 4y + 2z = 12$ y los planos coordenados

4. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + z\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$

   S: superficie limitada o acotada por el plano $y = 4$ y $z = 4 - x$ y los planos coordenados

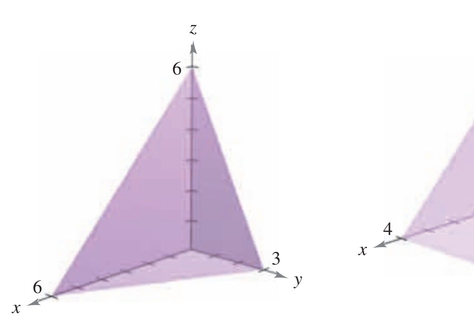


Figura para 3 **Figura para 4**

5. $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + zy\mathbf{j} + 2z^2\mathbf{k}$

   S: superficie acotada por $z = 1 - x^2 - y^2$ y $z = 0$

6. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy^2\mathbf{i} + yx^2\mathbf{j} + e\mathbf{k}$

   S: superficie acotada por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $z = 4$

En los ejercicios 7 a 18, utilizar el teorema de la divergencia para evaluar

$$\int\!\!\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$$

y hallar el flujo de F dirigido hacia el exterior a través de la superficie del sólido limitado o acotado por las gráficas de las ecuaciones. Utilizar un sistema algebraico por computadora y verificar los resultados.

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

S: $x = 0, x = a, y = 0, y = a, z = 0, z = a$

8. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z^2\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 3xyz\mathbf{k}$

S: $x = 0, x = a, y = 0, y = a, z = 0, z = a$

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j} + xyz^2\mathbf{k}$

S: $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, z = 0$

10. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - yz\mathbf{k}$

S: $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, z = 0$

11. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

S: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

12. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\,\mathbf{j}$

S: $x^2 + y^2 = 4, z = 0, z = 5$

13. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - z\mathbf{k}$

S: $x^2 + y^2 = 25, z = 0, z = 7$

14. $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy^2 + \cos z)\mathbf{i} + (x^2y + \operatorname{sen} z)\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$

S: $z = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}, z = 8$

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + x^2e^y\mathbf{k}$

S: $z = 4 - y, z = 0, x = 0, x = 6, y = 0$

16. $\mathbf{F}(x, y, z) = xe^z\mathbf{i} + ye^z\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$

S: $z = 4 - y, z = 0, x = 0, x = 6, y = 0$

17. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$

S: $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

18. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$

S: $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, z = 0$

En los ejercicios 19 y 20, evaluar

$$\int\!\!\int_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$$

donde S es la superficie cerrada del sólido limitado o acotado por las gráficas de $x = 4$ y $z = 9 - y^2$ y los planos coordenados.

19. $\mathbf{F}(x, y, z) = (4xy + z^2)\mathbf{i} + (2x^2 + 6yz)\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$

20. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\cos z\,\mathbf{i} + yz\operatorname{sen} x\,\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$

Desarrollo de conceptos

21. Enunciar el teorema de la divergencia.

22. ¿Cómo se determina si un punto (x_0, y_0, z_0) de un campo vectorial es una fuente, un sumidero o incompresible?

23. *a*) Utilizar el teorema de la divergencia para verificar que el volumen del sólido limitado o acotado por una superficie S es

$$\int\!\!\int_S x\,dy\,dz = \int\!\!\int_S y\,dz\,dx = \int\!\!\int_S z\,dx\,dy.$$

b) Verificar el resultado del inciso *a*) para el cubo limitado o acotado por $x = 0, x = a, y = 0, y = a, z = 0$ y $z = a$.

Para discusión

24. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y sea S el cubo acotado por los planos $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0$ y $z = 1$. Verificar el teorema de la divergencia evaluando

$$\int\!\!\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$$

como una integral de superficie y como una integral triple.

25. Verificar que

$$\int\!\!\int_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathrm{N}\,dS = 0$$

para toda superficie cerrada S.

26. Para el campo vectorial constante dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, verificar que

$$\int\!\!\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = 0$$

donde V es el volumen del sólido limitado o acotado por la superficie cerrada S.

27. Dado el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, verificar que

$$\int\!\!\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = 3V$$

donde V es el volumen del sólido limitado o acotado por la superficie cerrada S.

28. Dado el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, verificar que

$$\frac{1}{\|\mathbf{F}\|}\int\!\!\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \frac{3}{\|\mathbf{F}\|}\int\!\!\int\!\!\int_Q dV.$$

En los ejercicios 29 y 30, demostrar la identidad, suponiendo que Q, S y N satisfacen las condiciones del teorema de la divergencia y que las derivadas parciales necesarias de las funciones escalares f y g son continuas. Las expresiones $D_{\mathbf{N}}f$ y $D_{\mathbf{N}}g$ son las derivadas en la dirección del vector N y se definen por

$$D_{\mathbf{N}}f = \nabla f\cdot\mathbf{N},\quad D_{\mathbf{N}}g = \nabla g\cdot\mathbf{N}.$$

29. $$\int\!\!\int\!\!\int_Q (f\nabla^2 g + \nabla f\cdot\nabla g)\,dV = \int\!\!\int_S f D_{\mathbf{N}}g\,dS$$

[*Sugerencia:* Utilizar div $(f\mathbf{G}) = f$ div $\mathbf{G} + \nabla f\cdot\mathbf{G}$.]

30. $$\int\!\!\int\!\!\int_Q (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,dV = \int\!\!\int_S (f D_{\mathbf{N}}g - g D_{\mathbf{N}}f)\,dS$$

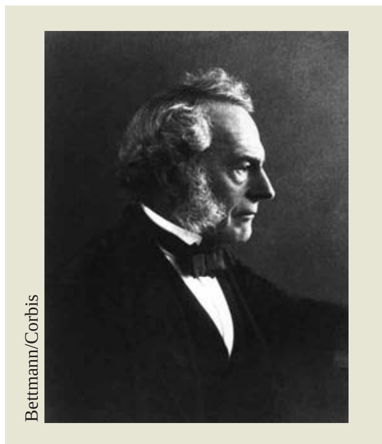
(*Sugerencia:* Utilizar el ejercicio 29 dos veces.)

15.8 Teorema de Stokes

- **Comprender y utilizar el teorema de Stokes.**
- **Utilizar el rotacional para analizar el movimiento de un líquido en rotación.**



Teorema de Stokes



GEORGE GABRIEL STOKES (1819-1903)

Stokes se convirtió en profesor Lucasiano de matemáticas en Cambridge en 1849. Cinco años después, publicó el teorema que lleva su nombre como examen para optar a un premio de investigación.

Un segundo teorema, análogo al teorema de Green, pero con más dimensiones, es el **teorema de Stokes**, llamado así en honor al físico matemático inglés George Gabriel Stokes. Stokes formó parte de un grupo de físicos matemáticos ingleses conocido como la Escuela de Cambridge, entre los que se encontraban William Thomson (Lord Kelvin) y James Clerk Maxwell. Además de hacer contribuciones a la física, Stokes trabajó con series infinitas y con ecuaciones diferenciales, así como con los resultados de integración que se presentan en esta sección.

El teorema de Stokes establece la relación entre una integral de superficie sobre una superficie orientada S y una integral de línea a lo largo de una curva cerrada C en el espacio que forma la frontera o el borde de S, como se muestra en la figura 15.62. La dirección positiva a lo largo de C es la dirección en sentido contrario a las manecillas del reloj con respecto al vector normal $\mathbf{N}$. Es decir, si se imagina que se toma el vector normal $\mathbf{N}$ con la mano derecha, con el dedo pulgar apuntando en la dirección de $\mathbf{N}$, los demás dedos apuntarán en la dirección positiva de C, como se muestra en la figura 15.63.

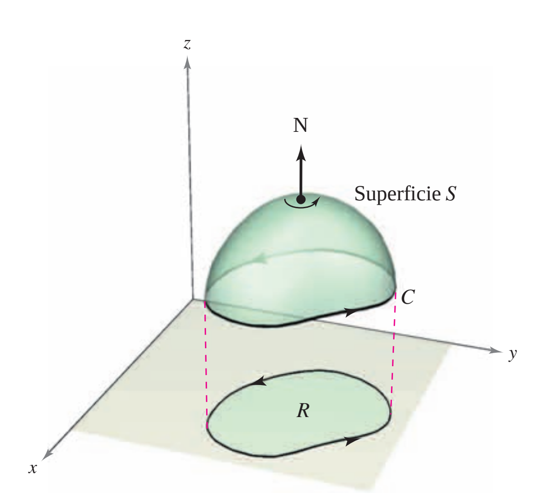
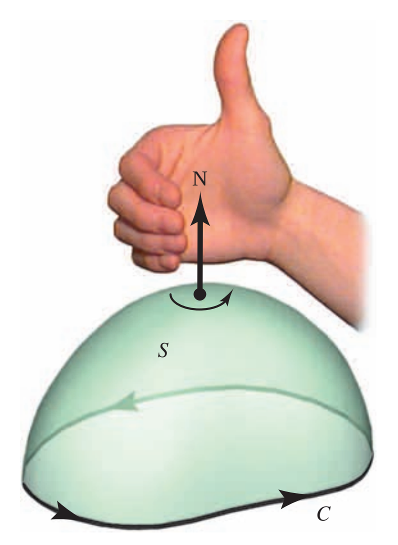


Figura 15.62



La dirección a lo largo de C es en sentido contrario a las manecillas del reloj con respecto a $\mathbf{N}$
Figura 15.63

TEOREMA 15.13 TEOREMA DE STOKES

Sea S una superficie orientada con vector unitario normal $\mathbf{N}$, acotada por una curva cerrada simple, suave a trozos C, con orientación positiva. Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a S y a C, entonces

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int\!\!\int_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\, dS.$$

NOTA La integral de línea puede escribirse en forma diferencial $\int_C M\,dx + N\,dy + P\,dz$ o en forma vectorial $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds$. ■

EJEMPLO 1 Aplicación del teorema de Stokes

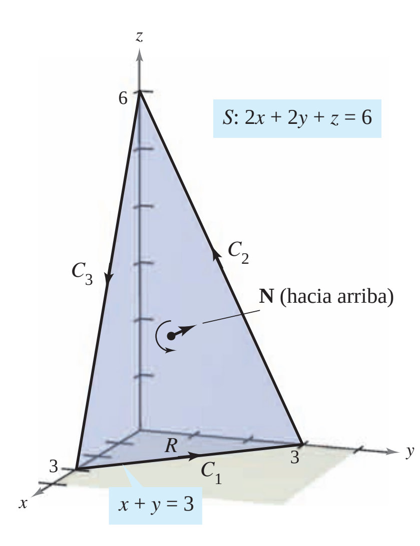


Figura 15.64

Sea C el triángulo orientado situado en el plano $2x + 2y + z = 6$, como se muestra en la figura 15.64. Evaluar

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

donde $\mathbf{F}(x, y, z) = -y^2\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$.

Solución Usando el teorema de Stokes, se empieza por hallar el rotacional de **F**.

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & z & x \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$$

Considerando $z = 6 - 2x - 2y = g(x, y)$, se puede usar el teorema 15.11 para un vector normal dirigido hacia arriba para obtener

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_S\!\!\int (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\, dS \\
&= \int_R\!\!\int (-\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2y\mathbf{k}) \cdot [-g_x(x, y)\mathbf{i} - g_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}]\, dA \\
&= \int_R\!\!\int (-\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2y\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})\, dA \\
&= \int_0^3\!\!\int_0^{3-y} (2y - 4)\, dx\, dy \\
&= \int_0^3 (-2y^2 + 10y - 12)\, dy \\
&= \left[-\frac{2y^3}{3} + 5y^2 - 12y\right]_0^3 \\
&= -9.
\end{aligned}$$

Trátese de evaluar la integral de línea del ejemplo 1 directamente, *sin* usar el teorema de Stokes. Una manera de hacerlo es considerar a C como la unión de C_1, C_2 y C_3, como sigue.

$$\begin{aligned}
C_1&: \mathbf{r}_1(t) = (3 - t)\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 3 \\
C_2&: \mathbf{r}_2(t) = (6 - t)\mathbf{j} + (2t - 6)\mathbf{k}, \quad 3 \le t \le 6 \\
C_3&: \mathbf{r}_3(t) = (t - 6)\mathbf{i} + (18 - 2t)\mathbf{k}, \quad 6 \le t \le 9
\end{aligned}$$

El valor de la integral de la línea es

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_1'(t)\, dt + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_2'(t)\, dt + \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_3'(t)\, dt \\
&= \int_0^3 t^2\, dt + \int_3^6 (-2t + 6)\, dt + \int_6^9 (-2t + 12)\, dt \\
&= 9 - 9 - 9 \\
&= -9.
\end{aligned}$$

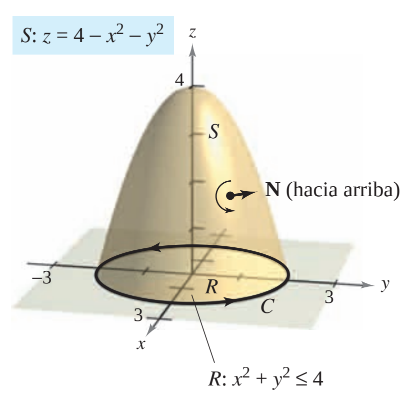


Figura 15.65

EJEMPLO 2 Verificación del teorema de Stokes

Sea S la parte del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ que permanece sobre el plano xy, orientado hacia arriba (ver la figura 15.65). Sea C su curva frontera en el plano xy orientada en el sentido contrario al de las manecillas del reloj. Verificar el teorema de Stokes para

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$$

evaluando la integral de superficie y la integral de línea equivalente.

Solución Como *integral de superficie*, se tiene $z = g(x, y) = 4 - x^2 - y^2$, $g_x = -2x$, $g_y = -2y$, y

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2z & x & y^2 \end{vmatrix} = 2y\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

De acuerdo con el teorema 15.11, se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_S\int (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\, dS &= \int_R\int (2y\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k})\, dA \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4xy + 4y + 1)\, dy\, dx \\
&= \int_{-2}^{2} \Big[2xy^2 + 2y^2 + y \Big]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx \\
&= \int_{-2}^{2} 2\sqrt{4 - x^2}\, dx \\
&= \text{Área del círculo de radio } 2 = 4\pi.
\end{aligned}$$

Como *integral de línea*, se puede parametrizar C como

$$\mathbf{r}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \text{ sen } t\mathbf{j} + 0\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Para $\mathbf{F}(x, y, z) = 2z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C M\, dx + N\, dy + P\, dz \\
&= \int_C 2z\, dx + x\, dy + y^2\, dz \\
&= \int_0^{2\pi} [0 + 2 \cos t(2 \cos t) + 0]\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} 4 \cos^2 t\, dt \\
&= 2\int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t)\, dt \\
&= 2\Big[t + \frac{1}{2}\text{sen}\, 2t\Big]_0^{2\pi} \\
&= 4\pi.
\end{aligned}$$

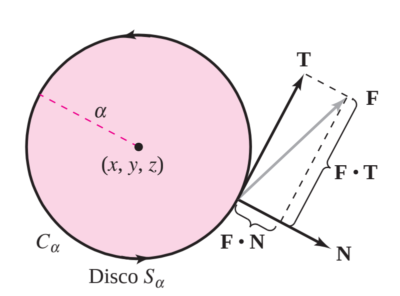


Figura 15.66

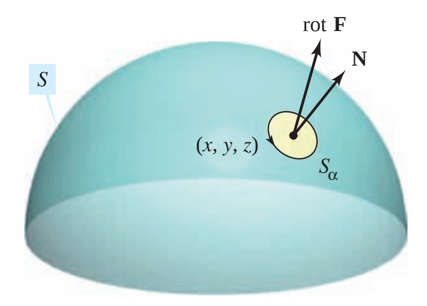


Figura 15.67

Interpretación física del rotacional

El teorema de Stokes proporciona una interesante interpretación física del rotacional. En un campo vectorial **F**, sea S_α un *pequeño* disco circular de radio α, centrado en (x, y, z) y con frontera C_α, como se muestra en la figura 15.66. En cada punto en la circunferencia C_α, **F** tiene un componente normal $\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}$ y un componente tangencial $\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}$. Cuanto más alineados están **F** y **T** mayor es el valor de $\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}$. Así, un fluido tiende a moverse a lo largo del círculo en lugar de a través de él. Por consiguiente, se dice que la integral de línea alrededor de C_α mide la **circulación alrededor de C_α**. Es decir,

$$\int_{C_\alpha} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \text{circulación de } \mathbf{F} \text{ alrededor de } C_\alpha$$

Ahora considérese un pequeño disco S_α centrado en algún punto (x, y, z) de la superficie S, como se muestra en la figura 15.67. En un disco tan pequeño, rot **F** es casi constante, porque varía poco con respecto a su valor en (x, y, z). Es más rot $\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}$ es casi constante en S_α, porque todos los vectores unitarios normales en S_α son prácticamente iguales. Por consiguiente, del teorema de Stokes se sigue que

$$\begin{aligned}\int_{C_\alpha} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds &= \int_{S_\alpha}\!\!\int (\text{rot }\mathbf{F})\cdot\mathbf{N}\,dS\\ &\approx (\text{rot }\mathbf{F})\cdot\mathbf{N}\int_{S_\alpha}\!\!\int dS\\ &\approx (\text{rot }\mathbf{F})\cdot\mathbf{N}(\pi\alpha^2).\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}(\text{rot }\mathbf{F})\cdot\mathbf{N} &\approx \frac{\displaystyle\int_{C_\alpha}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds}{\pi\alpha^2}\\ &= \frac{\text{circulación de } \mathbf{F} \text{ alrededor de } C_\alpha}{\text{área de disco } S_\alpha}\\ &= \text{tasa o ritmo de circulación.}\end{aligned}$$

Suponiendo que las condiciones son tales que la aproximación mejora con discos cada vez más pequeños $(\alpha \to 0)$, se sigue que

$$(\text{rot }\mathbf{F})\cdot\mathbf{N} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\pi\alpha^2}\int_{C_\alpha}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$$

a lo que se le conoce como **rotación de F respecto de N**. Esto es,

$$\text{rot }\mathbf{F}(x, y, z)\cdot\mathbf{N} = \text{rotación de } \mathbf{F} \text{ respecto de } \mathbf{N} \text{ en } (x, y, z).$$

En este caso, la rotación de **F** es máxima cuando rot **F** y **N** tienen la misma dirección. Normalmente, esta tendencia a rotar variará de punto a punto de la superficie S, y el teorema de Stokes

$$\underbrace{\int_S\!\!\int (\text{rot }\mathbf{F})\cdot\mathbf{N}\,dS}_{\text{Integral de superficie}} = \underbrace{\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}}_{\text{Integral de línea}}$$

afirma que la medida colectiva de esta tendencia *rotacional* considerada sobre toda la superficie S (la integral de superficie) es igual a la tendencia de un fluido a *circular* alrededor de la frontera C (integral de línea).

EJEMPLO 3 Una aplicación del rotacional

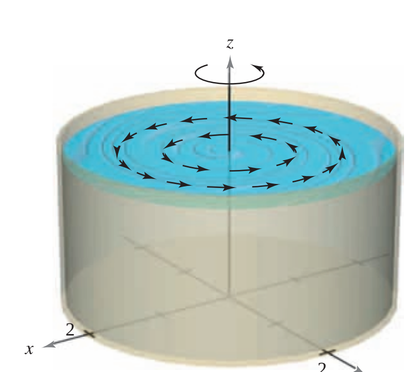


Figura 15.68

Un líquido es agitado en un recipiente cilíndrico de radio 2, de manera que su movimiento se describe por el campo de velocidad

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -y\sqrt{x^2 + y^2}\,\mathbf{i} + x\sqrt{x^2 + y^2}\,\mathbf{j}$$

como se muestra en la figura 15.68. Hallar

$$\int_S\int (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\, dS$$

donde S es la superficie superior del recipiente cilíndrico.

Solución El rotacional de $\mathbf{F}$ está dado por

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y\sqrt{x^2 + y^2} & x\sqrt{x^2 + y^2} & 0 \end{vmatrix} = 3\sqrt{x^2 + y^2}\,\mathbf{k}.$$

Haciendo $\mathbf{N} = \mathbf{k}$, se tiene

$$\begin{aligned} \int_S\int (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\, dS &= \int_R\int 3\sqrt{x^2 + y^2}\, dA \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (3r)r\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} r^3\Big]_0^2\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 8\, d\theta \\ &= 16\pi. \end{aligned}$$

NOTA Si rot $\mathbf{F} = 0$ en toda la región Q, la rotación de $\mathbf{F}$ con respecto a cada vector unitario normal $\mathbf{N}$ es 0. Es decir, $\mathbf{F}$ es irrotacional. Por lo visto con anterioridad, se sabe que ésta es una característica de los campos vectoriales conservativos.

Resumen de fórmulas de integración

Teorema fundamental del cálculo:

$$\int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Teorema fundamental de las integrales de línea:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a))$$

Teorema de Green:

$$\int_C M\, dx + N\, dy = \int_R\int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_R\int (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dA$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, ds = \int_R\int \text{div } \mathbf{F}\, dA$$

Teorema de divergencia:

$$\int_S\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \iiint_Q \text{div } \mathbf{F}\, dV$$

Teorema de Stokes:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_S\int (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\, dS$$

15.8 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, hallar el rotacional del campo vectorial F.

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2y - z)\mathbf{i} + e^z\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$
2. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$
3. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2z\mathbf{i} - 4x^2\mathbf{j} + \arctan x\mathbf{k}$
4. $\mathbf{F}(x, y, z) = x \operatorname{sen} y\mathbf{i} - y\cos x\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$
5. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{x^2+y^2}\mathbf{i} + e^{y^2+z^2}\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$
6. $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{arcsen} y\mathbf{i} + \sqrt{1 - x^2}\,\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$

En los ejercicios 7 a 10, verificar el teorema de Stokes evaluando $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ como integral de línea e integral doble.

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y + z)\mathbf{i} + (x - z)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$
   S: $z = 9 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0$
8. $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y + z)\mathbf{i} + (x - z)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$
   S: $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
9. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
   S: $6x + 6y + z = 12$, primer octante
10. $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$
    S: $z = y^2, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq a$

En los ejercicios 11 a 20, utilizar el teorema de Stokes para evaluar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Utilizar un sistema algebraico por computadora y verificar los resultados. En cada uno de los casos, C está orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj como se vio anteriormente.

11. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2y\mathbf{i} + 3z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$
    C: triángulo cuyos vértices son (2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2)
12. $\mathbf{F}(x, y, z) = \arctan \dfrac{x}{y}\mathbf{i} + \ln\sqrt{x^2 + y^2}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$
    C: triángulo cuyos vértices son (0, 0, 0), (1, 1, 1), (0, 0, 2)
13. $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$
    S: $z = 1 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0$
14. $\mathbf{F}(x, y, z) = 4xz\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 4xy\mathbf{k}$
    S: $z = 9 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0$
15. $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
    S: $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$
16. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} - xyz\mathbf{k}$
    S: $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$
17. $\mathbf{F}(x, y, z) = -\ln\sqrt{x^2 + y^2}\,\mathbf{i} + \arctan \dfrac{x}{y}\mathbf{j} + \mathbf{k}$
    S: $z = 9 - 2x - 3y$ sobre de un pétalo de $r = 2\operatorname{sen} 2\theta$ en el primer octante
18. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + (2 - 3y)\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}, \quad x^2 + y^2 \leq 16$
    S: la porción en el primer octante de $x^2 + z^2 = 16$ sobre $x^2 + y^2 = 16$
19. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
    S: $z = x^2, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq a$
    $\mathbf{N}$ es el vector unitario normal a la superficie, dirigido hacia abajo.
20. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad x^2 + y^2 \leq a^2$
    S: la porción en el primer octante de $z = x^2$ sobre $x^2 + y^2 = a^2$

Movimiento de un líquido **En los ejercicios 21 y 22, el movimiento de un líquido en un recipiente cilíndrico de radio 1 se describe mediante el campo de velocidad $\mathbf{F}(x, y, z)$. Hallar $\int_S\int (\text{rot}\,\mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\, dS$, donde S es la superficie superior del recipiente cilíndrico.**

21. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
22. $\mathbf{F}(x, y, z) = -z\mathbf{i} + y\mathbf{k}$

Desarrollo de conceptos

23. Enunciar el teorema de Stokes.
24. Dar una interpretación física del rotacional.

25. Sean f y g funciones escalares con derivadas parciales continuas, y supóngase que C y S satisfacen las condiciones del teorema de Stokes. Verificar cada una de las identidades siguientes.
    a) $\int_C (f\nabla g) \cdot d\mathbf{r} = \int_S\int (\nabla f \times \nabla g) \cdot \mathbf{N}\, dS$
    b) $\int_C (f\nabla f) \cdot d\mathbf{r} = 0$
    c) $\int_C (f\nabla g + g\nabla f) \cdot d\mathbf{r} = 0$
26. Demostrar los resultados del ejercicio 25 para las funciones $f(x, y, z) = xyz$ y $g(x, y, z) = z$. Sea S el hemisferio $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.
27. Sea $\mathbf{C}$ un vector constante. Sea S una superficie orientada con vector unitario normal $\mathbf{N}$, limitada o acotada por una curva suave C. Demostrar que
$$\int_S\int \mathbf{C} \cdot \mathbf{N}\, dS = \frac{1}{2}\int_C (\mathbf{C} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

Para discusión

28. Verificar el teorema de Stokes para cada campo vectorial dado y superficie orientada hacia arriba. ¿Es más fácil establecer la integral de línea o la integral doble?, ¿de evaluar? Explicar.
    a) $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{y+z}\mathbf{i}$
    C: cuadrado con vértices (0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 0)
    b) $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$
    S: la porción del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que yace abajo del plano $z = 4$.

Preparación del examen Putman

29. Sea $\mathbf{G}(x, y) = \left(\dfrac{-y}{x^2 + 4y^2}, \dfrac{x}{x^2 + 4y^2}, 0\right)$.

    Demostrar o refutar que hay una función vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (M(x, y, z), N(x, y, z), P(x, y, z))$ con las propiedades siguientes.
    i) M, N, P tienen derivadas parciales continuas en todo $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$;
    ii) Rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ para todo $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$;
    iii) $\mathbf{F}(x, y, 0) = \mathbf{G}(x, y)$.

Este problema fue preparado por el Committee on the Putnam Prize Competition.

15 Ejercicios de repaso

En los ejercicios 1 y 2, calcular $\|\mathbf{F}\|$ y dibujar varios vectores representativos en el campo vectorial. Utilizar un sistema algebraico por computadora y verificar los resultados.

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ **2.** $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} - 2y\mathbf{j}$

En los ejercicios 3 y 4, hallar el campo vectorial gradiente de la función escalar.

3. $f(x, y, z) = 2x^2 + xy + z^2$ **4.** $f(x, y, z) = x^2e^{yz}$

En los ejercicios 5 a 12, determinar si el campo vectorial es conservativo. Si es conservativo, hallar una función potencial para el campo vectorial.

5. $\mathbf{F}(x, y) = -\dfrac{y}{x^2}\mathbf{i} + \dfrac{1}{x}\mathbf{j}$

6. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{1}{y}\mathbf{i} - \dfrac{y}{x^2}\mathbf{j}$

7. $\mathbf{F}(x, y) = (xy^2 - x^2)\mathbf{i} + (x^2y + y^2)\mathbf{j}$

8. $\mathbf{F}(x, y) = (-2y^3 \operatorname{sen} 2x)\mathbf{i} + 3y^2(1 + \cos 2x)\mathbf{j}$

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = 4xy^2\mathbf{i} + 2x^2\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$

10. $\mathbf{F}(x, y, z) = (4xy + z^2)\mathbf{i} + (2x^2 + 6yz)\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$

11. $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{yz\mathbf{i} - xz\mathbf{j} - xy\mathbf{k}}{y^2z^2}$

12. $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen} z(y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + \mathbf{k})$

En los ejercicios 13 a 20, hallar *a*) la divergencia del campo vectorial F y *b*) el rotacional del campo vectorial F.

13. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j} + x^2z\mathbf{k}$

14. $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = (\cos y + y\cos x)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} x - x\operatorname{sen} y)\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$

16. $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x - y)\mathbf{i} + (y - 2z)\mathbf{j} + (z - 3x)\mathbf{k}$

17. $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{arcsen} x\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$

18. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 - y)\mathbf{i} - (x + \operatorname{sen}^2 y)\mathbf{j}$

19. $\mathbf{F}(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2)\mathbf{i} + \ln(x^2 + y^2)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

20. $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{z}{x}\mathbf{i} + \dfrac{z}{y}\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

En los ejercicios 21 a 26, calcular la integral de línea a lo largo de la(s) trayectoria(s) dada(s).

21. $\displaystyle\int_C (x^2 + y^2)\,ds$

a) C: segmento de recta desde (0, 0) hasta (3, 4)

b) C: $x^2 + y^2 = 1$, una revolución en sentido contrario a las manecillas del reloj, empezando en (1, 0)

22. $\displaystyle\int_C xy\,ds$

a) C: segmento de recta desde (0, 0) hasta (5, 4)

b) C: en sentido contrario a las manecillas del reloj, a lo largo del triángulo de vértices (0, 0), (4, 0), (0, 2)

23. $\displaystyle\int_C (x^2 + y^2)\,ds$

C: $\mathbf{r}(t) = (1 - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi$

24. $\displaystyle\int_C (x^2 + y^2)\,ds$

C: $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t\operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t - t\cos t)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi$

25. $\displaystyle\int_C (2x - y)\,dx + (x + 2y)\,dy$

a) C: segmento de recta desde (0, 0) hasta (3, –3)

b) C: en sentido contrario a las manecillas del reloj a lo largo del círculo $x = 3\cos t$, $y = 3\operatorname{sen} t$

26. $\displaystyle\int_C (2x - y)\,dx + (x + 3y)\,dy$

C: $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t\operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t - t\operatorname{sen} t)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le \pi/2$

CAS **En los ejercicios 27 y 28, utilizar un sistema algebraico por computadora y calcular la integral de línea sobre la trayectoria dada.**

27. $\displaystyle\int_C (2x + y)\,ds$

$\mathbf{r}(t) = a\cos^3 t\,\mathbf{i} + a\operatorname{sen}^3 t\,\mathbf{j}$,

$0 \le t \le \pi/2$

28. $\displaystyle\int_C (x^2 + y^2 + z^2)\,ds$

$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^{3/2}\mathbf{k}$,

$0 \le t \le 4$

Área de una superficie lateral **En los ejercicios 29 y 30, hallar el área de la superficie lateral sobre la curva *C* en el plano *xy* y bajo la superficie $z = f(x, y)$.**

29. $f(x, y) = 3 + \operatorname{sen}(x + y)$

C: $y = 2x$ desde (0, 0) hasta (2, 4)

30. $f(x, y) = 12 - x - y$

C: $y = x^2$ desde (0, 0) hasta (2, 4)

En los ejercicios 31 a 36, evaluar $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$.

31. $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$

C: $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 1$

32. $\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$

C: $\mathbf{r}(t) = 4\cos t\,\mathbf{i} + 3\operatorname{sen} t\,\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi$

33. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

C: $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi$

34. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2y - z)\mathbf{i} + (z - x)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$

C: curva en la intersección de $x^2 + z^2 = 4$ y $y^2 + z^2 = 4$ desde (2, 2, 0) hasta (0, 0, 2)

35. $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$

C: curva en la intersección de $z = x^2 + y^2$ y $y = x$ desde (0, 0, 0) hasta (2, 2, 8)

36. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 - z)\mathbf{i} + (y^2 + z)\mathbf{j} + x\mathbf{k}$

C: la curva en la intersección de $z = x^2$ y $x^2 + y^2 = 4$ desde $(0, -2, 0)$ hasta $(0, 2, 0)$

CAS **En los ejercicios 37 y 38, utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar la integral de línea.**

37. $\int_C xy\,dx + (x^2 + y^2)\,dy$

C: $y = x^2$ desde $(0, 0)$ hasta $(2, 4)$ y $y = 2x$ desde $(2, 4)$ hasta $(0, 0)$

38. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

$\mathbf{F}(x, y) = (2x - y)\mathbf{i} + (2y - x)\mathbf{j}$

C: $\mathbf{r}(t) = (2\cos t + 2t\,\text{sen}\,t)\mathbf{i} + (2\,\text{sen}\,t - 2t\cos t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le \pi$

39. ***Trabajo*** Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - \sqrt{y}\mathbf{j}$ a lo largo de la trayectoria $y = x^{3/2}$ desde $(0, 0)$ hasta $(4, 8)$.

40. ***Trabajo*** Un avión de 20 toneladas sube 2 000 pies haciendo un giro de 90° en un arco circular de 10 millas de radio. Hallar el trabajo realizado por los motores.

En los ejercicios 41 y 42, usar el teorema fundamental de las integrales de línea para evaluar la integral.

41. $\int_C 2xyz\,dx + x^2z\,dy + x^2y\,dz$

C: curva suave desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 3, 2)$

42. $\int_C y\,dx + x\,dy + \frac{1}{z}\,dz$

C: curva suave desde $(0, 0, 1)$ hasta $(4, 4, 4)$

43. Evaluar la integral de línea $\int_C y^2\,dx + 2xy\,dy$.

a) C: $\mathbf{r}(t) = (1 + 3t)\mathbf{i} + (1 + t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 1$

b) C: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \sqrt{t}\,\mathbf{j}$, $1 \le t \le 4$

c) Usar el teorema fundamental de las integrales de línea, donde C es una curva suave desde $(1, 1)$ hasta $(4, 2)$.

44. ***Área y centroide*** Considerar la región limitada o acotada por el eje x y un arco de la cicloide con ecuaciones paramétricas $x = a(\theta - \text{sen}\,\theta)$ y $y = a(1 - \cos\theta)$. Usar integrales de línea para hallar *a*) el área de la región y *b*) el centroide de la región.

En los ejercicios 45 a 50, utilizar el teorema de Green para evaluar la integral de línea.

45. $\int_C y\,dx + 2x\,dy$

C: contorno del cuadrado con vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$

46. $\int_C xy\,dx + (x^2 + y^2)\,dy$

C: contorno del cuadrado con vértices $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$,$(2, 2)$

47. $\int_C xy^2\,dx + x^2y\,dy$

C: $x = 4\cos t$, $y = 4\,\text{sen}\,t$

48. $\int_C (x^2 - y^2)\,dx + 2xy\,dy$

C: $x^2 + y^2 = a^2$

49. $\int_C xy\,dx + x^2\,dy$

C: contorno de la región entre las gráficas de $y = x^2$ y $y = 1$

50. $\int_C y^2\,dx + x^{4/3}\,dy$

C: $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

CAS **En los ejercicios 51 y 52, utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la superficie dada por la función vectorial.**

51. $\mathbf{r}(u, v) = \sec u \cos v\,\mathbf{i} + (1 + 2\tan u)\,\text{sen}\,v\,\mathbf{j} + 2u\,\mathbf{k}$

$0 \le u \le \frac{\pi}{3}$, $0 \le v \le 2\pi$

52. $\mathbf{r}(u, v) = e^{-u/4}\cos v\,\mathbf{i} + e^{-u/4}\,\text{sen}\,v\,\mathbf{j} + \frac{u}{6}\,\mathbf{k}$

$0 \le u \le 4$, $0 \le v \le 2\pi$

CAS **53.** ***Investigación*** Considerar la superficie representada por la función vectorial

$\mathbf{r}(u, v) = 3\cos v \cos u\,\mathbf{i} + 3\cos v\,\text{sen}\,u\,\mathbf{j} + \text{sen}\,v\,\mathbf{k}$.

Utilizar un sistema algebraico por computadora y efectuar lo siguiente.

a) Representar gráficamente la superficie para $0 \le u \le 2\pi$ y $-\frac{\pi}{2} \le v \le \frac{\pi}{2}$.

b) Representar gráficamente la superficie para $0 \le u \le 2\pi$ y $\frac{\pi}{4} \le v \le \frac{\pi}{2}$.

c) Representar gráficamente la superficie para $0 \le u \le \frac{\pi}{4}$ y $0 \le v \le \frac{\pi}{2}$.

d) Representar gráficamente e identificar la curva en el espacio para $0 \le u \le 2\pi$ y $v = \frac{\pi}{4}$.

e) Aproximar el área de la superficie representada gráficamente en el inciso *b*).

f) Aproximar el área de la superficie representada gráficamente en el inciso *c*).

54. Evaluar la integral de superficie $\int_S\int z\,dS$ sobre la superficie S:

$\mathbf{r}(u, v) = (u + v)\mathbf{i} + (u - v)\mathbf{j} + \text{sen}\,v\,\mathbf{k}$

donde $0 \le u \le 2$ y $0 \le v \le \pi$.

CAS **55.** Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la superficie S y aproximar la integral de superficie

$$\int_S\int (x + y)\,dS$$

donde S es la superficie

S: $\mathbf{r}(u, v) = u\cos v\,\mathbf{i} + u\,\text{sen}\,v\,\mathbf{j} + (u - 1)(2 - u)\mathbf{k}$

sobre $0 \le u \le 2$ y $0 \le v \le 2\pi$.

56. ***Masa*** Una lámina bidimensional cónica S está dada por

$$z = a\left(a - \sqrt{x^2 + y^2}\right), \quad 0 \le z \le a^2.$$

En cada punto en S, la densidad es proporcional a la distancia entre el punto y el eje z.

a) Dibujar la superficie cónica.

b) Calcular la masa m de la lámina.

En los ejercicios 57 y 58, verificar el teorema de divergencia evaluando

$$\int_S\!\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$$

como integral de superficie y como integral triple.

57. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

Q: región sólida limitada o acotada por los planos coordenados y por el plano $2x + 3y + 4z = 12$

58. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

Q: región sólida limitada o acotada por los planos coordenados y el plano $2x + 3y + 4z = 12$

En los ejercicios 59 y 60, verificar el teorema de Stokes evaluando

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

como integral de línea y como integral doble.

59. $\mathbf{F}(x, y, z) = (\cos y + y \cos x)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} x - x \operatorname{sen} y)\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$

S: porción de $z = y^2$ sobre el cuadrado en el plano xy con vértices $(0, 0), (a, 0), (a, a), (0, a)$

$\mathbf{N}$ es el vector unitario normal a la superficie dirigido hacia arriba.

60. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x - z)\mathbf{i} + (y - z)\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$

S: porción en el primer octante del plano $3x + y + 2z = 12$

61. Demostrar que no es posible que un campo vectorial con componentes dos veces diferenciables tenga un rotacional de $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

PROYECTO DE TRABAJO

El planímetro

Se han estudiado muchas técnicas de cálculo para hallar el área de una región plana. Los ingenieros usan un dispositivo mecánico llamado *planímetro* para medir áreas planas, el cual se basa en la fórmula para el área del teorema 15.9 (página 1096). Como puede verse en la figura, el planímetro se fija a un punto O (pero puede moverse libremente) y tiene un gozne en A. El extremo del brazo trazador AB se mueve en sentido contrario a las manecillas del reloj por el contorno de la región R. En B hay una rueda pequeña perpendicular a $\overline{AB}$ que está marcada con una escala para medir cuánto rueda mientras B recorre el contorno de la región R. En este proyecto se pide demostrar que el área de R está dada por la longitud L del brazo trazador $\overline{AB}$ multiplicada por la distancia D recorrida por la rueda.

Supóngase que el punto B recorre el contorno de R para $a \le t \le b$. El punto A se moverá hacia atrás y hacia adelante a lo largo de un arco circular centrado en el origen O. Sea $\theta(t)$ el ángulo que se indica en la figura y sean $(x(t), y(t))$ las coordenadas de A.

a) Mostrar que el vector $\overrightarrow{OB}$ está dado por la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = [x(t) + L\cos\theta(t)]\mathbf{i} + [y(t) + L\operatorname{sen}\theta(t)]\mathbf{j}.$$

b) Mostrar que las dos integrales siguientes son iguales a cero.

$$I_1 = \int_a^b \frac{1}{2}L^2\frac{d\theta}{dt}\,dt$$

$$I_2 = \int_a^b \frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)dt$$

c) Utilizar la integral $\displaystyle\int_a^b [x(t)\operatorname{sen}\theta(t) - y(t)\cos\theta(t)]'\,dt$ para demostrar que las dos integrales siguientes son iguales.

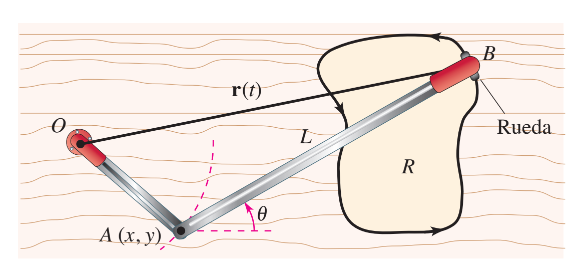
$$I_3 = \int_a^b \frac{1}{2}L\left(y\operatorname{sen}\theta\frac{d\theta}{dt} + x\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)dt$$

$$I_4 = \int_a^b \frac{1}{2}L\left(-\operatorname{sen}\theta\frac{dx}{dt} + \cos\theta\frac{dy}{dt}\right)dt$$

d) Sea $\mathbf{N} = -\operatorname{sen}\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}$. Explicar por qué la distancia D recorrida por la rueda está dada por

$$D = \int_C \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}\,ds.$$

e) Mostrar que el área de la región R está dada por $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = DL$.



PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre el uso del cálculo para hallar áreas irregulares, ver “The Amateur Scientist” de C. L. Strong en la edición de agosto de 1958 publicación de *Scientific American*.

SP Solución de problemas

1. El calor fluye de áreas de mayor temperatura a áreas de menor temperatura en dirección de la mayor variación. Como resultado, en la medición del flujo de calor juega un papel relevante el gradiente de temperatura. El flujo depende del área de la superficie. Lo importante es la dirección normal a la superficie, porque el calor que fluye en dirección tangencial a la superficie no ocasiona pérdida de calor. Así, supóngase que el flujo de calor a través de una porción ΔS del área de la superficie está dado por $\Delta H \approx -k\nabla T \cdot \mathbf{N}\, dS$, donde T es la temperatura, $\mathbf{N}$ es el vector unitario normal a la superficie en la dirección del flujo de calor, y k es la difusividad térmica del material. El flujo de calor a través de la superficie S está dado por

$$H = \iint_S -k\nabla T \cdot \mathbf{N}\, dS.$$

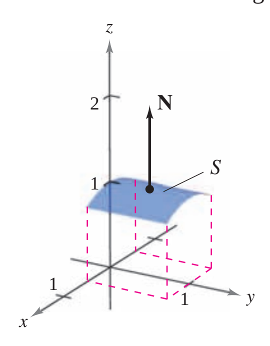
Considerar una sola fuente de calor localizada en el origen con temperatura

$$T(x, y, z) = \frac{25}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

a) Calcular el flujo de calor a través de la superficie

$$S = \left\{(x, y, z): z = \sqrt{1 - x^2},\ -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2},\ 0 \le y \le 1\right\}$$

como se muestra en la figura.



b) Repetir el cálculo del inciso *a*) usando la parametrización

$$x = \cos u,\quad y = v,\quad z = \operatorname{sen} u,\quad \frac{\pi}{3} \le u \le \frac{2\pi}{3},\quad 0 \le v \le 1.$$

2. Considerar una sola fuente de calor localizada en el origen con temperatura

$$T(x, y, z) = \frac{25}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

a) Calcular el flujo de calor a través de la superficie

$$S = \left\{(x, y, z):\ z = \sqrt{1 - x^2 - y^2},\ x^2 + y^2 \le 1\right\}$$

como se muestra en la figura.

b) Repetir el cálculo del inciso *a*) usando la parametrización $x = \operatorname{sen} u \cos v,\ \ y = \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v,\ \ z = \cos u,\ \ 0 \le u \le \frac{\pi}{2},$ $0 \le v \le 2\pi.$

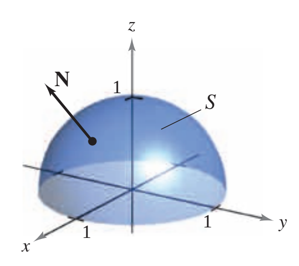


Figura para 2

3. Considerar un cable de densidad $\rho(x, y, z)$ dado por la curva en el espacio

C: $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k},\quad a \le t \le b.$

Los **momentos de inercia** con respecto a los ejes x, y y z están dados por

$$I_x = \int_C (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, ds$$

$$I_y = \int_C (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, ds$$

$$I_z = \int_C (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, ds.$$

Hallar los momentos de inercia de un cable de densidad uniforme $\rho = 1$ en forma de hélice

$\mathbf{r}(t) = 3\cos t\mathbf{i} + 3\operatorname{sen} t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k},\quad 0 \le t \le 2\pi$ (ver la figura).

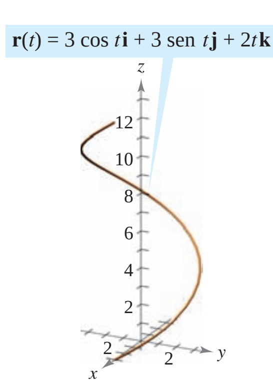


Figura para 3

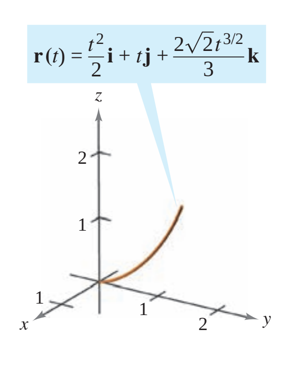


Figura para 4

4. Hallar los momentos de inercia del cable de densidad $\rho = \dfrac{1}{1 + t}$ dado por la curva

C: $\mathbf{r}(t) = \dfrac{t^2}{2}\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \dfrac{2\sqrt{2}\,t^{3/2}}{3}\mathbf{k},\quad 0 \le t \le 1$ (ver la figura).

5. El **laplaciano** es el operador diferencial

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

y la **ecuación de Laplace** es

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0.$$

Cualquier función que satisface esta ecuación se llama **armónica**. Demostrar que la función $w = 1/f$ es armónica.

CAS **6.** Considerar la integral de línea

$$\int_C y^n\,dx + x^n\,dy$$

donde C es la frontera de la región que yace entre las gráficas de $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ $(a > 0)$ y $y = 0$.

a) Usar un sistema algebraico por computadora para verificar el teorema de Green para n, un entero impar de 1 a 7.

b) Usar un sistema algebraico por computadora para verificar el teorema de Green para n, un entero par de 2 a 8.

c) Para un entero impar n, conjeturar acerca del valor de la integral.

7. Utilizar una integral de línea para calcular el área limitada o acotada por un arco de la cicloide

$$x(\theta) = a(\theta - \operatorname{sen}\theta), \quad y(\theta) = a(1 - \cos\theta), \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

como se muestra en la figura.

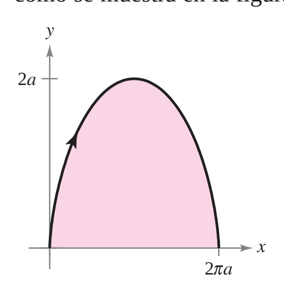


Figura para 7

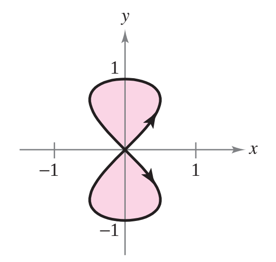


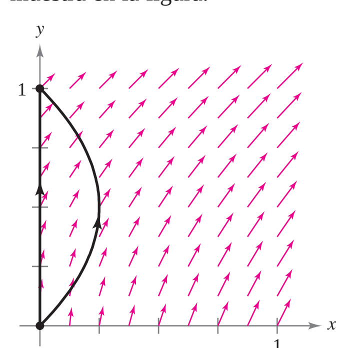
Figura para 8

8. Utilizar una integral de línea para hallar el área limitada o acotada por los dos lazos de la curva ocho

$$x(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t, \quad y(t) = \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

que se muestra en la figura.

9. El campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y) = (x + y)\mathbf{i} + (x^2 + 1)\mathbf{j}$ actúa sobre un objeto que se mueve del punto $(0, 0)$ al punto $(0, 1)$, como se muestra en la figura.

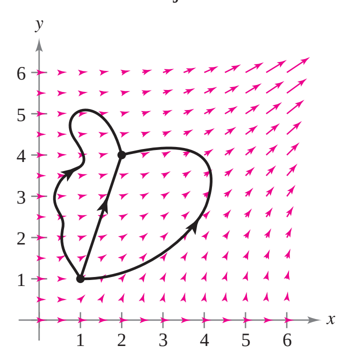


a) Hallar el trabajo realizado si el objeto sigue la trayectoria $x = 0$, $0 \le y \le 1$.

b) Hallar el trabajo realizado si el objeto sigue la trayectoria $x = y - y^2$, $0 \le y \le 1$.

c) Supóngase que el objeto sigue la trayectoria $x = c(y - y^2)$, $0 \le y \le 1$, $c > 0$. Hallar el valor de la constante c que minimiza el trabajo.

10. El campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2y^2)\mathbf{i} + (2x^3y)\mathbf{j}$ se muestra en la figura. Tres partículas se mueven del punto $(1, 1)$ al punto $(2, 4)$ a lo largo de trayectorias diferentes. Explicar por qué el trabajo realizado es el mismo con las tres partículas, y hallar el valor del trabajo.



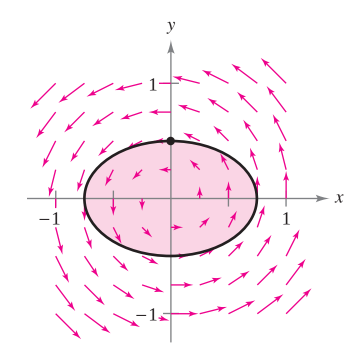
11. Sea S una superficie suave orientada, con vector normal $\mathbf{N}$, acotada por una curva suave simple cerrada C. Sea $\mathbf{v}$ un vector constante. Demostrar que

$$\int_S\!\!\int (2\mathbf{v} \cdot \mathbf{N})\,dS = \int_C (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

12. Comparar el área de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ con la magnitud del trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$\mathbf{F}(x, y) = -\frac{1}{2}y\mathbf{i} + \frac{1}{2}x\mathbf{j}$$

sobre una partícula que da una vuelta alrededor de la elipse (ver la figura).



13. Una sección transversal del campo magnético de la Tierra puede representarse como un campo vectorial en el cual el centro de la Tierra se localiza en el origen y el eje y positivo apunta en dirección del polo norte magnético. La ecuación para este campo es

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$
$$= \frac{m}{(x^2 + y^2)^{5/2}}[3xy\mathbf{i} + (2y^2 - x^2)\mathbf{j}]$$

donde m es el momento magnético de la Tierra. Demostrar que este campo vectorial es conservativo.

Apéndices

A Demostración de teoremas seleccionados

TEOREMA 10.16 CLASIFICACIÓN DE CÓNICAS MEDIANTE LA EXCENTRICIDAD (PÁGINA 750)

Sean F un punto fijo (*foco*) y D una recta fija (*directriz*) en el plano. Sean también P otro punto del plano y e (*excentricidad*) la proporción que existe entre la distancia que hay de P a F y la distancia de P a D. El conjunto de todos los puntos P con una excentricidad dada es una cónica.

1. La cónica es una elipse si $0 < e < 1$.
2. La cónica es una parábola si $e = 1$.
3. La cónica es una hipérbola si $e > 1$.

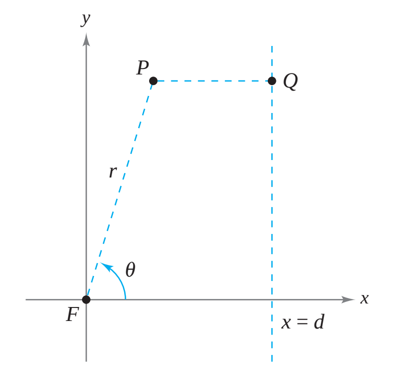


Figura A.1

DEMOSTRACIÓN Si $e = 1$ entonces, por definición, la cónica debe ser una parábola. Si $e \neq 1$, entonces considerar el foco F que se encuentra en el origen y la directriz $x = d$ a la derecha del origen, como se muestra en la figura A.1. En el punto $P = (r, \theta) = (x, y)$, se tiene $|PF| = r$ y $|PQ| = d - r\cos\theta$. Dado que $e = |PF|/|PQ|$, se deduce que

$$|PF| = |PQ|e \quad \Rightarrow \quad r = e(d - r\cos\theta).$$

Convirtiendo a coordenadas rectangulares y elevando al cuadrado ambos lados, se obtiene

$$x^2 + y^2 = e^2(d - x)^2 = e^2(d^2 - 2dx + x^2).$$

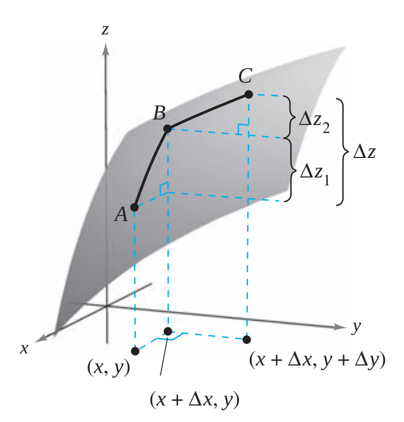
Completando el procedimiento

$$\left(x + \frac{e^2 d}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{e^2 d^2}{(1 - e^2)^2}.$$

Si $e < 1$, esta ecuación representa a una elipse. Si $e > 1$, entonces $1 - e^2 < 0$, y la ecuación representa a una hipérbola.

TEOREMA 13.4 CONDICIONES SUFICIENTES PARA LA DIFERENCIABILIDAD (PÁGINA 919)

Si f es una función de x y y, y además f_x y f_y son continuas en una región abierta R, entonces f es derivable en R.



$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$

Figura A.2

DEMOSTRACIÓN Sea la superficie definida por $z = f(x, y)$ donde f, f_x y f_y son continuas en (x, y). Además, sean A, B y C puntos en la superficie, como se muestra en la figura A.2. En la figura observamos que el cambio de f del punto A al punto C se encuentra por medio de

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)\\ &= [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)] + [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)]\\ &= \Delta z_1 + \Delta z_2.\end{aligned}$$

Desde A hasta B, y es fija y x cambia. Entonces, mediante el teorema del valor promedio, existe un valor x_1 entre x y $x + \Delta x$ tal que

$$\Delta z_1 = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = f_x(x_1, y)\,\Delta x.$$

Del mismo modo, desde B hasta C, x es fija, y cambia, y existe un valor y_1 entre y y $y + \Delta y$ tal que

$$\Delta z_2 = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) = f_y(x + \Delta x, y_1)\,\Delta y.$$

Combinando estos dos resultados, escribir

$$\Delta z = \Delta z_1 + \Delta z_2 = f_x(x_1, y)\Delta x + f_y(x + \Delta x, y_1)\,\Delta y.$$

Definiendo ε_1 y ε_2 como $\varepsilon_1 = f_x(x_1, y) - f_x(x, y)$ y $\varepsilon_2 = f_y(x + \Delta x, y_1) - f_y(x, y)$, se deduce que

$$\begin{aligned}\Delta z = \Delta z_1 + \Delta z_2 &= [\varepsilon_1 + f_x(x, y)]\,\Delta x + [\varepsilon_2 + f_y(x, y)]\,\Delta y\\ &= [f_x(x, y)\,\Delta x + f_y(x, y)\,\Delta y] + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y.\end{aligned}$$

Por medio de la continuidad de f_x y f_y y del hecho de que $x \le x_1 \le x + \Delta x$ y $y \le y_1 \le y + \Delta y$, se deduce que $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando lo hacen $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$. De tal modo, por definición, f es derivable.

TEOREMA 13.6 REGLA DE LA CADENA: UNA VARIABLE INDEPENDIENTE (PÁGINA 925)

Sea $w = f(x, y)$ donde f es una función diferenciable de x y y. Si $x = g(t)$ y $y = h(t)$, donde g y h son funciones diferenciables de t, entonces w es una función diferenciable de t, y

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

DEMOSTRACIÓN Puesto que g y h son funciones diferenciables de t, se sabe que Δx y Δy tienden a cero a medida que lo hace Δt. Además, como f es una función derivable de x y y, se sabe que $\Delta w = (\partial w/\partial x)\,\Delta x + (\partial w/\partial y)\,\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$, donde ε_1 y $\varepsilon_2 \to 0$ a medida que $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$. Por tanto, para $\Delta t \neq 0$

$$\frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

de lo que se deduce que

$$\frac{dw}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + 0\left(\frac{dx}{dt}\right) + 0\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

B Tablas de integración

Fórmulas u^n

1. $\displaystyle\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,\quad n \neq -1$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C$

Integrales con la forma $a + bu$

3. $\displaystyle\int \frac{u}{a+bu}\,du = \frac{1}{b^2}\big(bu - a\ln|a+bu|\big) + C$

4. $\displaystyle\int \frac{u}{(a+bu)^2}\,du = \frac{1}{b^2}\left(\frac{a}{a+bu} + \ln|a+bu|\right) + C$

5. $\displaystyle\int \frac{u}{(a+bu)^n}\,du = \frac{1}{b^2}\left[\frac{-1}{(n-2)(a+bu)^{n-2}} + \frac{a}{(n-1)(a+bu)^{n-1}}\right] + C,\quad n \neq 1, 2$

6. $\displaystyle\int \frac{u^2}{a+bu}\,du = \frac{1}{b^3}\left[-\frac{bu}{2}(2a - bu) + a^2\ln|a+bu|\right] + C$

7. $\displaystyle\int \frac{u^2}{(a+bu)^2}\,du = \frac{1}{b^3}\left(bu - \frac{a^2}{a+bu} - 2a\ln|a+bu|\right) + C$

8. $\displaystyle\int \frac{u^2}{(a+bu)^3}\,du = \frac{1}{b^3}\left[\frac{2a}{a+bu} - \frac{a^2}{2(a+bu)^2} + \ln|a+bu|\right] + C$

9. $\displaystyle\int \frac{u^2}{(a+bu)^n}\,du = \frac{1}{b^3}\left[\frac{-1}{(n-3)(a+bu)^{n-3}} + \frac{2a}{(n-2)(a+bu)^{n-2}} - \frac{a^2}{(n-1)(a+bu)^{n-1}}\right] + C,\quad n \neq 1, 2, 3$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{u(a+bu)}\,du = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right| + C$

11. $\displaystyle\int \frac{1}{u(a+bu)^2}\,du = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{a+bu} + \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right|\right) + C$

12. $\displaystyle\int \frac{1}{u^2(a+bu)}\,du = -\frac{1}{a}\left(\frac{1}{u} + \frac{b}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right|\right) + C$

13. $\displaystyle\int \frac{1}{u^2(a+bu)^2}\,du = -\frac{1}{a^2}\left[\frac{a+2bu}{u(a+bu)} + \frac{2b}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right|\right] + C$

Integrales con la forma $a + bu + cu^2,\ b^2 \neq 4ac$

14. $$\int \frac{1}{a + bu + cu^2}\,du = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \arctan \dfrac{2cu + b}{\sqrt{4ac - b^2}} + C, & b^2 < 4ac \\ \dfrac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln\left|\dfrac{2cu + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2cu + b + \sqrt{b^2 - 4ac}}\right| + C, & b^2 > 4ac \end{cases}$$

15. $$\int \frac{u}{a + bu + cu^2}\,du = \frac{1}{2c}\left(\ln|a + bu + cu^2| - b\int \frac{1}{a + bu + cu^2}\,du\right)$$

Integrales con la forma $\sqrt{a + bu}$

16. $$\int u^n \sqrt{a + bu}\,du = \frac{2}{b(2n + 3)}\left[u^n(a + bu)^{3/2} - na\int u^{n-1}\sqrt{a + bu}\,du\right]$$

17. $$\int \frac{1}{u\sqrt{a + bu}}\,du = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|\dfrac{\sqrt{a + bu} - \sqrt{a}}{\sqrt{a + bu} + \sqrt{a}}\right| + C, & a > 0 \\ \dfrac{2}{\sqrt{-a}} \arctan \sqrt{\dfrac{a + bu}{-a}} + C, & a < 0 \end{cases}$$

18. $$\int \frac{1}{u^n\sqrt{a + bu}}\,du = \frac{-1}{a(n - 1)}\left[\frac{\sqrt{a + bu}}{u^{n-1}} + \frac{(2n - 3)b}{2}\int \frac{1}{u^{n-1}\sqrt{a + bu}}\,du\right],\ n \neq 1$$

19. $$\int \frac{\sqrt{a + bu}}{u}\,du = 2\sqrt{a + bu} + a\int \frac{1}{u\sqrt{a + bu}}\,du$$

20. $$\int \frac{\sqrt{a + bu}}{u^n}\,du = \frac{-1}{a(n - 1)}\left[\frac{(a + bu)^{3/2}}{u^{n-1}} + \frac{(2n - 5)b}{2}\int \frac{\sqrt{a + bu}}{u^{n-1}}\,du\right],\ n \neq 1$$

21. $$\int \frac{u}{\sqrt{a + bu}}\,du = \frac{-2(2a - bu)}{3b^2}\sqrt{a + bu} + C$$

22. $$\int \frac{u^n}{\sqrt{a + bu}}\,du = \frac{2}{(2n + 1)b}\left(u^n\sqrt{a + bu} - na\int \frac{u^{n-1}}{\sqrt{a + bu}}\,du\right)$$

Integrales con la forma $a^2 \pm u^2,\ a > 0$

23. $$\int \frac{1}{a^2 + u^2}\,du = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + C$$

24. $$\int \frac{1}{u^2 - a^2}\,du = -\int \frac{1}{a^2 - u^2}\,du = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u - a}{u + a}\right| + C$$

25. $$\int \frac{1}{(a^2 \pm u^2)^n}\,du = \frac{1}{2a^2(n - 1)}\left[\frac{u}{(a^2 \pm u^2)^{n-1}} + (2n - 3)\int \frac{1}{(a^2 \pm u^2)^{n-1}}\,du\right],\ n \neq 1$$

Integrales con la forma $\sqrt{u^2 \pm a^2},\ a > 0$

26. $$\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right|\right) + C$$

27. $$\int u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{1}{8}\left[u(2u^2 \pm a^2)\sqrt{u^2 \pm a^2} - a^4 \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right|\right] + C$$

28. $$\int \frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{u}\,du = \sqrt{u^2 + a^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u}\right| + C$$

29. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u}\,du = \sqrt{u^2 - a^2} - a \operatorname{arcsec} \frac{|u|}{a} + C$

30. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u^2}\,du = \frac{-\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u} + \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$

31. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}\,du = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$

32. $\displaystyle\int \frac{1}{u\sqrt{u^2 + a^2}}\,du = \frac{-1}{a} \ln\left|\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u}\right| + C$

33. $\displaystyle\int \frac{1}{u\sqrt{u^2 - a^2}}\,du = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{|u|}{a} + C$

34. $\displaystyle\int \frac{u^2}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}\,du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2 \pm a^2} \mp a^2 \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right|\right) + C$

35. $\displaystyle\int \frac{1}{u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}}\,du = \mp \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{a^2 u} + C$

36. $\displaystyle\int \frac{1}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}}\,du = \frac{\pm u}{a^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} + C$

Integrales con la forma $\sqrt{a^2 - u^2},\ a > 0$

37. $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{a^2 - u^2} + a^2 \operatorname{arcsen} \frac{u}{a}\right) + C$

38. $\displaystyle\int u^2\sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{1}{8}\left[u(2u^2 - a^2)\sqrt{a^2 - u^2} + a^4 \operatorname{arcsen} \frac{u}{a}\right] + C$

39. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2 - u^2} - a \ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right| + C$

40. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u^2}\,du = \frac{-\sqrt{a^2 - u^2}}{u} - \operatorname{arcsen} \frac{u}{a} + C$

41. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}}\,du = \operatorname{arcsen} \frac{u}{a} + C$

42. $\displaystyle\int \frac{1}{u\sqrt{a^2 - u^2}}\,du = \frac{-1}{a} \ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right| + C$

43. $\displaystyle\int \frac{u^2}{\sqrt{a^2 - u^2}}\,du = \frac{1}{2}\left(-u\sqrt{a^2 - u^2} + a^2 \operatorname{arcsen} \frac{u}{a}\right) + C$

44. $\displaystyle\int \frac{1}{u^2\sqrt{a^2 - u^2}}\,du = \frac{-\sqrt{a^2 - u^2}}{a^2 u} + C$

45. $\displaystyle\int \frac{1}{(a^2 - u^2)^{3/2}}\,du = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2 - u^2}} + C$

Integrales con la forma sen u o cos u

46. $\int \operatorname{sen} u \, du = -\cos u + C$

47. $\int \cos u \, du = \operatorname{sen} u + C$

48. $\int \operatorname{sen}^2 u \, du = \frac{1}{2}(u - \operatorname{sen} u \cos u) + C$

49. $\int \cos^2 u \, du = \frac{1}{2}(u + \operatorname{sen} u \cos u) + C$

50. $\int \operatorname{sen}^n u \, du = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} u \cos u}{n} + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} u \, du$

51. $\int \cos^n u \, du = \frac{\cos^{n-1} u \operatorname{sen} u}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} u \, du$

52. $\int u \operatorname{sen} u \, du = \operatorname{sen} u - u \cos u + C$

53. $\int u \cos u \, du = \cos u + u \operatorname{sen} u + C$

54. $\int u^n \operatorname{sen} u \, du = -u^n \cos u + n \int u^{n-1} \cos u \, du$

55. $\int u^n \cos u \, du = u^n \operatorname{sen} u - n \int u^{n-1} \operatorname{sen} u \, du$

56. $\int \frac{1}{1 \pm \operatorname{sen} u} \, du = \tan u \mp \sec u + C$

57. $\int \frac{1}{1 \pm \cos u} \, du = -\cot u \pm \csc u + C$

58. $\int \frac{1}{\operatorname{sen} u \cos u} \, du = \ln|\tan u| + C$

Integrales con la forma tan u, cot u, sec u, csc u

59. $\int \tan u \, du = -\ln|\cos u| + C$

60. $\int \cot u \, du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

61. $\int \sec u \, du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

62. $\int \csc u \, du = \ln|\csc u - \cot u| + C$ o $\int \csc u \, du = -\ln|\csc u + \cot u| + C$

63. $\int \tan^2 u \, du = -u + \tan u + C$

64. $\int \cot^2 u \, du = -u - \cot u + C$

65. $\int \sec^2 u \, du = \tan u + C$

66. $\int \csc^2 u \, du = -\cot u + C$

67. $\int \tan^n u \, du = \frac{\tan^{n-1} u}{n-1} - \int \tan^{n-2} u \, du, \ n \neq 1$

68. $\int \cot^n u \, du = -\frac{\cot^{n-1} u}{n-1} - \int (\cot^{n-2} u) \, du, \ n \neq 1$

69. $\int \sec^n u \, du = \frac{\sec^{n-2} u \tan u}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} u \, du, \ n \neq 1$

70. $\int \csc^n u \, du = -\frac{\csc^{n-2} u \cot u}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} u \, du, \ n \neq 1$

71. $\int \frac{1}{1 \pm \tan u} \, du = \frac{1}{2}\left(u \pm \ln|\cos u \pm \operatorname{sen} u|\right) + C$

72. $\int \frac{1}{1 \pm \cot u} \, du = \frac{1}{2}\left(u \mp \ln|\operatorname{sen} u \pm \cos u|\right) + C$

73. $\int \frac{1}{1 \pm \sec u} \, du = u + \cot u \mp \csc u + C$

74. $\int \frac{1}{1 \pm \csc u} \, du = u - \tan u \pm \sec u + C$

Integrales con funciones trigonométricas inversas

75. $\int \operatorname{arcsen} u\,du = u \operatorname{arcsen} u + \sqrt{1-u^2} + C$

76. $\int \arccos u\,du = u \arccos u - \sqrt{1-u^2} + C$

77. $\int \arctan u\,du = u \arctan u - \ln\sqrt{1+u^2} + C$

78. $\int \operatorname{arccot} u\,du = u \operatorname{arccot} u + \ln\sqrt{1+u^2} + C$

79. $\int \operatorname{arcsec} u\,du = u \operatorname{arcsec} u - \ln\left|u + \sqrt{u^2-1}\right| + C$

80. $\int \operatorname{arccsc} u\,du = u \operatorname{arccsc} u + \ln\left|u + \sqrt{u^2-1}\right| + C$

Integrales con la forma e^u

81. $\int e^u\,du = e^u + C$

82. $\int ue^u\,du = (u-1)e^u + C$

83. $\int u^n e^u\,du = u^n e^u - n\int u^{n-1}e^u\,du$

84. $\int \frac{1}{1+e^u}\,du = u - \ln(1+e^u) + C$

85. $\int e^{au} \operatorname{sen} bu\,du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a \operatorname{sen} bu - b\cos bu) + C$

86. $\int e^{au} \cos bu\,du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a \cos bu + b \operatorname{sen} bu) + C$

Integrales con la forma ln u

87. $\int \ln u\,du = u(-1+\ln u) + C$

88. $\int u \ln u\,du = \frac{u^2}{4}(-1 + 2\ln u) + C$

89. $\int u^n \ln u\,du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2}[-1 + (n+1)\ln u] + C,\ n \neq -1$

90. $\int (\ln u)^2\,du = u\left[2 - 2\ln u + (\ln u)^2\right] + C$

91. $\int (\ln u)^n\,du = u(\ln u)^n - n\int (\ln u)^{n-1}\,du$

Integrales con funciones hiperbólicas

92. $\int \cosh u\,du = \operatorname{senh} u + C$

93. $\int \operatorname{senh} u\,du = \cosh u + C$

94. $\int \operatorname{sech}^2 u\,du = \tanh u + C$

95. $\int \operatorname{csch}^2 u\,du = -\coth u + C$

96. $\int \operatorname{sech} u \tanh u\,du = -\operatorname{sech} u + C$

97. $\int \operatorname{csch} u \coth u\,du = -\operatorname{csch} u + C$

Integrales con funciones hiperbólicas inversas (en forma logarítmica)

98. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right) + C$

99. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C$

100. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 \pm u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\frac{a + \sqrt{a^2 \pm u^2}}{|u|} + C$

Soluciones de los ejercicios impares

Capítulo 10

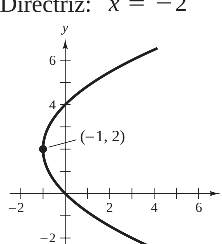
Sección 10.1 (página 706)

1. h **2.** a **3.** e **4.** b **5.** f **6.** g **7.** c **8.** d

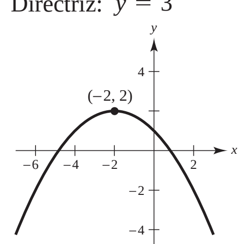
9. Vértice: $(0, 0)$
Foco: $(-2, 0)$
Directriz: $x = 2$

11. Vértice: $(-5, 3)$
Foco: $\left(-\frac{21}{4}, 3\right)$
Directriz: $x = -\frac{19}{4}$

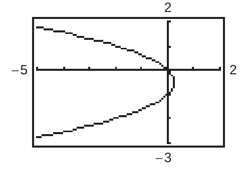
13. Vértice: $(-1, 2)$
Foco: $(0, 2)$
Directriz: $x = -2$



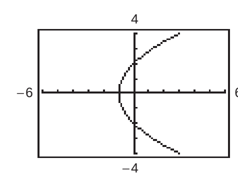
15. Vértice: $(-2, 2)$
Foco: $(-2, 1)$
Directriz: $y = 3$



17. Vértice: $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$
Foco: $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$
Directriz: $x = \frac{1}{2}$



19. Vértice: $(-1, 0)$
Foco: $(0, 0)$
Directriz: $x = -2$

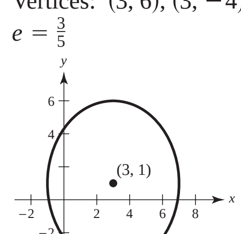


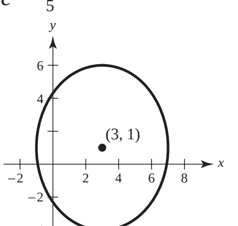
21. $y^2 - 8y + 8x - 24 = 0$ **23.** $x^2 - 32y + 160 = 0$

25. $x^2 + y - 4 = 0$ **27.** $5x^2 - 14x - 3y + 9 = 0$

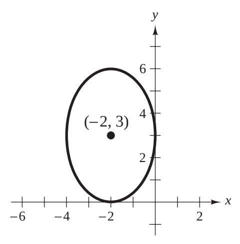
29. Centro: $(0, 0)$
Focos: $\left(0, \pm\sqrt{15}\right)$
Vértices: $(0, \pm 4)$
$e = \sqrt{15}/4$

31. Centro: $(3, 1)$
Focos: $(3, 4), (3, -2)$
Vértices: $(3, 6), (3, -4)$
$e = \frac{3}{5}$

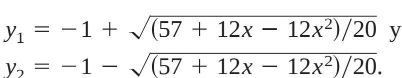




33. Centro: $(-2, 3)$
Focos: $\left(-2, 3 \pm \sqrt{5}\right)$
Vértices: $(-2, 6), (-2, 0)$
$e = \sqrt{5}/3$



35. Centro: $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$
Focos: $\left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{2}, -1\right)$
Vértices: $\left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{5}, -1\right)$
Para obtener la gráfica, despejar y y obtener



$y_1 = -1 + \sqrt{(57 + 12x - 12x^2)/20}$ y
$y_2 = -1 - \sqrt{(57 + 12x - 12x^2)/20}$.
Representar gráficamente estas ecuaciones en la misma pantalla.

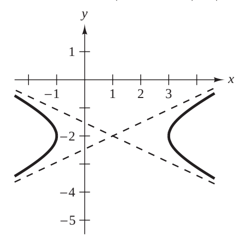
37. Centro: $\left(\frac{3}{2}, -1\right)$
Focos: $\left(\frac{3}{2} \pm \sqrt{2}, -1\right)$
Vértices: $\left(-\frac{1}{2}, -1\right), \left(\frac{7}{2}, -1\right)$
Para obtener la gráfica, despejar y y obtener
$y_1 = -1 + \sqrt{(7 + 12x - 4x^2)/8}$ y
$y_2 = -1 - \sqrt{(7 + 12x - 4x^2)/8}$.
Representar gráficamente estas ecuaciones en la misma pantalla.

39. $x^2/36 + y^2/11 = 1$ **41.** $(x - 3)^2/9 + (y - 5)^2/16 = 1$

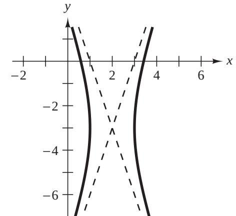
43. $x^2/16 + 7y^2/16 = 1$

45. Centro: $(0, 0)$
Focos: $\left(0, \pm\sqrt{10}\right)$
Vértices: $(0, \pm 1)$

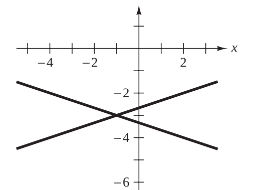
47. Centro: $(1, -2)$
Focos: $\left(1 \pm \sqrt{5}, -2\right)$
Vértices: $(-1, -2), (3, -2)$



49. Centro: $(2, -3)$
Focos: $\left(2 \pm \sqrt{10}, -3\right)$
Vértices: $(1, -3), (3, -3)$



51. Hipérbola degenerada
La gráfica consta de dos rectas
$y = -3 \pm \frac{1}{3}(x + 1)$
que se cortan en $(-1, -3)$.

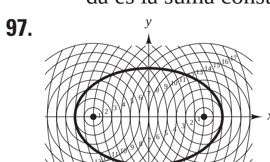


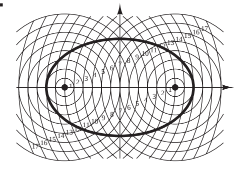
53. Centro: $(1, -3)$
Focos: $\left(1, -3 \pm 2\sqrt{5}\right)$
Vértices: $\left(1, -3 \pm \sqrt{2}\right)$
Asíntotas:
$y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} - 3;$
$y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} - 3$

55. Centro: $(1, -3)$
Focos: $\left(1 \pm \sqrt{10}, -3\right)$
Vértices: $(-1, -3), (3, -3)$
Asíntotas:
$y = \sqrt{6}\,x/2 - \sqrt{6}/2 - 3;$
$y = -\sqrt{6}\,x/2 + \sqrt{6}/2 - 3$

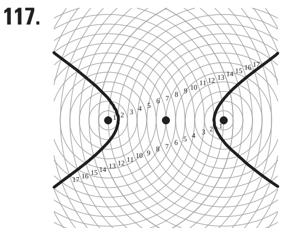
57. $x^2/1 - y^2/25 = 1$ **59.** $y^2/9 - (x - 2)^2/(9/4) = 1$
61. $y^2/4 - x^2/12 = 1$ **63.** $(x - 3)^2/9 - (y - 2)^2/4 = 1$
65. *a*) $\left(6, \sqrt{3}\right)$: $2x - 3\sqrt{3}y - 3 = 0$
$\left(6, -\sqrt{3}\right)$: $2x + 3\sqrt{3}y - 3 = 0$
b) $\left(6, \sqrt{3}\right)$: $9x + 2\sqrt{3}y - 60 = 0$
$\left(6, -\sqrt{3}\right)$: $9x - 2\sqrt{3}y - 60 = 0$
67. Elipse **69.** Parábola **71.** Círculo
73. Círculo **75.** Hipérbola
77. *a*) Una parábola es el conjunto de todos los puntos (x, y) que equidistan de una recta fija y de un punto fijo que no se encuentra en la recta.
b) Para la directriz $y = k - p$: $(x - h)^2 = 4p(y - k)$
Para la directriz $x = h - p$: $(y - k)^2 = 4p(x - h)$
c) Si P es un punto de la parábola, entonces la recta tangente a la parábola en P forma ángulos iguales con la recta que pasa por P y el foco, y con la recta que pasa por P y es paralela al eje de la parábola.
79. *a*) Una hipérbola es el conjunto de todos los puntos (x, y) para los cuales el valor absoluto de la diferencia entre las distancias a dos puntos fijos distintos es una constante.
b) El eje transversal es horizontal: $\dfrac{(x - h)^2}{a^2} - \dfrac{(y - k)^2}{b^2} = 1$
El eje transversal es vertical: $\dfrac{(y - k)^2}{a^2} - \dfrac{(x - h)^2}{b^2} = 1$
c) El eje transversal es horizontal:
$y = k + (b/a)(x - h)$ y $y = k - (b/a)(x - h)$
El eje transversal es vertical:
$y = k + (a/b)(x - h)$ y $y = k - (a/b)(x - h)$
81. $\frac{9}{4}$ m **83.** $y = 2ax_0x - ax_0^2$
85. *a*) Demostración *b*) Demostración
87. $x_0 = 2\sqrt{3}/3$; Distancia de la colina: $2\sqrt{3}/3 - 1$
89. $[16(4 + 3\sqrt{3} - 2\pi)]/3 \approx 15.536$ pies²
91. *a*) $y = (1/180)x^2$
b) $10\left[2\sqrt{13} + 9\ln\left(\dfrac{2 + \sqrt{13}}{3}\right)\right] \approx 128.4$ m
93. Cuando p se incrementa, la gráfica de $x^2 = 4py$ se hace más abierta.

95. *a*) $L = 2a$
b) Los alfileres se localizan en los focos y la longitud de la cuerda es la suma constante de las distancias desde los focos.
97.





99. Demostración
101. $e \approx 0.1776$
103. $e \approx 0.9671$ **105.** $\left(0, \frac{25}{3}\right)$
107. Extremos del eje menor: $(-6, -2), (0, -2)$
Extremos del eje mayor: $(-3, -6), (-3, 2)$
109. *a*) Área $= 2\pi$
b) Volumen $= 8\pi/3$
Área de la superficie $= [2\pi(9 + 4\sqrt{3}\pi)]/9 \approx 21.48$
c) Volumen $= 16\pi/3$
Área de la superficie $= \dfrac{4\pi\left[6 + \sqrt{3}\ln\left(2 + \sqrt{3}\right)\right]}{3} \approx 34.69$
111. 37.96 **113.** 40 **115.** $(x - 6)^2/9 - (y - 2)^2/7 = 1$
117.



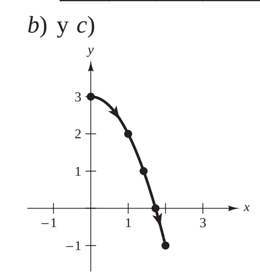
119. Demostración
121. $x = \left(-90 + 96\sqrt{2}\right)/7 \approx 6.538$
$y = \left(160 - 96\sqrt{2}\right)/7 \approx 3.462$
123. Hay cuatro puntos de intersección.
En $\left(\dfrac{\sqrt{2}\,ac}{\sqrt{2a^2 - b^2}}, \dfrac{b^2}{\sqrt{2}\sqrt{2a^2 - b^2}}\right)$, las pendientes de las rectas tangentes son $y'_e = -c/a$ y $y'_h = a/c$.
Como las pendientes son negativos recíprocos, las rectas tangentes son perpendiculares. De manera similar, las curvas son perpendiculares en los otros tres puntos de intersección.
125. Falso. Ver la definición de parábola. **127.** Verdadero
129. Verdadero **131.** Problema Putnam B4, 1976

Sección 10.2 (página 718)

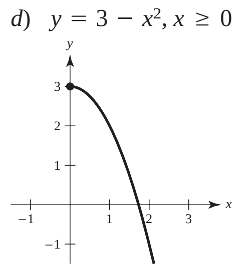
1. *a*)

t	0	1	2	3	4
x	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2
y	3	2	1	0	-1

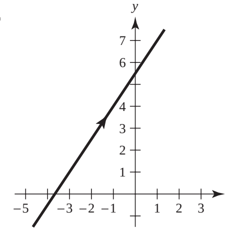
b) y *c*)



d) $y = 3 - x^2, x \geq 0$

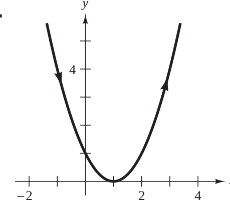


3.



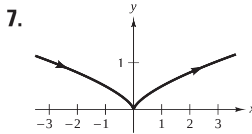
$3x - 2y + 11 = 0$

5.



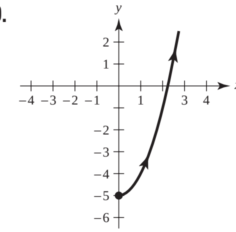
$y = (x - 1)^2$

7.



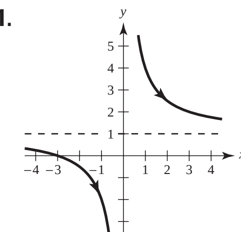
$y = \frac{1}{2}x^{2/3}$

9.



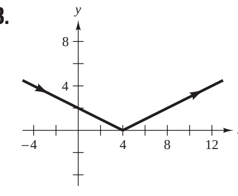
$y = x^2 - 5, \quad x \geq 0$

11.



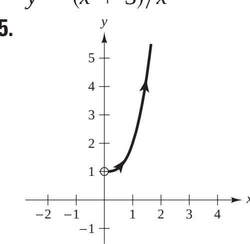
$y = (x + 3)/x$

13.



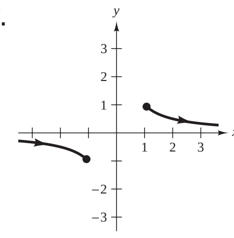
$y = |x - 4|/2$

15.



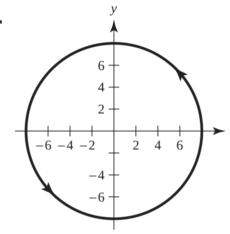
$y = x^3 + 1, \quad x > 0$

17.



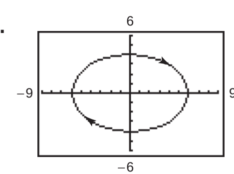
$y = 1/x, \quad |x| \geq 1$

19.



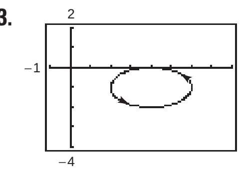
$x^2 + y^2 = 64$

21.



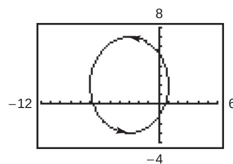
$\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

23.



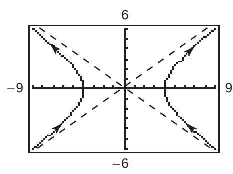
$\dfrac{(x - 4)^2}{4} + \dfrac{(y + 1)^2}{1} = 1$

25.



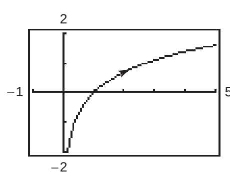
$\dfrac{(x + 3)^2}{16} + \dfrac{(y - 2)^2}{25} = 1$

27.



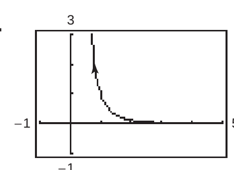
$\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

29.



$y = \ln x$

31.



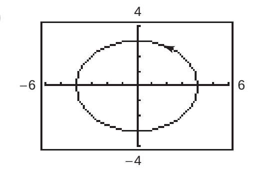
$y = 1/x^3, \quad x > 0$

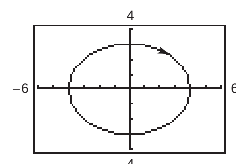
33. Cada curva representa una porción de la recta $y = 2x + 1$.

	Dominio	*Orientación*	*Suave*
a)	$-\infty < x < \infty$	Hacia arriba	Sí
b)	$-1 \leq x \leq 1$	Oscila	No, $\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{dy}{d\theta} = 0$ cuando $\theta = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
c)	$0 < x < \infty$	Hacia abajo	Sí
d)	$0 < x < \infty$	Hacia arriba	Sí

35. *a*) y *b*) representan la parábola $y = 2(1 - x^2)$ para $-1 \leq x \leq 1$. La curva es suave. La orientación es de derecha a izquierda en el inciso *a*) y en el inciso *b*)

37. *a*)





b) La orientación se invierte. *c*) La orientación se invierte.

d) Las respuestas varían. Por ejemplo,

$x = 2 \sec t \qquad x = 2 \sec(-t)$

$y = 5 \operatorname{sen} t \qquad y = 5 \operatorname{sen}(-t)$

tienen las mismas gráficas, pero sus orientaciones se invierten.

39. $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

41. $\dfrac{(x - h)^2}{a^2} + \dfrac{(y - k)^2}{b^2} = 1$

43. $x = 4t$

$y = -7t$

(La solución no es única)

45. $x = 3 + 2 \cos \theta$

$y = 1 + 2 \operatorname{sen} \theta$

(La solución no es única)

47. $x = 10 \cos \theta$

$y = 6 \operatorname{sen} \theta$

(La solución no es única)

49. $x = 4 \sec \theta$

$y = 3 \tan \theta$

(La solución no es única)

51. $x = t$

$y = 6t - 5;$

$x = t + 1$

$y = 6t + 1$

(La solución no es única)

53. $x = t$

$y = t^3;$

$x = \tan t$

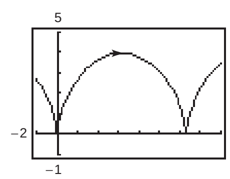
$y = \tan^3 t$

(La solución no es única)

55. $x = t + 3, y = 2t + 1$

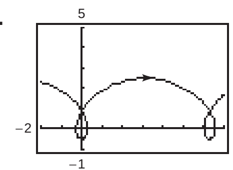
57. $x = t, y = t^2$

59.



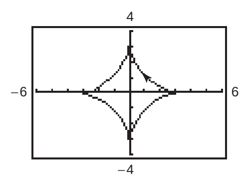
No es suave cuando $\theta = 2n\pi$

61.



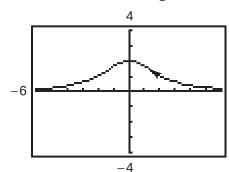
Suave en todas partes

63.



No es suave cuando $\theta = \frac{1}{2}n\pi$

65.



Suave en todas partes

67. Cada punto (x, y) en el plano es determinado por la curva plana $x = f(t), y = g(t)$. Para cada t, graficar (x, y). Cuando t se incrementa, la curva se traza en una dirección específica llamada orientación de la curva.

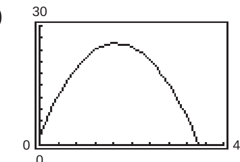
69. $x = a\theta - b \operatorname{sen} \theta;\ y = a - b \cos \theta$

71. Falso. La gráfica de las ecuaciones paramétricas es la porción de la recta $y = x$ cuando $x \geq 0$.

73. Verdadero

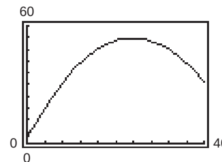
75. *a*) $x = \left(\frac{440}{3} \cos \theta\right)t;\ y = 3 + \left(\frac{440}{3} \operatorname{sen} \theta\right)t - 16t^2$

b)



No es *home run*

c)



Home run

d) 19.4°

Sección 10.3 (página 727)

1. $-3/t$ **3.** -1

5. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{4}, \dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$; No es ni cóncava hacia arriba ni cóncava hacia abajo

7. $dy/dx = 2t + 3,\ d^2y/dx^2 = 2$
En $t = -1, dy/dx = 1, d^2y/dx^2 = 2$; Cóncava hacia arriba

9. $dy/dx = -\cot \theta,\ d^2y/dx^2 = -(\csc \theta)^3/4$
En $\theta = \pi/4, dy/dx = -1,\ d^2y/dx^2 = -\sqrt{2}/2$;
Cóncava hacia abajo

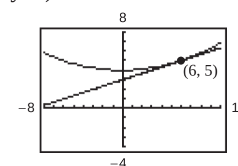
11. $dy/dx = 2 \csc \theta,\ d^2y/dx^2 = -2 \cot^3 \theta$
En $\theta = \pi/6, dy/dx = 4,\ d^2y/dx^2 = -6\sqrt{3}$;
Cóncava hacia abajo

13. $dy/dx = -\tan \theta,\ d^2y/dx^2 = \sec^4 \theta \csc \theta/3$
En $\theta = \pi/4, dy/dx = -1,\ d^2y/dx^2 = 4\sqrt{2}/3$;
Cóncava hacia arriba

15. $\left(-2/\sqrt{3}, 3/2\right)$: $3\sqrt{3}x - 8y + 18 = 0$
$(0, 2)$: $y - 2 = 0$
$\left(2\sqrt{3}, 1/2\right)$: $\sqrt{3}x + 8y - 10 = 0$

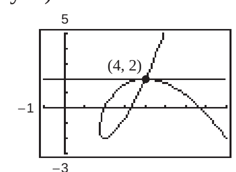
17. $(0, 0)$: $2y - x = 0$
$(-3, -1)$: $y + 1 = 0$
$(-3, 3)$: $2x - y + 9 = 0$

19. *a*) y *d*)



b) En $t = 1,\ dx/dt = 6,$ $dy/dt = 2$ y $dy/dx = 1/3$.
c) $y = \frac{1}{3}x + 3$

21. *a*) y *d*)



b) En $t = -1,\ dx/dt = -3,$ $dy/dt = 0$ y $dy/dx = 0$.
c) $y = 2$

23. $y = \pm\frac{3}{4}x$ **25.** $y = 3x - 5$ y $y = 1$

27. Horizontal: $(1, 0), (-1, \pi), (1, -2\pi)$
Vertical: $(\pi/2, 1), (-3\pi/2, -1), (5\pi/2, 1)$

29. Horizontal: $(4, 0)$
Vertical: Ninguna

31. Horizontal: $(5, -2), (3, 2)$
Vertical: Ninguna

33. Horizontal: $(0, 3), (0, -3)$
Vertical: $(3, 0), (-3, 0)$

35. Horizontal: $(5, -1), (5, -3)$
Vertical: $(8, -2), (2, -2)$

37. Horizontal: Ninguna
Vertical: $(1, 0), (-1, 0)$

39. Cóncava hacia abajo: $-\infty < t < 0$
Cóncava hacia arriba: $0 < t < \infty$

41. Cóncava hacia arriba: $t > 0$

43. Cóncava hacia abajo: $0 < t < \pi/2$
Cóncava hacia arriba: $\pi/2 < t < \pi$

45. $\displaystyle\int_1^3 \sqrt{4t^2 - 3t + 9}\, dt$ **47.** $\displaystyle\int_{-2}^2 \sqrt{e^{2t} + 4}\, dt$

49. $4\sqrt{13} \approx 14.422$ **51.** $70\sqrt{5} \approx 156.525$

53. $\sqrt{2}(1 - e^{-\pi/2}) \approx 1.12$

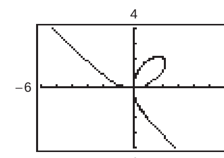
55. $\frac{1}{12}\left[\ln\left(\sqrt{37} + 6\right) + 6\sqrt{37}\right] \approx 3.249$ **57.** $6a$ **59.** $8a$

61. *a*)

35
0
240
0

b) 219.2 pies
c) 230.8 pies

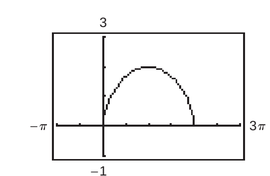
63. *a*)



b) $(0, 0), \left(4\sqrt[3]{2}/3, 4\sqrt[3]{4}/3\right)$
c) ≈ 6.557

65. *a*)

3
$-\pi$
3π
−1



b) La velocidad media de la partícula en la segunda trayectoria es el doble de la velocidad media de la partícula en la primera trayectoria.

c) 4π

67. $S = 2\pi\int_0^4 \sqrt{10}(t+2)\,dt = 32\pi\sqrt{10} \approx 317.907$

69. $S = 2\pi\int_0^{\pi/2}\left(\operatorname{sen}\theta\cos\theta\sqrt{4\cos^2\theta+1}\right)d\theta = \dfrac{\left(5\sqrt{5}-1\right)\pi}{6}$

≈ 5.330

71. *a*) $27\pi\sqrt{13}$ *b*) $18\pi\sqrt{13}$ **73.** 50π **75.** $12\pi a^2/5$

77. Ver el teorema 10.7, forma paramétrica de la derivada en la página 721.

79. 6

81. *a*) $S = 2\pi\int_a^b g(t)\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

b) $S = 2\pi\int_a^b f(t)\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

83. Demostración **85.** $3\pi/2$ **87.** *d* **88.** *b* **89.** *f* **90.** *c*

91. *a* **92.** *e* **93.** $\left(\frac{3}{4}, \frac{8}{5}\right)$ **95.** 288π

97. *a*) $dy/dx = \operatorname{sen}\theta/(1-\cos\theta)$; $d^2y/dx^2 = -1/[a(\cos\theta-1)^2]$

b) $y = \left(2+\sqrt{3}\right)\left[x - a\left(\pi/6-\frac{1}{2}\right)\right] + a\left(1-\sqrt{3}/2\right)$

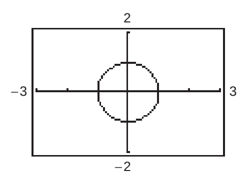
c) $(a(2n+1)\pi, 2a)$

d) Cóncava hacia abajo en $(0, 2\pi)$, $(2\pi, 4\pi)$, etc.

e) $s = 8a$

99. Demostración

101. *a*)



b) Círculo de radio 1 y centro en (0, 0) excepto el punto (–1, 0)

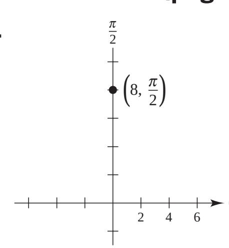
c) Cuando *t* crece de –20 a 0, la velocidad aumenta y cuando *t* crece de 0 a 20, la velocidad disminuye.

103. Falso: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{g'(t)}{f'(t)}\right]}{f'(t)} = \dfrac{f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)}{[f'(t)]^3}$.

105. $\approx$ 982 pies

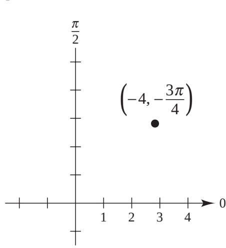
Sección 10.4 (página 738)

1.



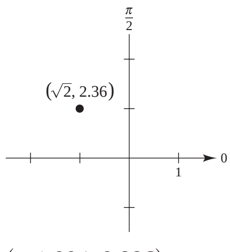
(0, 8)

3.



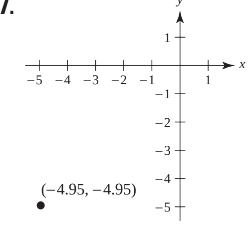

$\left(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right) \approx (2.828, 2.828)$

5.

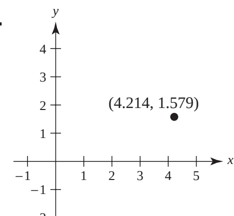


$(-1.004, 0.996)$

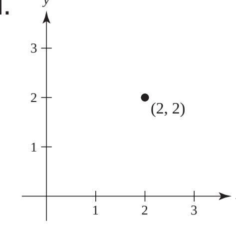
7.




9.

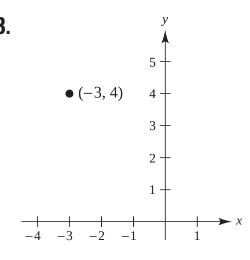


11.



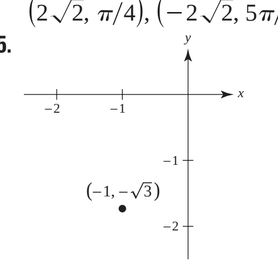
$\left(2\sqrt{2}, \pi/4\right)$, $\left(-2\sqrt{2}, 5\pi/4\right)$

13.



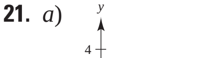
$(5, 2.214)$, $(-5, 5.356)$

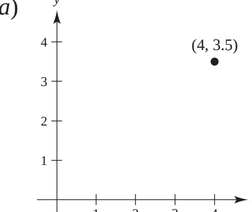
15.



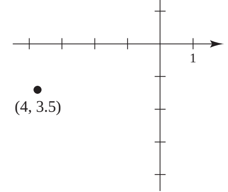
$(2, 4\pi/3)$, $(-2, \pi/3)$

17. $(3.606, -0.588)$ **19.** $(3.052, 0.960)$


21. *a*)

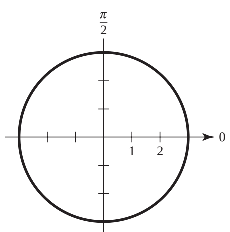


b)

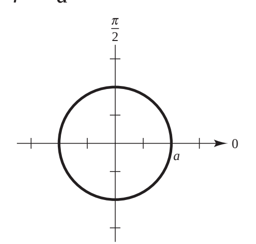


23. *c* **24.** *b* **25.** *a* **26.** *d*

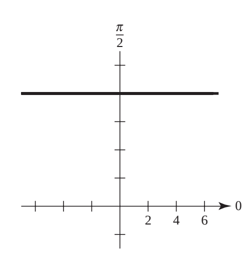
27. $r = 3$



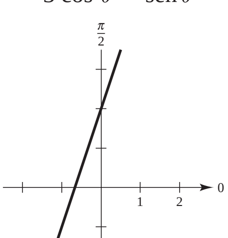

29. $r = a$



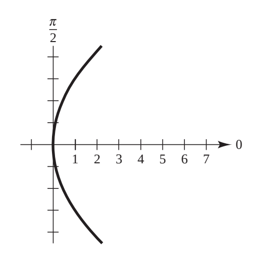
31. $r = 8\csc\theta$

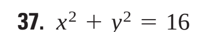


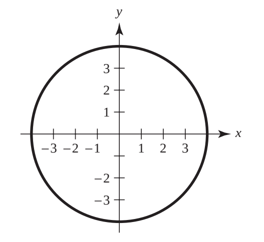

33. $r = \dfrac{-2}{3\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}$



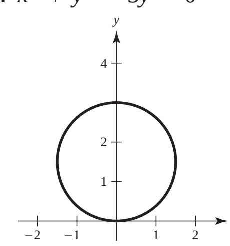
35. $r = 9\csc^2\theta\cos\theta$



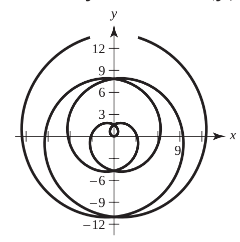

37. $x^2 + y^2 = 16$



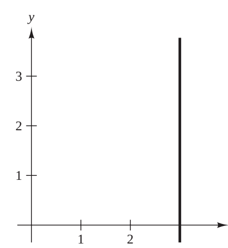
39. $x^2 + y^2 - 3y = 0$



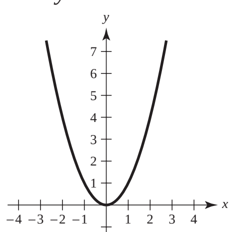
41. $\sqrt{x^2 + y^2} = \arctan(y/x)$



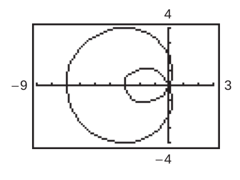
43. $x - 3 = 0$



45. $x^2 - y = 0$

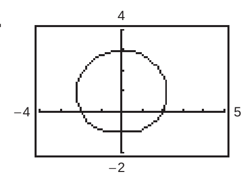


47.



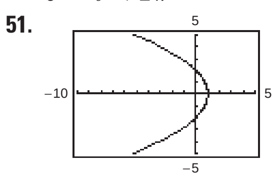
$0 \le \theta < 2\pi$

49.



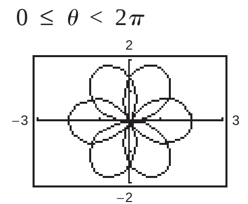
$0 \le \theta < 2\pi$

51.



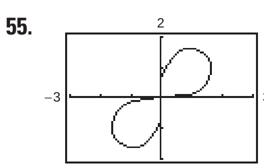
$-\pi < \theta < \pi$

53.



$0 \le \theta < 4\pi$

55.



$0 \le \theta < \pi/2$

57. $(x - h)^2 + (y - k)^2 = h^2 + k^2$

Radio: $\sqrt{h^2 + k^2}$

Centro: (h, k)

59. $\sqrt{17}$ **61.** ≈ 5.6

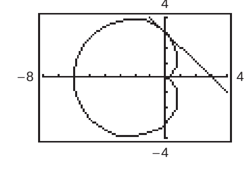
63. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\cos\theta(3\operatorname{sen}\theta + 1)}{6\cos^2\theta - 2\operatorname{sen}\theta - 3}$

$(5, \pi/2)$: $dy/dx = 0$

$(2, \pi)$: $dy/dx = -2/3$

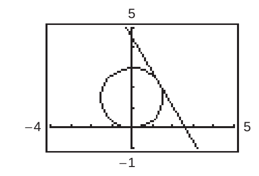
$(-1, 3\pi/2)$: $dy/dx = 0$

65. *a*) y *b*)



c) $dy/dx = -1$

67. *a*) y *b*)



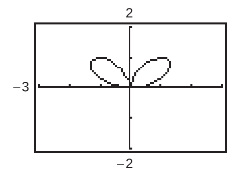
c) $dy/dx = -\sqrt{3}$

69. Horizontal: $(2, 3\pi/2), \left(\frac{1}{2}, \pi/6\right), \left(\frac{1}{2}, 5\pi/6\right)$

Vertical: $\left(\frac{3}{2}, 7\pi/6\right), \left(\frac{3}{2}, 11\pi/6\right)$

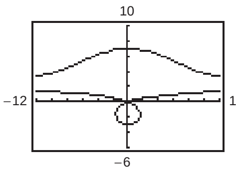
71. $(5, \pi/2), (1, 3\pi/2)$

73.



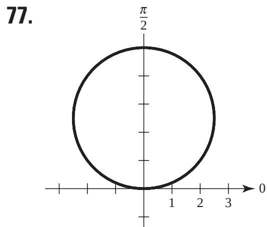
$(0, 0), (1.4142, 0.7854), (1.4142, 2.3562)$

75.



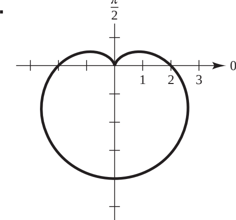
$(7, 1.5708), (3, 4.7124)$

77.



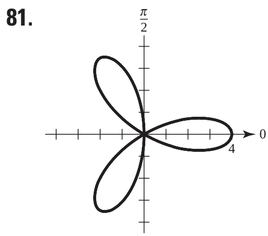
$\theta = 0$

79.



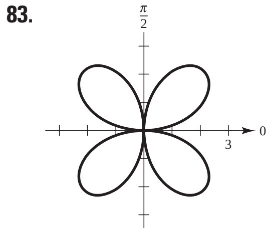
$\theta = \pi/2$

81.



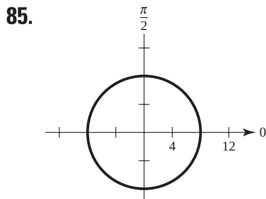
$\theta = \pi/6, \pi/2, 5\pi/6$

83.

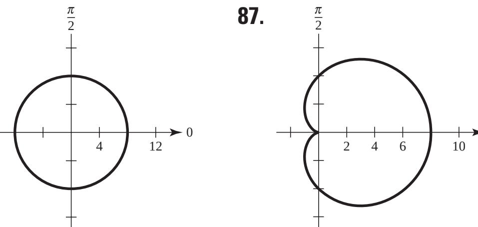


$\theta = 0, \pi/2$

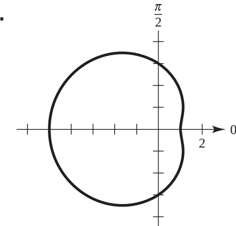
85.



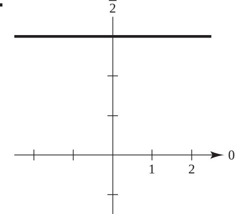
87.



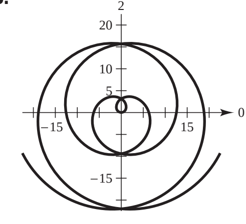
89.



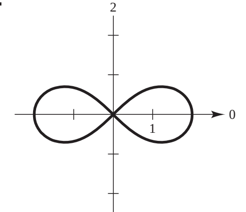
91.



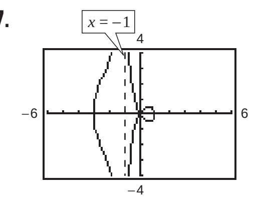
93.



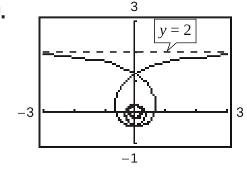
95.



97.



99.



101. El sistema de coordenadas rectangulares es una colección de puntos de la forma (x, y), donde x es la distancia dirigida del eje y al punto y y es la distancia dirigida del eje x al punto. Cada punto tiene una representación única.

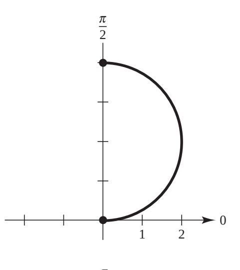
El sistema de coordenadas polares es una colección de puntos de la forma (r, θ), donde r es la distancia dirigida del origen O al punto P y θ es el ángulo dirigido, medido en sentido positivo (contrario a las manecillas del reloj), del eje polar al segmento $\overline{OP}$. En coordenadas polares la representación de cada punto no es única.

103. La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $r = f(\theta)$ en (r, θ) es

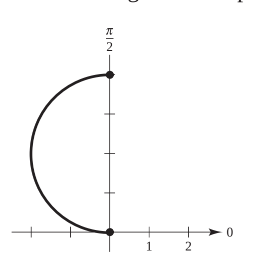
$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(\theta)\cos\theta + f'(\theta)\operatorname{sen}\theta}{-f(\theta)\operatorname{sen}\theta + f'(\theta)\cos\theta}.$$

Si $f(\alpha) = 0$ y $f'(\alpha) \neq 0$, entonces $\theta = \alpha$ es tangente en el polo.

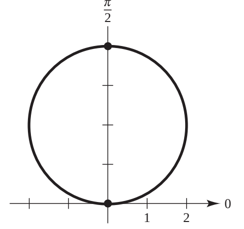
105. *a*)



b)



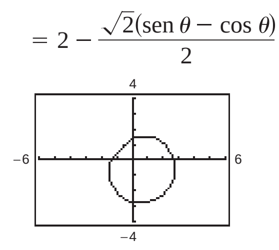
c)



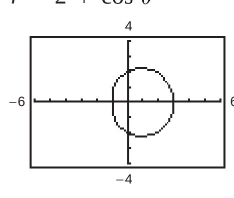
107. Demostración

109. *a*) $r = 2 - \operatorname{sen}(\theta - \pi/4)$

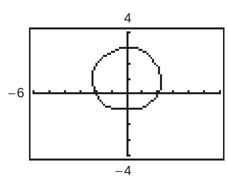
$= 2 - \dfrac{\sqrt{2}(\operatorname{sen}\theta - \cos\theta)}{2}$



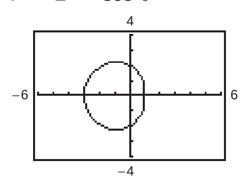
b) $r = 2 + \cos\theta$



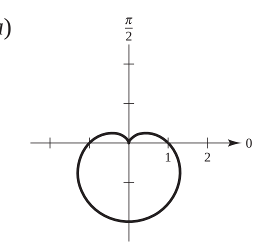
c) $r = 2 + \operatorname{sen}\theta$



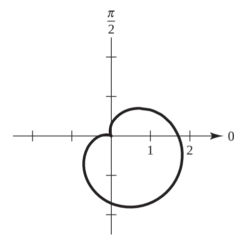
d) $r = 2 - \cos\theta$



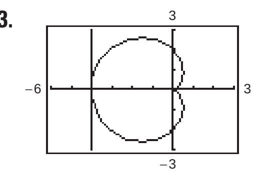
111. *a*)



b)

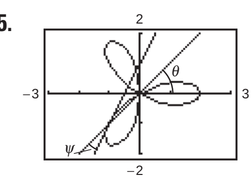


113.



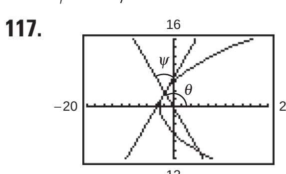
$\psi = \pi/2$

115.



$\psi = \arctan\frac{1}{3} \approx 18.4°$

117.



$\psi = \pi/3,\ 60°$

119. Verdadero

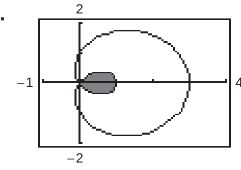
121. Verdadero

Sección 10.5 (página 747)

1. $8\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta$ **3.** $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\pi/2}^{3\pi/2} (3 - 2\operatorname{sen}\theta)^2\, d\theta$ **5.** 9π

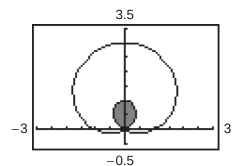
7. $\pi/3$ **9.** $\pi/8$ **11.** $3\pi/2$ **13.** 27π **15.** 4

17.



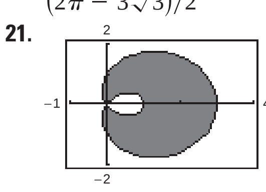
$(2\pi - 3\sqrt{3})/2$

19.



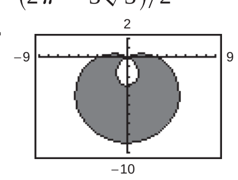
$(2\pi - 3\sqrt{3})/2$

21.



$\pi + 3\sqrt{3}$

23.



$9\pi + 27\sqrt{3}$

25. $(1, \pi/2), (1, 3\pi/2), (0, 0)$

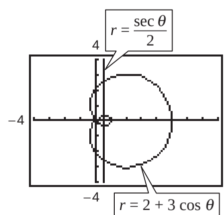
27. $\left(\dfrac{2 - \sqrt{2}}{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right), \left(\dfrac{2 + \sqrt{2}}{2}, \dfrac{7\pi}{4}\right), (0, 0)$

29. $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{\pi}{6}\right), \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{5\pi}{6}\right), (0, 0)$ **31.** $(2, 4), (-2, -4)$

33. $(1, \pi/12), (1, 5\pi/12), (1, 7\pi/12), (1, 11\pi/12),$ $(1, 13\pi/12), (1, 17\pi/12), (1, 19\pi/12), (1, 23\pi/12)$

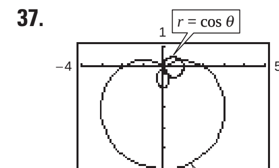


35.



$(-0.581, \pm 2.607)$, $(2.581, \pm 1.376)$

37.

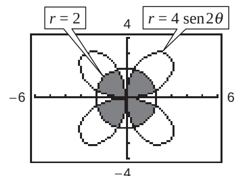


$(0, 0)$, $(0.935, 0.363)$, $(0.535, -1.006)$

Las gráficas alcanzan polo en diferentes tiempos (valores de θ).

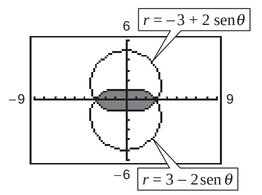


39.



$\frac{4}{3}(4\pi - 3\sqrt{3})$

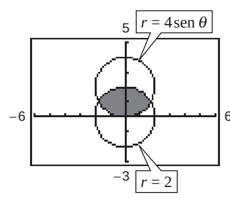
41.



$11\pi - 24$

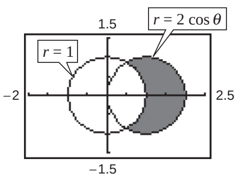


43.



$\frac{2}{3}(4\pi - 3\sqrt{3})$

45.



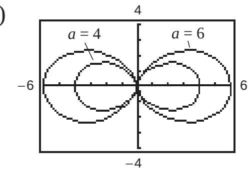
$\pi/3 + \sqrt{3}/2$

47. $5\pi a^2/4$ **49.** $(a^2/2)(\pi - 2)$

51. *a*) $(x^2 + y^2)^{3/2} = ax^2$



b)

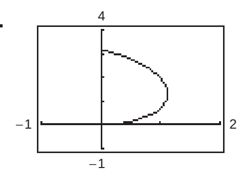


c) $15\pi/2$

53. El área encerrada por la función es $\pi a^2/4$ si n es impar y es $\pi a^2/2$ si n es par.

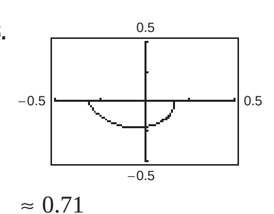
55. 16π **57.** 4π **59.** 8

61.



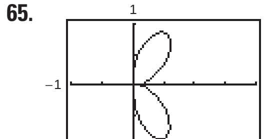
≈ 4.16

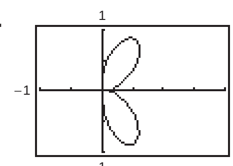
63.



≈ 0.71

65.





≈ 4.39

67. 36π

69. $\dfrac{2\pi\sqrt{1 + a^2}}{1 + 4a^2}(e^{\pi a} - 2a)$ **71.** 21.87

73. Habrá puntos de intersección simultáneos. Pueden ser puntos de intersección que no ocurren con las mismas coordenadas en las dos gráficas.

75. *a*) $S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta) \operatorname{sen} \theta \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2}\, d\theta$

b) $S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta) \cos \theta \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2}\, d\theta$

77. $40\pi^2$

79. *a*) 16π

b)

$\boldsymbol{\theta}$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
$\boldsymbol{A}$	6.32	12.14	17.06	20.80	23.27	24.60	25.08

c) y *d*) Para $\frac{1}{4}$ de área $(4\pi \approx 12.57)$: 0.42

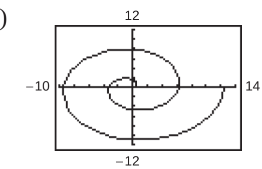
Para $\frac{1}{2}$ de área $(8\pi \approx 25.13)$: $1.57(\pi/2)$

Para $\frac{3}{4}$ de área $(12\pi \approx 37.70)$: 2.73

e) No. Los resultados no dependen del radio. Las respuestas varían.

81. Círculo

83. *a*)



La gráfica se vuelve más grande y más extendida. La gráfica se refleja en el eje y.

b) $(an\pi, n\pi)$ donde $n = 1, 2, 3, \ldots$

c) ≈ 21.26 *d*) $4/3\pi^3$

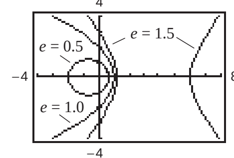
85. $r = \sqrt{2} \cos \theta$

87. Falso. Las gráficas de $f(\theta) = 1$ y $g(\theta) = -1$ coinciden.

89. Demostración

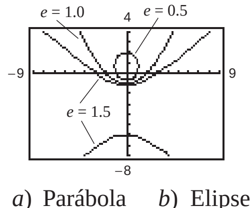
Sección 10.6 (página 755)

1.



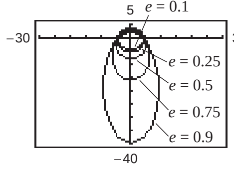
a) Parábola *b*) Elipse
c) Hipérbola

3.



a) Parábola *b*) Elipse
c) Hipérbola

5. *a*)



Elipse

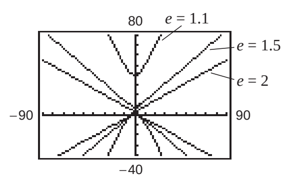
Cuando $e \to 1^-$, la elipse se vuelve más elíptica, y cuando $e \to 0^+$, se vuelve más circular.

b)

Parábola



c)



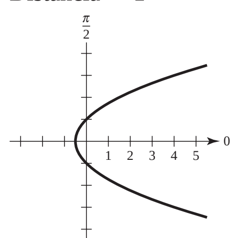
Hipérbola

Cuando $e \to 1^+$, la hipérbola se abre más lentamente, y cuando $e \to \infty$, abre más rápido.

7. *c* **8.** *f* **9.** *a* **10.** *e* **11.** *b* **12.** *d*

13. $e = 1$

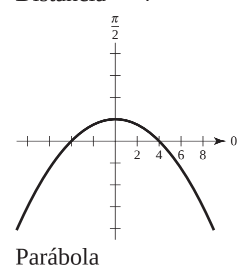
Distancia $= 1$



Parábola

15. $e = 1$

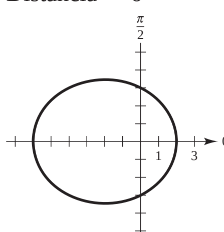
Distancia $= 4$



Parábola

17. $e = \frac{1}{2}$

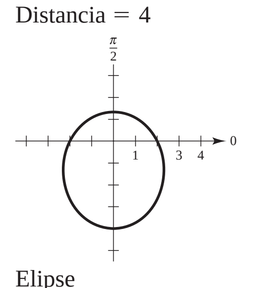
Distancia $= 6$



Elipse

19. $e = \frac{1}{2}$

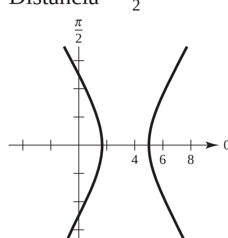
Distancia $= 4$



Elipse

21. $e = 2$

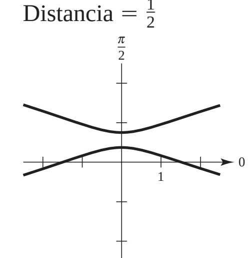
Distancia $= \frac{5}{2}$



Hipérbola

23. $e = 3$

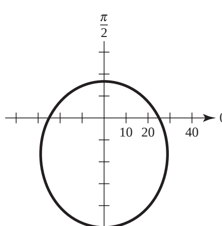
Distancia $= \frac{1}{2}$



Hipérbola

25. $e = \frac{1}{2}$

Distancia $= 50$



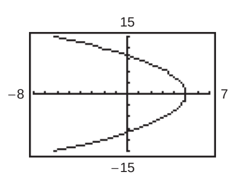
Elipse

27.

Elipse

$e = \frac{1}{2}$

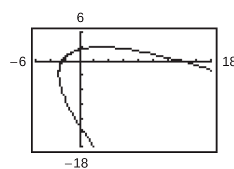
29.



Parábola

$e = 1$

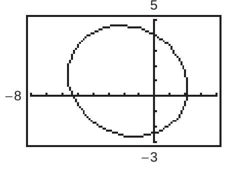
31.



Girada $\pi/4$ radianes en sentido contrario a las manecillas del reloj.



33.



Girada $\pi/6$ radianes en el sentido de las manecillas del reloj.

35. $r = \dfrac{8}{8 + 5\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right)}$

37. $r = 3/(1 - \cos\theta)$ **39.** $r = 1/(2 + \text{sen}\,\theta)$

41. $r = 2/(1 + 2\cos\theta)$ **43.** $r = 2/(1 - \text{sen}\,\theta)$

45. $r = 16/(5 + 3\cos\theta)$ **47.** $r = 9/(4 - 5\,\text{sen}\,\theta)$

49. $r = 4/(2 + \cos\theta)$

51. Si $0 < e < 1$, la cónica es una elipse.

Si $e = 1$, la cónica es una parábola.

Si $e > 1$, la cónica es una hipérbola

53. Si los focos son fijos y $e \to 0$, entonces $d \to \infty$. Para ver esto, comparar las elipses.

$r = \dfrac{1/2}{1 + (1/2)\cos\theta}$, $e = \dfrac{1}{2}$, $d = 1$ y

$r = \dfrac{5/16}{1 + (1/4)\cos\theta}$, $e = \dfrac{1}{4}$, $d = \dfrac{5}{4}$.

55. Demostración

57. $r^2 = \dfrac{9}{1 - (16/25)\cos^2\theta}$ **59.** $r^2 = \dfrac{-16}{1 - (25/9)\cos^2\theta}$

61. ≈ 10.88 **63.** 3.37 **65.** $\dfrac{7\,979.21}{1 - 0.9372\cos\theta}$; 11 015 mi

67. $r = \dfrac{149\,558\,278.0560}{1 - 0.0167\cos\theta}$

Perihelio: 147 101 680 km

Afelio: 152 098 320 km

69. $r = \dfrac{4\,497\,667\,328}{1 - 0.0086\cos\theta}$

Perihelio: 4 459 317 200 km

Afelio: 4 536 682 800 km

71. Las respuestas varían. Ejemplo de respuestas:

a) 3.591×10^{18} km²; 9.322 años

b) $\alpha \approx 0.361 + \pi$; Mayor ángulo con el rayo más pequeño para generar un área igual.

c) Inciso *a*): 1.583×10^9 km; 1.698×10^8 km/año

Inciso *b*): 1.610×10^9 km; 1.727×10^8 km/año

73. Demostración

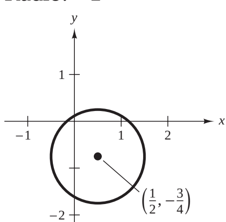
75. Sea $r_1 = ed/(1 + \text{sen}\,\theta)$ y $r_2 = ed/(1 - \text{sen}\,\theta)$.

Los puntos de intersección de r_1 y r_2 son $(ed, 0)$ y (ed, π). Las pendientes de las rectas tangentes a r_1 son –1 en $(ed, 0)$ y 1 en (ed, π). Las pendientes de las rectas tangentes a r_2 son 1 en $(ed, 0)$ y –1 en (ed, π). Por lo anterior, tanto en $(ed, 0)$ como en (ed, π) se cumple $m_1 m_2 = -1$, de manera que las curvas se intersecan en ángulos rectos.

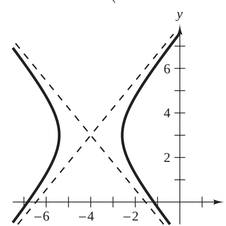
Ejercicios de repaso para el capítulo 10 (página 758)

1. *e* **2.** *c* **3.** *b* **4.** *d* **5.** *a* **6.** *f*

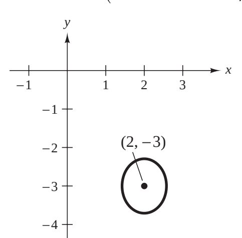
7. Círculo
Centro: $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$
Radio: 1



9. Hipérbola
Centro: $(-4, 3)$
Vértices: $\left(-4 \pm \sqrt{2}, 3\right)$



11. Elipse
Centro: $(2, -3)$
Vértices: $\left(2, -3 \pm \sqrt{2}/2\right)$

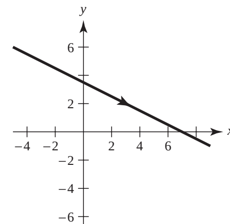


13. $y^2 - 4y - 12x + 4 = 0$ **15.** $(x - 1)^2/36 + y^2/20 = 1$

17. $x^2/49 - y^2/32 = 1$ **19.** ≈ 15.87

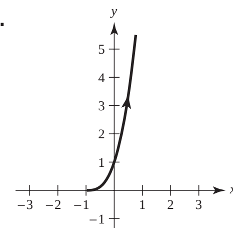
21. $4x + 4y - 7 = 0$ **23.** *a*) $(0, 50)$ *b*) $\approx 38\,294.49$

25.



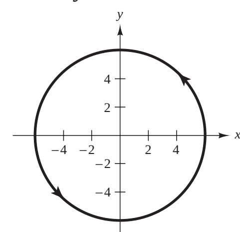
$x + 2y - 7 = 0$

27.



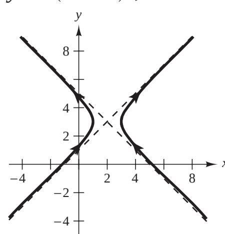
$y = (x + 1)^3, x > -1$

29.



$x^2 + y^2 = 36$

31.

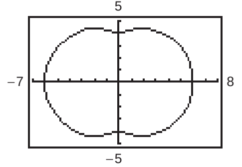


$(x - 2)^2 - (y - 3)^2 = 1$

33. Las respuestas varían. Ejemplo de respuesta:
$x = 5t - 2$
$y = 6 - 4t$

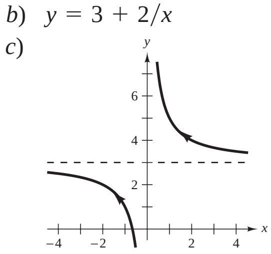
35. $x = 4\cos\theta - 3$
$y = 4 + 3 \operatorname{sen}\theta$

37.

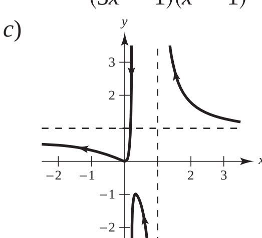


39. *a*) $dy/dx = -\frac{4}{5}$;
Tangentes horizontales: ninguna
b) $y = (-4x + 13)/5$
c)

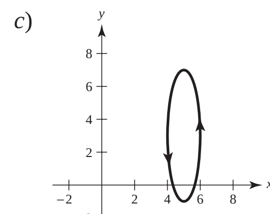
41. *a*) $dy/dx = -2t^2$;
Tangentes horizontales: ninguna
b) $y = 3 + 2/x$
c)



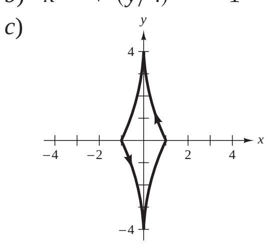
43. *a*) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(t - 1)(2t + 1)^2}{t^2(t - 2)^2}$;
Tangente horizontal: $\left(\dfrac{1}{3}, -1\right)$
b) $y = \dfrac{4x^2}{(5x - 1)(x - 1)}$
c)



45. *a*) $\dfrac{dy}{dx} = -4\cot\theta$;
Tangentes horizontales: $(5, 7), (5, -1)$
b) $(x - 5)^2 + \dfrac{(y - 3)^2}{16} = 1$
c)



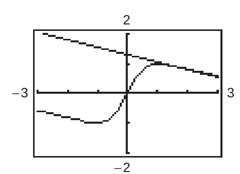
47. *a*) $\dfrac{dy}{dx} = -4\tan\theta$;
Tangentes horizontales: ninguna
b) $x^{2/3} + (y/4)^{2/3} = 1$
c)



49. Horizontal: $(5, 0)$
Vertical: Ninguna

51. Horizontal: $(2, 2), (2, 0)$
Vertical: $(4, 1), (0, 1)$

53. *a*) y *c*)

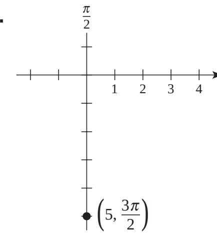


b) $dx/d\theta = -4,\ dy/d\theta = 1,\ dy/dx = -\frac{1}{4}$

55. $\frac{1}{2}\pi^2 r$

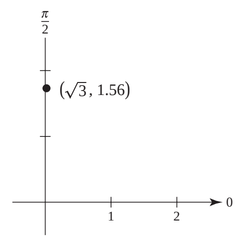
57. *a*) $s = 12\pi\sqrt{10} \approx 119.215$ **59.** $A = 3\pi$
b) $s = 4\pi\sqrt{10} \approx 39.738$

61.



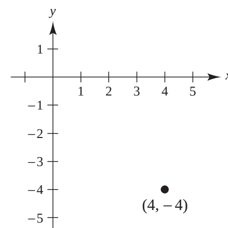
Rectangular: $(0, -5)$

63.



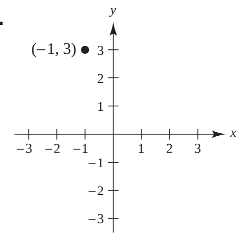
Rectangular: $(0.0187, 1.7320)$

65.



$\left(4\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right), \left(-4\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$

67.



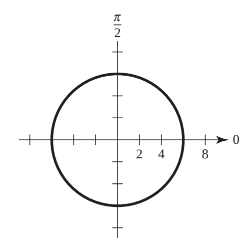
$\left(\sqrt{10}, 1.89\right), \left(-\sqrt{10}, 5.03\right)$

69. $x^2 + y^2 - 3x = 0$ **71.** $(x^2 + y^2 + 2x)^2 = 4(x^2 + y^2)$

73. $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ **75.** $y^2 = x^2[(4 - x)/(4 + x)]$

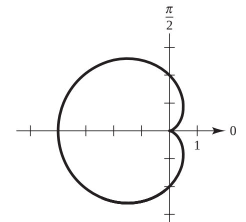
77. $r = a\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta$ **79.** $r^2 = a^2\theta^2$

81. Círculo

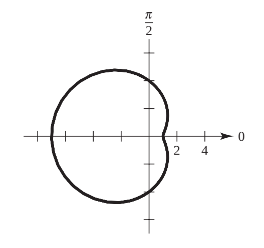


83. Recta

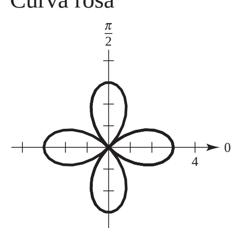
85. Cardioide



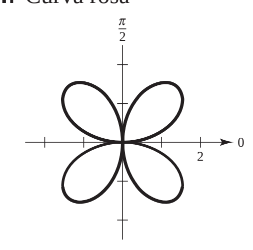
87. Caracol



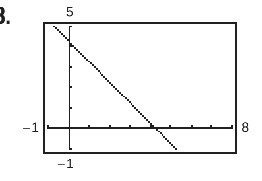
89. Curva rosa



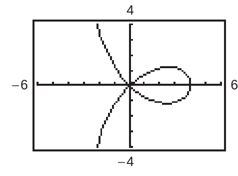
91. Curva rosa



93.



95.

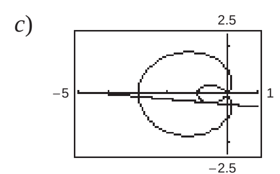


97. *a*) $\theta = \pm\pi/3$

b) Vertical: $(-1, 0), (3, \pi), \left(\frac{1}{2}, \pm 1.318\right)$

Horizontal: $(-0.686, \pm 0.568), (2.186, \pm 2.206)$

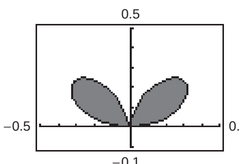
c)



99. Demostración **101.** $\frac{9\pi}{20}$ **103.** $\frac{9\pi}{2}$ **105.** 4

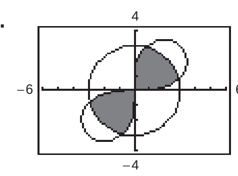
107. $\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\pi}{4}\right), \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{7\pi}{4}\right), (0, 0)$

109.



$$A = 2\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\theta \cos^4\theta \, d\theta \approx 0.10$$

111.

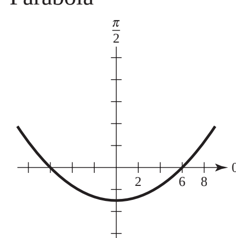


$$A = 2\left[\frac{1}{2}\int_0^{\pi/12} 18 \operatorname{sen} 2\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi/12}^{5\pi/12} 9\, d\theta + \frac{1}{2}\int_{5\pi/12}^{\pi/2} 18 \operatorname{sen} 2\theta \, d\theta\right]$$
$$\approx 1.2058 + 9.4248 + 1.2058 = 11.8364$$

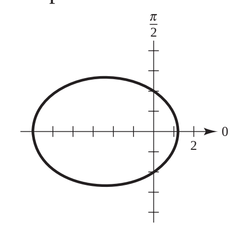
113. $4a$

115. $S = 2\pi\int_0^{\pi/2} (1 + 4\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\sqrt{17 + 8\cos\theta}\, d\theta$
$= 34\pi\sqrt{17}/5 \approx 88.08$

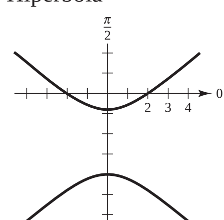
117. Parábola



119. Elipse



121. Hipérbola



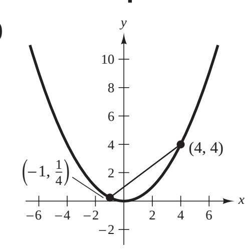
123. $r = 10 \operatorname{sen} \theta$

125. $r = 4/(1 - \cos \theta)$ **127.** $r = 5/(3 - 2 \cos \theta)$

SP Solución de problemas (página 761)

1. *a*)





b) y *c*) Demostraciones

3. Demostración

5. *a*) $r = 2a \tan \theta \operatorname{sen} \theta$

b) $x = 2at^2/(1 + t^2)$

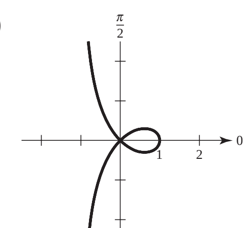
$y = 2at^3/(1 + t^2)$

c) $y^2 = x^3/(2a - x)$

7. *a*) $y^2 = x^2[(1 - x)/(1 + x)]$

b) $r = \cos 2\theta \cdot \sec \theta$

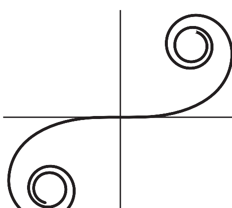
c)

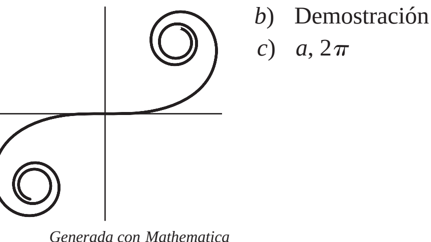


d) $y = x, y = -x$

e) $\left(\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}, \pm \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}\sqrt{-2 + \sqrt{5}}\right)$

9. *a*)





Generada con Mathematica

b) Demostración

c) $a, 2\pi$

11. $A = \frac{1}{2}ab$ **13.** $r^2 = 2 \cos 2\theta$

15. *a*) Primer plano: $x_1 = \cos 70°(150 - 375t)$

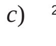
$y_1 = \operatorname{sen} 70°(150 - 375t)$

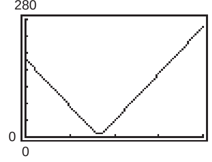
Segundo plano: $x_2 = \cos 45°(450t - 190)$

$y_2 = \operatorname{sen} 45°(190 - 450t)$

b) $\{[\cos 45°(450t - 190) - \cos 70°(150 - 375t)]^2 + [\operatorname{sen} 45°(190 - 450t) - \operatorname{sen} 70°(150 - 375t)]^2\}^{1/2}$

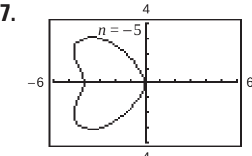
c)

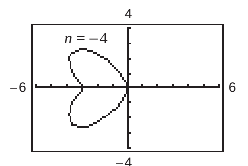


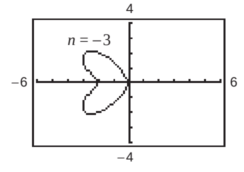


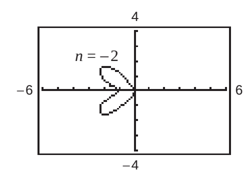
0.4145 h; sí

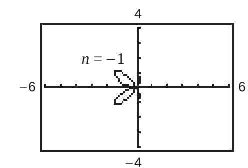
17.

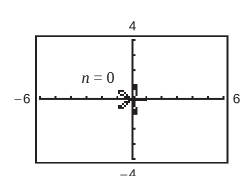


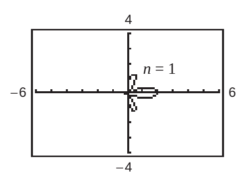


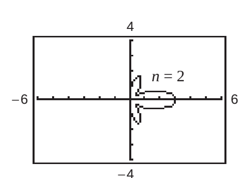


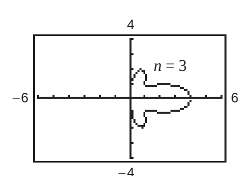


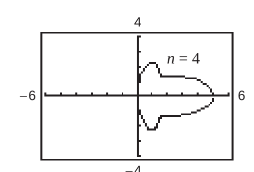


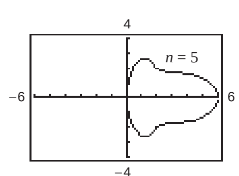










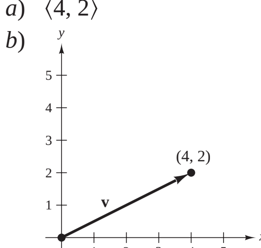


$n = 1, 2, 3, 4, 5$ produce “campanas”; $n = -1, -2, -3, -4, -5$ produce “corazones”

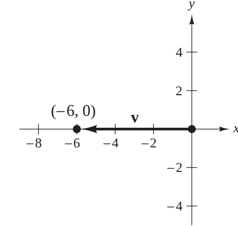
Capítulo 11

Sección 11.1 (página 771)

1. *a*) $\langle 4, 2\rangle$ 
b)

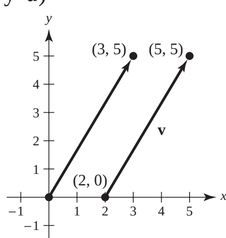


3. *a*) $\langle -6, 0\rangle$
b) 



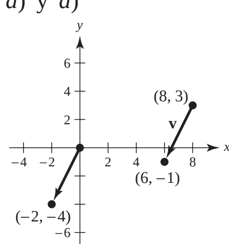
5. $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \langle 2, 4\rangle$ **7.** $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \langle 6, -5\rangle$

9. *a*) y *d*)



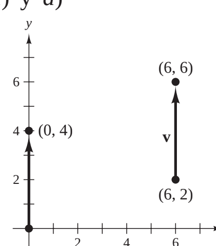
b) $\langle 3, 5\rangle$
c) $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

11. *a*) y *d*)



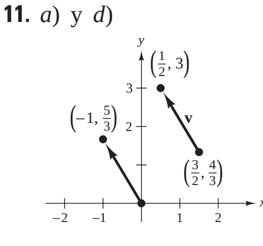
b) $\langle -2, -4\rangle$
c) $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

13. *a*) y *d*)



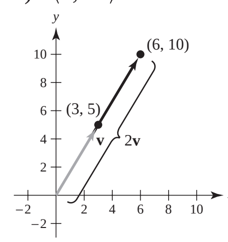
b) $\langle 0, 4\rangle$ *c*) $\mathbf{v} = 4\mathbf{j}$

11. *a*) y *d*)

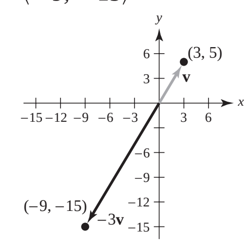


b) $\left\langle -1, \frac{5}{3}\right\rangle$
c) $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \frac{5}{3}\mathbf{j}$

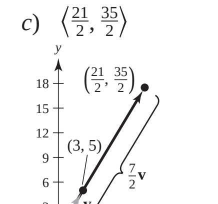
17. *a*) $\langle 6, 10\rangle$



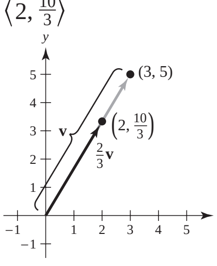
b) $\langle -9, -15\rangle$



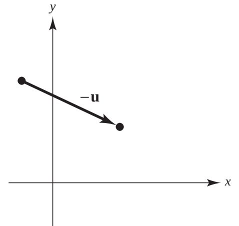
c) $\left\langle \frac{21}{2}, \frac{35}{2}\right\rangle$



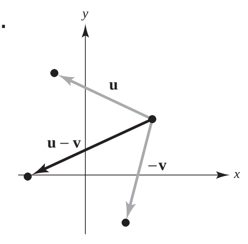
d) $\left\langle 2, \frac{10}{3}\right\rangle$



19.

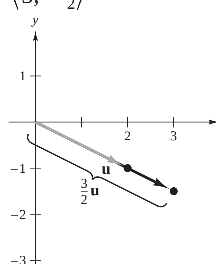


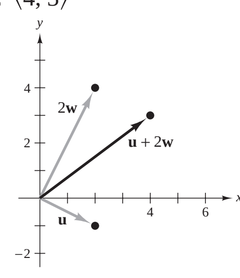
21.



23. *a*) $\left\langle \frac{8}{3}, 6\right\rangle$ *b*) $\langle -2, -14\rangle$ *c*) $\langle 18, -7\rangle$

25. $\left\langle 3, -\frac{3}{2}\right\rangle$ **27.** $\langle 4, 3\rangle$ 





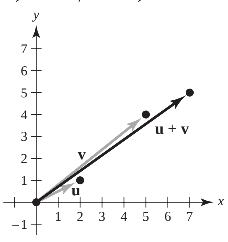
29. $(3, 5)$ **31.** 7 **33.** 5 **35.** $\sqrt{61}$

37. $\left\langle \sqrt{17}/17, 4\sqrt{17}/17\right\rangle$ **39.** $\left\langle 3\sqrt{34}/34, 5\sqrt{34}/34\right\rangle$

41. *a*) $\sqrt{2}$ *b*) $\sqrt{5}$ *c*) 1 *d*) 1 *e*) 1 *f*) 1

43. *a*) $\sqrt{5}/2$ *b*) $\sqrt{13}$ *c*) $\sqrt{85}/2$ *d*) 1 *e*) 1 *f*) 1

45. 



$\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| = \sqrt{5} + \sqrt{41}$ y $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \sqrt{74}$
$\sqrt{74} \le \sqrt{5} + \sqrt{41}$

47. $\langle 0, 6\rangle$ **49.** $\left\langle -\sqrt{5}, 2\sqrt{5}\right\rangle$ **51.** $\langle 3, 0\rangle$ **53.** $\left\langle -\sqrt{3}, 1\right\rangle$

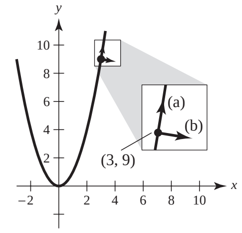
55. $\left\langle \dfrac{2 + 3\sqrt{2}}{2}, \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right\rangle$ **57.** $\langle 2\cos 4 + \cos 2, 2\operatorname{sen} 4 + \operatorname{sen} 2\rangle$

59. Las respuestas varían. Ejemplo: un escalar es un número real simple como 2. Un vector es un segmento de recta que tiene dirección y magnitud. El vector $\left\langle \sqrt{3}, 1\right\rangle$, dado mediante sus componentes, tiene dirección $\pi/6$ y magnitud de 2.

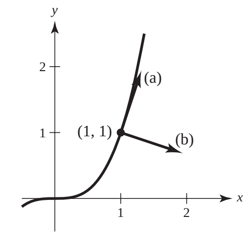
61. *a*) Vector; tiene magnitud y dirección
b) Escalar; sólo tiene magnitud

63. $a = 1, b = 1$ **65.** $a = 1, b = 2$ **67.** $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}$

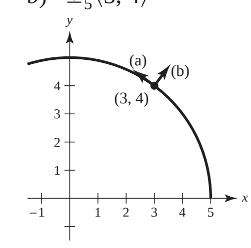
69. *a*) $\pm\left(1/\sqrt{37}\right)\langle 1, 6\rangle$
b) $\pm\left(1/\sqrt{37}\right)\langle 6, -1\rangle$



71. *a*) $\pm\left(1/\sqrt{10}\right)\langle 1, 3\rangle$
b) $\pm\left(1/\sqrt{10}\right)\langle 3, -1\rangle$



73. *a*) $\pm\frac{1}{5}\langle -4, 3\rangle$
b) $\pm\frac{1}{5}\langle 3, 4\rangle$



75. $\left\langle -\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2 \right\rangle$

77. *a*) a *c*) Las respuestas varían.
d) Magnitud ≈ 63.5, dirección $\approx -8.26°$

79. 1.33, 132.5° **81.** 10.7°, 584.6 lb **83.** 71.3°, 228.5 lb

85. *a*) $\theta = 0°$ *b*) $\theta = 180°$
c) No, la resultante sólo puede ser menor o igual que la suma.

87. $(-4, -1), (6, 5), (10, 3)$

89. Tensión en el cable $AC \approx 2\,638.2$ lb
Tensión en el cable $BC \approx 1\,958.1$ lb

91. Horizontal: 1 193.43 pies/s
Vertical: 125.43 pies/s

93. 38.3° noroeste
882.9 km/h

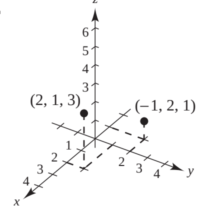
95. Verdadero **97.** Verdadero **99.** Falso. $\|a\mathbf{i} + b\mathbf{j}\| = \sqrt{2}|a|$

101–103. Demostraciones **105.** $x^2 + y^2 = 25$

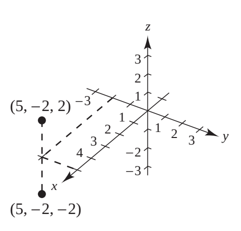
Sección 11.2 (página 780)

1. $A(2, 3, 4)$, $B(-1, -2, 2)$


3.



5.



7. $(-3, 4, 5)$ **9.** $(12, 0, 0)$ **11.** 0

13. Seis unidades arriba del plano *xy*

15. Tres unidades delante del plano *yz*

17. A la izquierda del plano *xz*

19. A menos de tres unidades del plano *xz*

21. Tres unidades debajo del plano *xy*, y debajo de ambos cuadrantes I y III

23. Arriba del plano *xy* y por arriba de los cuadrantes II y IV, o debajo del plano *xy* y debajo de los cuadrantes I y III

25. $\sqrt{69}$ **27.** $\sqrt{61}$ **29.** $7, 7\sqrt{5}, 14$; Triángulo rectángulo

31. $\sqrt{41}, \sqrt{41}, \sqrt{14}$; Triángulo isósceles

33. $(0, 0, 9), (2, 6, 12), (6, 4, -3)$

35. $\left(\frac{3}{2}, -3, 5\right)$ **37.** $(x - 0)^2 + (y - 2)^2 + (z - 5)^2 = 4$

39. $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 0)^2 = 10$

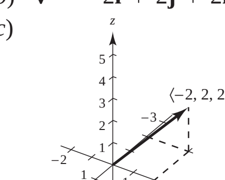
41. $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z + 4)^2 = 25$
Centro: $(1, -3, -4)$
Radio: 5

43. $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 1$
Centro: $\left(\frac{1}{3}, -1, 0\right)$
Radio: 1

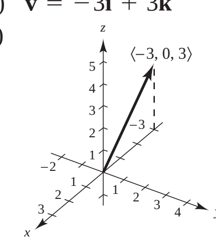
45. Una esfera sólida con centro en (0, 0, 0) y 6 de radio

47. Interior de una esfera con 4 de radio y centrada en (2, –3, 4)

49. *a*) $\langle -2, 2, 2\rangle$
b) $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
c)



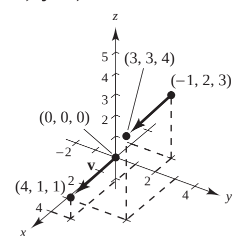
51. *a*) $\langle -3, 0, 3\rangle$
b) $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$
c)



53. $\mathbf{v} = \langle 1, -1, 6\rangle$
$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{38}$
$\mathbf{u} = \dfrac{1}{\sqrt{38}}\langle 1, -1, 6\rangle$

55. $\mathbf{v} = \langle -1, 0, -1\rangle$
$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2}$
$\mathbf{u} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\langle -1, 0, -1\rangle$

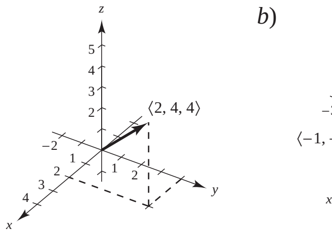
57. *a*) y *d*)



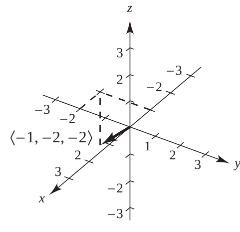
b) $\langle 4, 1, 1\rangle$ *c*) $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

59. $(3, 1, 8)$

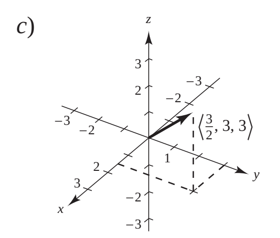
61. *a*)



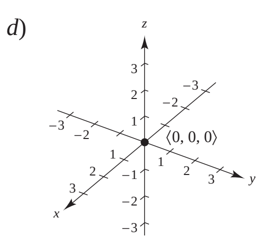
b)



c)



d)



63. $\langle -1, 0, 4\rangle$ **65.** $\langle 6, 12, 6\rangle$ **67.** $\left\langle \frac{7}{2}, 3, \frac{5}{2}\right\rangle$

69. *a* y *b* **71.** *a* **73.** Colineal **75.** No colineal

77. $\overrightarrow{AB} = \langle 1, 2, 3\rangle$
$\overrightarrow{CD} = \langle 1, 2, 3\rangle$
$\overrightarrow{BD} = \langle -2, 1, 1\rangle$
$\overrightarrow{AC} = \langle -2, 1, 1\rangle$
Porque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$, los puntos dados forman los vértices de un paralelogramo.

79. 0 **81.** $\sqrt{34}$ **83.** $\sqrt{14}$

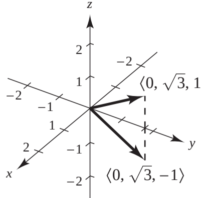
85. *a*) $\frac{1}{3}\langle 2, -1, 2\rangle$ *b*) $-\frac{1}{3}\langle 2, -1, 2\rangle$

87. *a*) $(1/\sqrt{38})\langle 3, 2, -5\rangle$ *b*) $-(1/\sqrt{38})\langle 3, 2, -5\rangle$

89. *a*) a *d*) Las respuestas varían.
e) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle 4, 7.5, -2\rangle$
$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \approx 8.732$
$\|\mathbf{u}\| \approx 5.099$
$\|\mathbf{v}\| \approx 9.014$

91. $\pm\frac{7}{3}$ **93.** $\langle 0, 10/\sqrt{2}, 10/\sqrt{2}\rangle$ **95.** $\langle 1, -1, \frac{1}{2}\rangle$

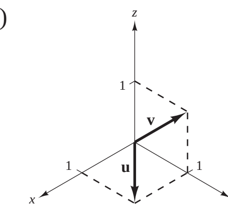
97. 



$\langle 0, \sqrt{3}, \pm 1\rangle$

99. $(2, -1, 2)$

101. *a*)



b) $a = 0, a + b = 0, b = 0$
c) $a = 1, a + b = 2, b = 1$
d) No es posible

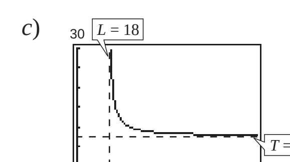
103. x_0 es la distancia dirigida al plano yz
y_0 es la distancia dirigida al plano xz
z_0 es la distancia dirigida al plano xy

105. $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$ **107.** 0

109. *a*) $T = 8L/\sqrt{L^2 - 18^2}, L > 18$
b)

L	20	25	30	35	40	45	50
T	18.4	11.5	10	9.3	9.0	8.7	8.6

c)



d) Demostración
e) 30 pulg

111. $(\sqrt{3}/3)\langle 1, 1, 1\rangle$

113. La tensión en el cable AB: 202.919 N
La tensión en el cable AC: 157.909 N
La tensión en el cable AD: 226.521 N

115. $(x - \frac{4}{3})^2 + (y - 3)^2 + (z + \frac{1}{3})^2 = \frac{44}{9}$

Sección 11.3 (página 789)

1. *a*) 17 *b*) 25 *c*) 25 *d*) $\langle -17, 85\rangle$ *e*) 34

3. *a*) -26 *b*) 52 *c*) 52 *d*) $\langle 78, -52\rangle$ *e*) -52

5. *a*) 2 *b*) 29 *c*) 29 *d*) $\langle 0, 12, 10\rangle$ *e*) 4

7. *a*) 1 *b*) 6 *c*) 6 *d*) $\mathbf{i} - \mathbf{k}$ *e*) 2

9. 20 **11.** $\pi/2$ **13.** $\arccos[-1/(5\sqrt{2})] \approx 98.1°$

15. $\arccos(\sqrt{2}/3) \approx 61.9°$ **17.** $\arccos(-8\sqrt{13}/65) \approx 116.3°$

19. Ni uno ni otro **21.** Ortogonal **23.** Ni uno ni otro

25. Ortogonal **27.** Triángulo rectángulo; las respuestas varían.

29. Triángulo agudo; las respuestas varían

31. $\cos\alpha = \frac{1}{3}$
$\cos\beta = \frac{2}{3}$
$\cos\gamma = \frac{2}{3}$

33. $\cos\alpha = 0$
$\cos\beta = 3/\sqrt{13}$
$\cos\gamma = -2/\sqrt{13}$

35. $\alpha \approx 43.3°, \beta \approx 61.0°, \gamma \approx 119.0°$

37. $\alpha \approx 100.5°, \beta \approx 24.1°, \gamma \approx 68.6°$

39. Magnitud: 124.310 lb
$\alpha \approx 29.48°, \beta \approx 61.39°, \gamma \approx 96.53°$

41. $\alpha = 90°, \beta = 45°, \gamma = 45°$ **43.** *a*) $\langle 2, 8\rangle$ *b*) $\langle 4, -1\rangle$

45. *a*) $\langle \frac{5}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ *b*) $\langle -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\rangle$ **47.** *a*) $\langle -2, 2, 2\rangle$ *b*) $\langle 2, 1, 1\rangle$

49. *a*) $\langle 0, \frac{33}{25}, \frac{44}{25}\rangle$ *b*) $\langle 2, -\frac{8}{25}, \frac{6}{25}\rangle$

51. Ver la “Definición de producto punto”, página 783.

53. *a*) y *b*) están definidas. *c*) y *d*) no están definidas porque no es posible encontrar el producto punto de un escalar y un vector o la suma de un escalar y un vector.

55. Ver figura 11.29 en la página 787.

57. Sí

$$\left\|\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}\right\| = \left\|\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u}\right\|$$
$$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|\frac{\|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|^2} = |\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}|\frac{\|\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|^2}$$
$$\frac{1}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|}$$
$$\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$$

59. \$12 351.25; ingreso total **61.** *a*) a *c*) Las respuestas varían

63. Las respuestas varían **65.** $\mathbf{u}$

67. Las respuestas varían. Ejemplo: $\langle 12, 2\rangle$ y $\langle -12, -2\rangle$

69. Las respuestas varían. Ejemplo: $\langle 2, 0, 3\rangle$ y $\langle -2, 0, -3\rangle$

71. *a*) 8 335.1 lb *b*) 47 270.8 lb

73. 425 pies-lb **75.** 2 900.2 km-N

77. Falso. Por ejemplo: $\langle 1, 1\rangle \cdot \langle 2, 3\rangle = 5$ y $\langle 1, 1\rangle \cdot \langle 1, 4\rangle = 5$, pero $\langle 2, 3\rangle \neq \langle 1, 4\rangle$.

79. $\arccos(1/\sqrt{3}) \approx 54.7°$

81. *a*) $(0, 0), (1, 1)$
b) Para $y = x^2$ en $(1, 1)$: $\langle \pm\sqrt{5}/5, \pm 2\sqrt{5}/5\rangle$
Para $y = x^{1/3}$ en $(1, 1)$: $\langle \pm 3\sqrt{10}/10, \pm\sqrt{10}/10\rangle$
Para $y = x^2$ en $(0, 0)$: $\langle \pm 1, 0\rangle$
Para $y = x^{1/3}$ en $(0, 0)$: $\langle 0, \pm 1\rangle$
c) En $(1, 1)$: $\theta = 45°$
En $(0, 0)$: $\theta = 90°$

83. *a*) $(-1, 0), (1, 0)$

b) Para $y = 1 - x^2$ en $(1, 0)$: $\langle \pm\sqrt{5}/5, \mp 2\sqrt{5}/5 \rangle$

Para $y = x^2 - 1$ en $(1, 0)$: $\langle \pm\sqrt{5}/5, \pm 2\sqrt{5}/5 \rangle$

Para $y = 1 - x^2$ en $(-1, 0)$: $\langle \pm\sqrt{5}/5, \pm 2\sqrt{5}/5 \rangle$

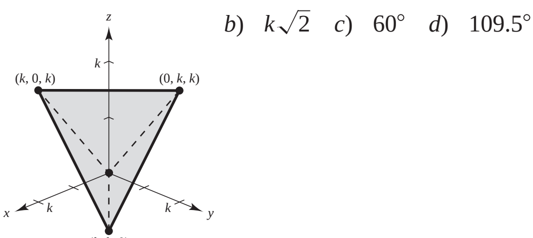
Para $y = x^2 - 1$ en $(-1, 0)$: $\langle \pm\sqrt{5}/5, \mp 2\sqrt{5}/5 \rangle$

c) En $(1, 0)$: $\theta = 53.13°$

En $(-1, 0)$: $\theta = 53.13°$

85. Demostración

87. *a*)

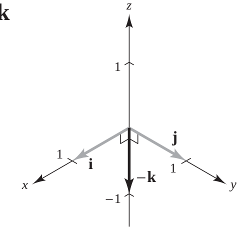


b) $k\sqrt{2}$ *c*) $60°$ *d*) $109.5°$

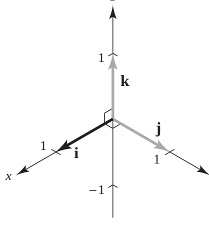
89 a 91. Demostraciones

Sección 11.4 (página 798)

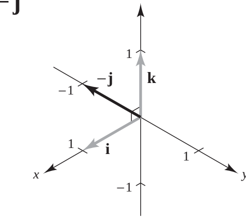
1. $-\mathbf{k}$



3. $\mathbf{i}$



5. $-\mathbf{j}$



7. *a*) $20\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 16\mathbf{k}$

b) $-20\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 16\mathbf{k}$

c) $\mathbf{0}$

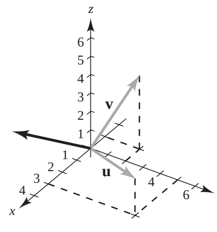
9. *a*) $17\mathbf{i} - 33\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$

b) $-17\mathbf{i} + 33\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$

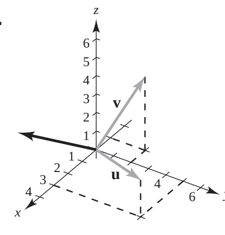
c) $\mathbf{0}$

11. $\langle 0, 0, 54 \rangle$ **13.** $\langle -1, -1, -1 \rangle$ **15.** $\langle -2, 3, -1 \rangle$

17.



19.



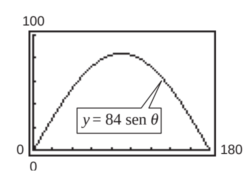
21. $\langle -73.5, 5.5, 44.75 \rangle, \left\langle -\frac{2.94}{\sqrt{11.8961}}, \frac{0.22}{\sqrt{11.8961}}, \frac{1.79}{\sqrt{11.8961}} \right\rangle$

23. $\langle -3.6, -1.4, 1.6 \rangle, \left\langle -\frac{1.8}{\sqrt{4.37}}, -\frac{0.7}{\sqrt{4.37}}, \frac{0.8}{\sqrt{4.37}} \right\rangle$

25. Las respuestas varían **27.** 1 **29.** $6\sqrt{5}$ **31.** $9\sqrt{5}$

33. $\frac{11}{2}$ **35.** $\frac{\sqrt{16\,742}}{2}$ **37.** $10 \cos 40° \approx 7.66$ pies-lb

39. *a*) $84 \text{ sen } \theta$



b) $42\sqrt{2} \approx 59.40$

c) $\theta = 90°$; que es lo que debería esperarse. Cuando $\theta = 90°$, la llave inglesa está horizontal

41. 1 **43.** 6 **45.** 2 **47.** 75

49. Al menos uno de los vectores es el vector cero.

51. Ver la “Definición del producto cruz de dos vectores en el espacio”, página 792.

53. La magnitud del producto cruz aumentará en un factor de 4.

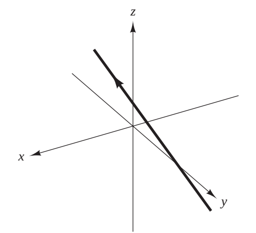
55. Falso. El producto cruz de dos vectores no está definido en un sistema de coordenadas bidimensional.

57. Falso. Sea $\mathbf{u} = \langle 1, 0, 0 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, 0, 0 \rangle$ y $\mathbf{w} = \langle -1, 0, 0 \rangle$. Entonces $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$, excepto $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$.

59 a 67. Demostraciones

Sección 11.5 (página 807)

1. *a*)



b) $P = (1, 2, 2)$, $Q = (10, -1, 17)$, $\overrightarrow{PQ} = \langle 9, -3, 15 \rangle$

(Hay muchas respuestas correctas.) Los componentes del vector y los coeficientes de t son proporcionales porque la recta es paralela a $\overrightarrow{PQ}$.

c) $\left(-\frac{1}{5}, \frac{12}{5}, 0\right), (7, 0, 12), \left(0, \frac{7}{3}, \frac{1}{3}\right)$

3. *a*) Sí *b*) No

	Ecuaciones paramétricas (*a*)	*Ecuaciones simétricas* (*b*)	*Números directores*
5.	$x = 3t$, $y = t$, $z = 5t$	$\frac{x}{3} = y = \frac{z}{5}$	3, 1, 5
7.	$x = -2 + 2t$, $y = 4t$, $z = 3 - 2t$	$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z-3}{-2}$	2, 4, −2
9.	$x = 1 + 3t$, $y = -2t$, $z = 1 + t$	$\frac{x-1}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{1}$	3, −2, 1

	Ecuaciones paramétricas (*a*)	*Ecuaciones simétricas* (*b*)	*Números directores*
11.	$x = 5 + 17t$ $y = -3 - 11t$ $z = -2 - 9t$	$\frac{x-5}{17} = \frac{y+3}{-11} = \frac{z+2}{-9}$	$17, -11, -9$
13.	$x = 7 - 10t$ $y = -2 + 2t$ $z = 6$	No es posible.	$-10, 2, 0$

15. $x = 2$, $y = 3$, $z = 4 + t$ **17.** $x = 2 + 3t$, $y = 3 + 2t$, $z = 4 - t$ **19.** $x = 5 + 2t$, $y = -3 - t$, $z = -4 + 3t$

21. $x = 2 - t$, $y = 1 + t$, $z = 2 + t$

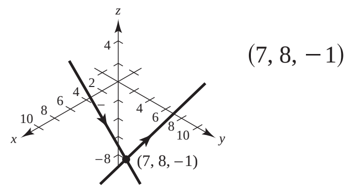
23. $P(3, -1, -2)$; $\mathbf{v} = \langle -1, 2, 0\rangle$

25. $P(7, -6, -2)$; $\mathbf{v} = \langle 4, 2, 1\rangle$

27. $L_1 = L_2$ y es paralela a L_3. **29.** L_1 y L_3 son idénticas.

31. $(2, 3, 1)$; $\cos\theta = 7\sqrt{17}/51$ **33.** No se cortan.

35.



$(7, 8, -1)$

37. *a*) $P = (0, 0, -1)$, $Q = (0, -2, 0)$, $R = (3, 4, -1)$
$\overrightarrow{PQ} = \langle 0, -2, 1\rangle$, $\overrightarrow{PR} = \langle 3, 4, 0\rangle$
(Hay muchas respuestas correctas.)

b) $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \langle -4, 3, 6\rangle$
Las componentes del producto cruz son proporcionales a los coeficientes de las variables en la ecuación. El producto cruz es paralelo al vector normal.

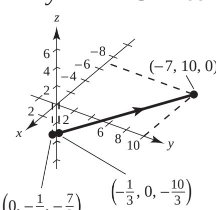
39. *a*) Sí *b*) Sí **41.** $y - 3 = 0$

43. $2x + 3y - z = 10$ **45.** $2x - y - 2z + 6 = 0$

47. $3x - 19y - 2z = 0$ **49.** $4x - 3y + 4z = 10$ **51.** $z = 3$

53. $x + y + z = 5$ **55.** $7x + y - 11z = 5$ **57.** $y - z = -1$

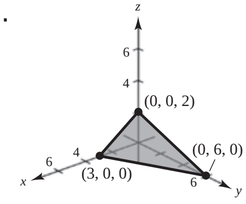
59.



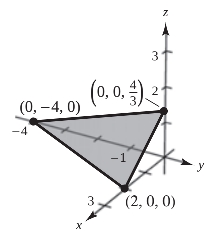
61. $x - z = 0$ **63.** $9x - 3y + 2z - 21 = 0$

65. Ortogonal **67.** Ni uno ni otro; $83.5°$ **69.** Paralelo

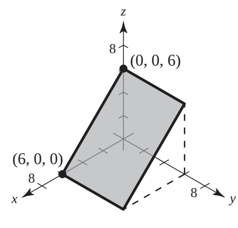
71.



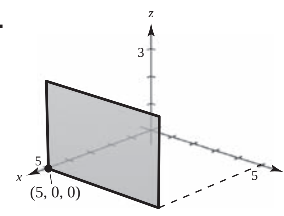
73.



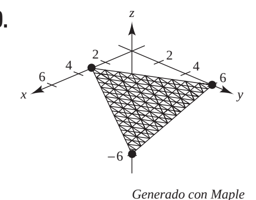
75.



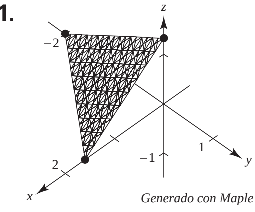
77.



79.



81.



83. P_1 y P_2 son paralelos. **85.** $P_1 = P_4$ y es paralelo a P_2.

87. Los planos tienen intersecciones en $(c, 0, 0)$, $(0, c, 0)$ y $(0, 0, c)$ para cada valor de c.

89. Si $c = 0$, $z = 0$ es el plano xy; si $c \neq 0$, el plano es paralelo al eje x y pasa a través de los puntos $(0, 0, 0)$ y $(0, 1, -c)$

91. *a*) $\theta \approx 65.91°$
b) $x = 2$, $y = 1 + t$, $z = 1 + 2t$

93. $(2, -3, 2)$; La recta no se encuentra en el plano.

95. No se cortan **97.** $6\sqrt{14}/7$ **99.** $11\sqrt{6}/6$

101. $2\sqrt{26}/13$ **103.** $27\sqrt{94}/188$ **105.** $\sqrt{2\,533}/17$

107. $7\sqrt{3}/3$ **109.** $\sqrt{66}/3$

111. Ecuaciones paramétricas: $x = x_1 + at$, $y = y_1 + bt$ y $z = z_1 + ct$
Ecuaciones simétricas: $\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$
Se necesita un vector $\mathbf{v} = \langle a, b, c\rangle$ paralelo a la recta y un punto $P(x_1, y_1, z_1)$ en la recta.

113. Resolver simultáneamente las dos ecuaciones lineales que representan los planos y sustituir los valores en una de las ecuaciones originales. Después elegir un valor para t y dar las ecuaciones paramétricas correspondientes a la recta de intersección.

115. *a*) Paralelos si el vector $\langle a_1, b_1, c_1\rangle$ es un múltiplo escalar de $\langle a_2, b_2, c_2\rangle$; $\theta = 0$.
b) Perpendicular si $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$; $\theta = \pi/2$.

117. $cbx + acy + abz = abc$

119. Esfera: $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 5)^2 = 16$

121. *a*)

Año	1999	2000	2001	2002
***z* (aprox.)**	6.25	6.05	5.94	5.76

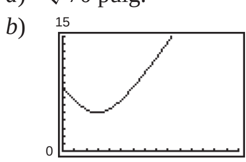
Año	2003	2004	2005
***z* (aprox.)**	5.66	5.56	5.56

Las aproximaciones están más próximas a los valores actuales.

b) Las respuestas varían.

123. *a*) $\sqrt{70}$ pulg.

b)



c) La distancia nunca es cero.

d) 5 pulg.

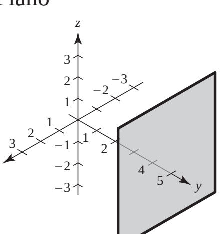
125. $\left(\frac{77}{13}, \frac{48}{13}, -\frac{23}{13}\right)$ **127.** $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}, \frac{1}{4}\right)$ **129.** Verdadero **131.** Verdadero

133. Falso. El plano $7x + y - 11z = 5$ y el plano $5x + 2y - 4z = 1$ son perpendiculares al plano $2x - 3y + z = 3$ pero no son paralelos.

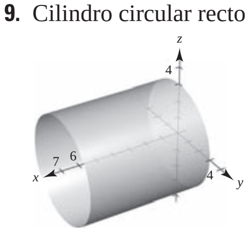
Sección 11.6 (página 820)

1. *c* **2.** *e* **3.** *f* **4.** *b* **5.** *d* **6.** *a*

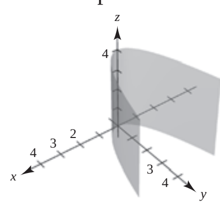
7. Plano



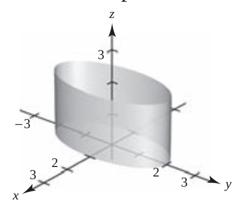
9. Cilindro circular recto



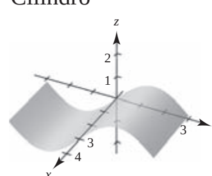
11. Cilindro parabólico



13. Cilindro elíptico

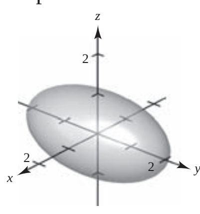


15. Cilindro

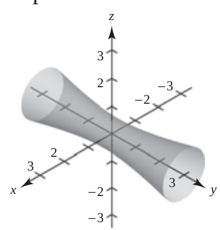


17. *a*) (20, 0, 0)
b) (10, 10, 20)
c) (0, 0, 20)
d) (0, 20, 0)

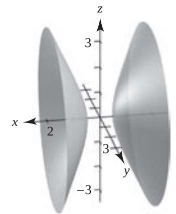
19. Elipsoide



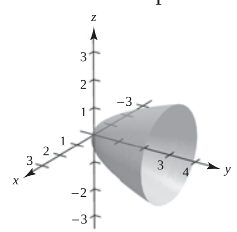
21. Hiperboloide de una hoja



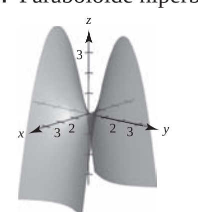
23. Hiperboloide de dos hojas



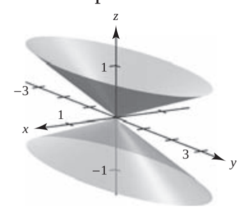
25. Paraboloide elíptico



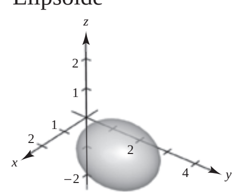
27. Paraboloide hiperbólico



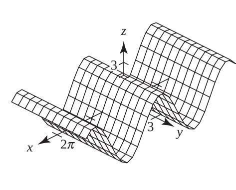
29. Cono elíptico



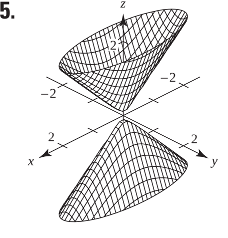
31. Elipsoide



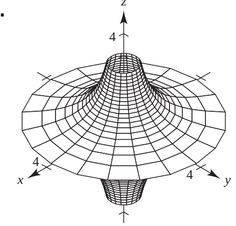
33.



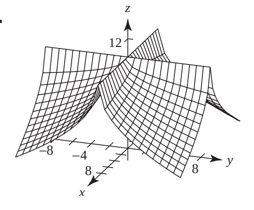
35.



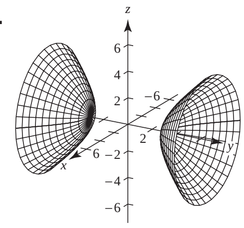
37.



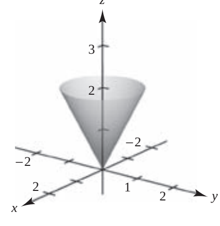
39.



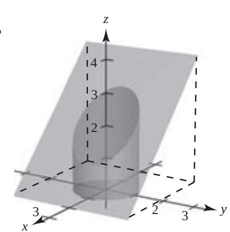
41.

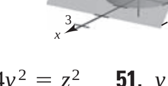


43.



45.





47. $x^2 + z^2 = 4y$ **49.** $4x^2 + 4y^2 = z^2$ **51.** $y^2 + z^2 = 4/x^2$

53. $y = \sqrt{2z}$ $\left(\text{o } x = \sqrt{2z}\right)$

55. Sea *C* una curva plana y sea *L* una recta no contenida en un plano paralelo. Al conjunto de todas las rectas paralelas a *L* y que cortan a *C* se le llama un cilindro. *C* es llamada la curva directriz del cilindro, y las rectas paralelas se llaman rectas generatrices.

57. Ver páginas 814 y 815. **59.** $128\pi/3$

61. *a*) Eje mayor: $4\sqrt{2}$
Eje menor: 4
Focos: $(0, \pm 2, 2)$

b) Eje mayor: $8\sqrt{2}$
Eje menor: 8
Focos: $(0, \pm 4, 8)$

63. $x^2 + z^2 = 8y$; Paraboloide elíptico

65. $x^2/3\,963^2 + y^2/3\,963^2 + z^2/3\,950^2 = 1$

67. $x = at, y = -bt, z = 0$;
$x = at, y = bt + ab^2, z = 2abt + a^2b^2$

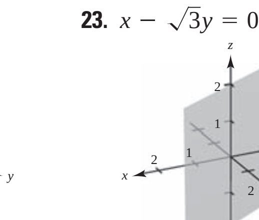
69. Verdadero

71. Falso. Una traza de una elipsoide puede ser un único punto.

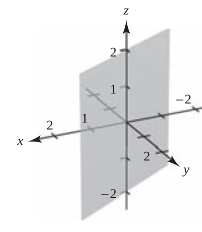
73. La botella de Klein no tiene un interior ni un exterior. Se forma insertando el extremo delgado abierto a través del costado de la botella y uniéndolo a la base de la botella.

Sección 11.7 (página 827)

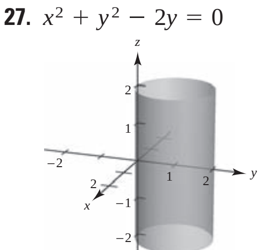
1. $(-7, 0, 5)$ **3.** $(3\sqrt{2}/2, 3\sqrt{2}/2, 1)$ **5.** $(-2\sqrt{3}, -2, 3)$
7. $(5, \pi/2, 1)$ **9.** $(2\sqrt{2}, -\pi/4, -4)$ **11.** $(2, \pi/3, 4)$
13. $z = 4$ **15.** $r^2 + z^2 = 17$ **17.** $r = \sec\theta \tan\theta$
19. $r^2 \operatorname{sen}^2\theta = 10 - z^2$
21. $x^2 + y^2 = 9$



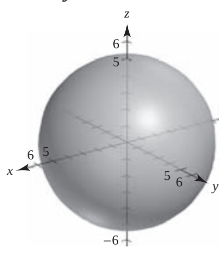
23. $x - \sqrt{3}y = 0$



25. $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ **27.** $x^2 + y^2 - 2y = 0$

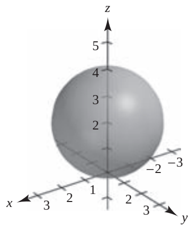


29. $(4, 0, \pi/2)$ **31.** $(4\sqrt{2}, 2\pi/3, \pi/4)$ **33.** $(4, \pi/6, \pi/6)$
35. $(\sqrt{6}, \sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ **37.** $(0, 0, 12)$ **39.** $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, -5\sqrt{2}/2)$
41. $\rho = 2\csc\phi\csc\theta$ **43.** $\rho = 7$
45. $\rho = 4\csc\phi$ **47.** $\tan^2\phi = 2$
49. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

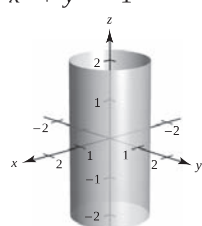


51. $3x^2 + 3y^2 - z^2 = 0$

53. $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$



55. $x^2 + y^2 = 1$



57. $(4, \pi/4, \pi/2)$ **59.** $(4\sqrt{2}, \pi/2, \pi/4)$
61. $(2\sqrt{13}, -\pi/6, \arccos[3/\sqrt{13}])$ **63.** $(13, \pi, \arccos[5/13])$
65. $(10, \pi/6, 0)$ **67.** $(36, \pi, 0)$
69. $(3\sqrt{3}, -\pi/6, 3)$ **71.** $(4, 7\pi/6, 4\sqrt{3})$

	Rectangulares	*Cilíndricas*	*Esféricas*
73.	$(4, 6, 3)$	$(7.211, 0.983, 3)$	$(7.810, 0.983, 1.177)$
75.	$(4.698, 1.710, 8)$	$(5, \pi/9, 8)$	$(9.434, 0.349, 0.559)$
77.	$(-7.071, 12.247, 14.142)$	$(14.142, 2.094, 14.142)$	$(20, 2\pi/3, \pi/4)$
79.	$(3, -2, 2)$	$(3.606, -0.588, 2)$	$(4.123, -0.588, 1.064)$
81.	$(\frac{5}{2}, \frac{4}{3}, -\frac{3}{2})$	$(2.833, 0.490, -1.5)$	$(3.206, 0.490, 2.058)$
83.	$(-3.536, 3.536, -5)$	$(5, 3\pi/4, -5)$	$(7.071, 2.356, 2.356)$
85.	$(2.804, -2.095, 6)$	$(-3.5, 2.5, 6)$	$(6.946, 5.642, 0.528)$
87.	$(-1.837, 1.837, 1.5)$	$(2.598, 2.356, 1.5)$	$(3, 3\pi/4, \pi/3)$

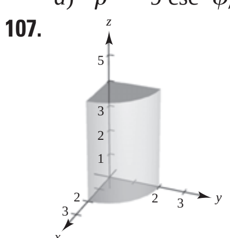
89. *d* **90.** *e* **91.** *c* **92.** *a* **93.** *f* **94.** *b*

95. Rectangulares a cilíndricas:
$r^2 = x^2 + y^2, \tan\theta = y/x, z = z$
Cilíndricas a rectangulares:
$x = r\cos\theta, y = r\operatorname{sen}\theta, z = z$

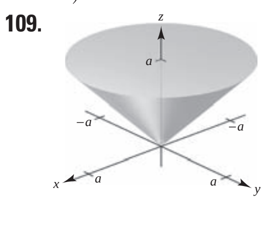
97. Rectangulares a esféricas:
$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \tan\theta = y/x, \phi = \arccos(z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$
Esféricas a rectangulares:
$x = \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta, y = \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, z = \rho\cos\phi$

99. *a*) $r^2 + z^2 = 25$ *b*) $\rho = 5$
101. *a*) $r^2 + (z - 1)^2 = 1$ *b*) $\rho = 2\cos\phi$
103. *a*) $r = 4\operatorname{sen}\theta$ *b*) $\rho = 4\operatorname{sen}\theta/\operatorname{sen}\phi = 4\operatorname{sen}\theta\csc\phi$
105. *a*) $r^2 = 9/(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$
a) $\rho^2 = 9\csc^2\phi/(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$

107.

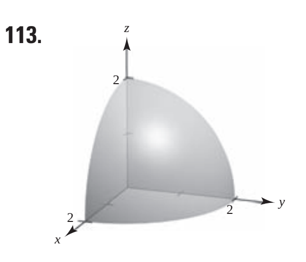


109.



111.

113.



115. Rectangulares: $0 \le x \le 10$
$0 \le y \le 10$
$0 \le z \le 10$

117. Esféricas: $4 \le \rho \le 6$

119. Cilíndricas: $r^2 + z^2 \le 9, r \le 3\cos\theta, 0 \le \theta \le \pi$
121. Falso. $r = z$ representa un cono.
123. Falso. Ver página 823. **125.** Elipse

Ejercicios de repaso para el capítulo 11 (página 829)

1. *a*) $\mathbf{u} = \langle 3, -1\rangle$ *b*) $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$ *c*) $2\sqrt{5}$ *d*) $10\mathbf{i}$
$\mathbf{v} = \langle 4, 2\rangle$
3. $\mathbf{v} = \langle 4, 4\sqrt{3}\rangle$ **5.** $(-5, 4, 0)$

7. Arriba del plano *xy* y a la derecha del plano *xz* o debajo del plano *xy* y a la izquierda del plano *xz*.

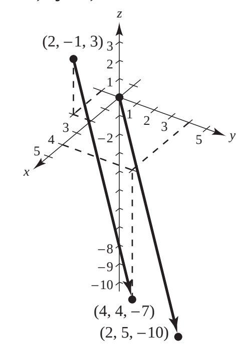
9. $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-6)^2=\frac{225}{4}$

11. $(x-2)^2+(y-3)^2+z^2=9$

Centro: $(2, 3, 0)$

Radio: 3

13. *a*) y *d*) *b*) $\mathbf{u}=\langle 2, 5, -10\rangle$ *c*) $\mathbf{u}=2\mathbf{i}+5\mathbf{j}-10\mathbf{k}$



15. Colineales **17.** $(1/\sqrt{38})\langle 2, 3, 5\rangle$

19. *a*) $\mathbf{u}=\langle -1, 4, 0\rangle, \mathbf{v}=\langle -3, 0, 6\rangle$ *b*) 3 *c*) 45

21. Ortogonales **23.** $\theta=\arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)=15^\circ$ **25.** π

27. Las respuestas varían. Ejemplo: $\langle -6, 5, 0\rangle, \langle 6, -5, 0\rangle$

29. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=14=\|\mathbf{u}\|^2$ **31.** $\left\langle -\frac{15}{14}, \frac{5}{7}, -\frac{5}{14}\right\rangle$

33. $(1/\sqrt{5})(-2\mathbf{i}-\mathbf{j})$ o $(1/\sqrt{5})(2\mathbf{i}+\mathbf{j})$

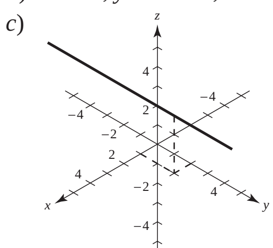
35. 4 **37.** $\sqrt{285}$ **39.** $100\sec 20^\circ\approx 106.4$ lb

41. *a*) $x=3+6t, y=11t, z=2+4t$

b) $(x-3)/6=y/11=(z-2)/4$

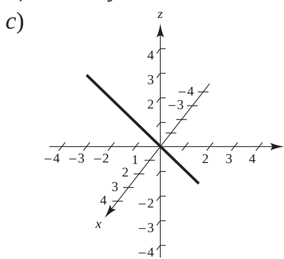
43. *a*) $x=1, y=2+t, z=3$ *b*) Ninguno

c)

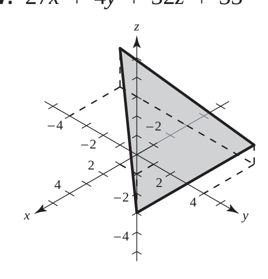


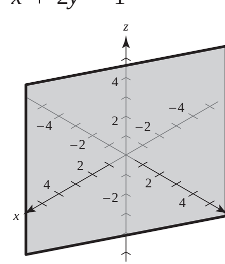
45. *a*) $x=t, y=-1+t, z=1$ *b*) $x=y+1, z=1$

c)



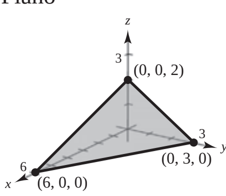
47. $27x+4y+32z+33=0$ **49.** $x+2y=1$



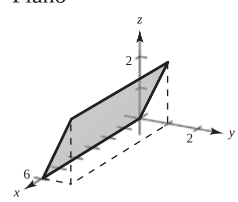


51. $\frac{8}{7}$ **53.** $\sqrt{35}/7$

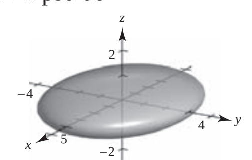
55. Plano



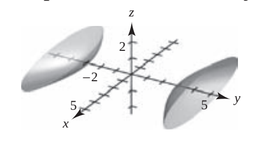
57. Plano



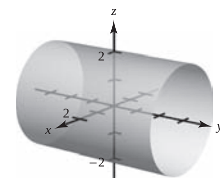
59. Elipsoide



61. Hiperboloide de dos hojas



63. Cilindro



65. Sea $y=2\sqrt{x}$ y girar alrededor del eje *x*.

67. $x^2+z^2=2y$

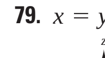
69. *a*) $(4, 3\pi/4, 2)$ *b*) $\left(2\sqrt{5}, 3\pi/4, \arccos\left[\sqrt{5}/5\right]\right)$

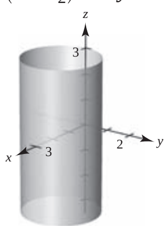
71. $\left(50\sqrt{5}, -\pi/6, \arccos\left[1/\sqrt{5}\right]\right)$

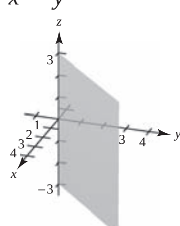
73. $\left(25\sqrt{2}/2, -\pi/4, -25\sqrt{2}/2\right)$

75. *a*) $r^2\cos 2\theta=2z$ *b*) $\rho=2\sec 2\theta\cos\phi\csc^2\phi$

77. $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\frac{25}{4}$ **79.** $x=y$







SP Solución de problemas (página 831)

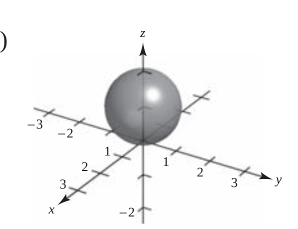
1–3. Demostraciones **5.** *a*) $3\sqrt{2}/2\approx 2.12$ *b*) $\sqrt{5}\approx 2.24$

7. *a*) $\pi/2$ *b*) $\frac{1}{2}(\pi abk)k$

c) $V=\frac{1}{2}(\pi ab)k^2$

$V=\frac{1}{2}$(área de la base) altura

9. *a*) *b*)



11. Demostración

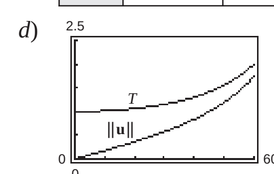
13. *a*) Tensión: $2\sqrt{3}/3 \approx 1.1547$ lb
Magnitud de $\mathbf{u}$: $\sqrt{3}/3 \approx 0.5774$ lb

b) $T = \sec\theta$; $\|\mathbf{u}\| = \tan\theta$; Dominio: $0° \le \theta \le 90°$

c)

θ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
T	1	1.0154	1.0642	1.1547	1.3054	1.5557	2
$\|\mathbf{u}\|$	0	0.1763	0.3640	0.5774	0.8391	1.1918	1.7321

d)



e) Ambas son funciones crecientes.

f) $\lim_{\theta\to\pi/2^-} T = \infty$ y $\lim_{\theta\to\pi/2^-} \|\mathbf{u}\| = \infty$
Sí. Cuando θ aumenta, también aumentan T y $\|\mathbf{u}\|$.

15. $\langle 0, 0, \cos\alpha \operatorname{sen}\beta - \cos\beta \operatorname{sen}\alpha\rangle$; demostración

17. $D = \dfrac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}$
$= \dfrac{|\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})|}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|} = \dfrac{|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|} = \dfrac{|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|}$

19. Demostración

Capítulo 12

Sección 12.1 (página 839)

1. $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ **3.** $(0, \infty)$

5. $[0, \infty)$ **7.** $(-\infty, \infty)$

9. *a*) $\frac{1}{2}\mathbf{i}$ *b*) $\mathbf{j}$ *c*) $\frac{1}{2}(s+1)^2\mathbf{i} - s\mathbf{j}$ *d*) $\frac{1}{2}\Delta t(\Delta t + 4)\mathbf{i} - \Delta t\mathbf{j}$

11. *a*) $\ln 2\mathbf{i} + \dfrac{1}{2}\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ *b*) No es posible

c) $\ln(t-4)\mathbf{i} + \dfrac{1}{t-4}\mathbf{j} + 3(t-4)\mathbf{k}$

d) $\ln(1+\Delta t)\mathbf{i} - \dfrac{\Delta t}{1+\Delta t}\mathbf{j} + 3\Delta t\mathbf{k}$

13. $\sqrt{t(1+25t)}$

15. $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$
$x = 3t,\ y = t,\ z = 2t$

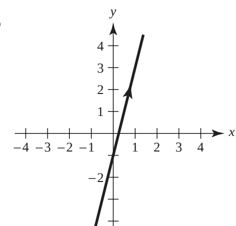
17. $\mathbf{r}(t) = (-2+t)\mathbf{i} + (5-t)\mathbf{j} + (-3+12t)\mathbf{k}$
$x = -2+t,\ y = 5-t,\ z = -3+12t$

19. $t^2(5t-1)$; No, el producto punto es un escalar.

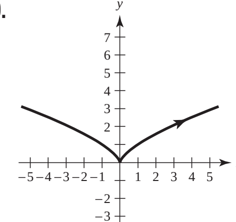
21. *b* **22.** *c* **23.** *d* **24.** *a*

25. *a*) $(-20, 0, 0)$ *b*) $(10, 20, 10)$
c) $(0, 0, 20)$ *d*) $(20, 0, 0)$

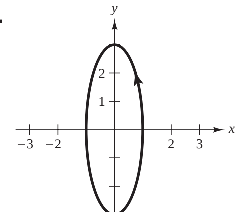
27.



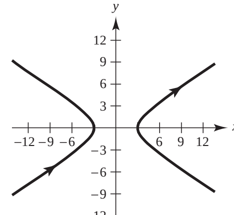
29.



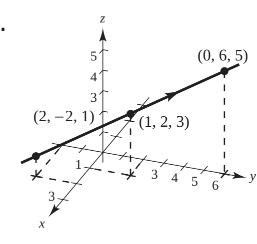
31.



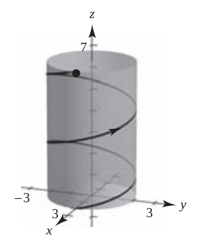
33.



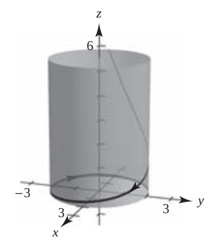
35.



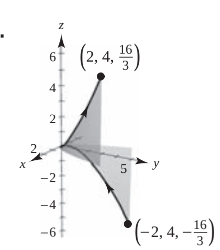
37.



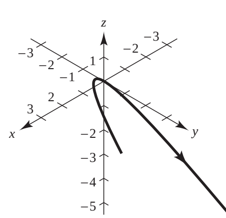
39.



41.

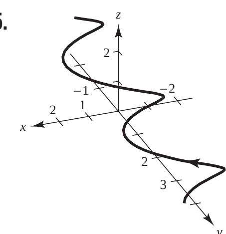


43.



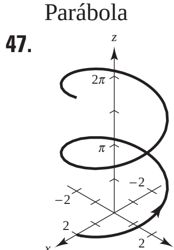
Parábola

45.



Hélice

47.

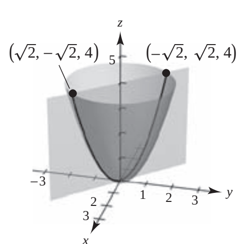


a) La hélice se traslada hacia atrás sobre el eje *x*.
b) La altura de la hélice aumenta a mayor velocidad.
c) La orientación de la gráfica se invierte.
d) El eje de la hélice es el eje *x*.
e) El radio de la hélice aumenta de 2 a 6.

49 a 55. Las respuestas varían.

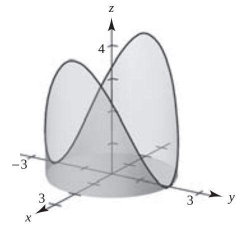
57. Las respuestas varían. Ejemplo de respuesta:
$\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 2$
$\mathbf{r}_2(t) = (2-t)\mathbf{i} + 4\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 2$
$\mathbf{r}_3(t) = (4-t)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 4$

59.



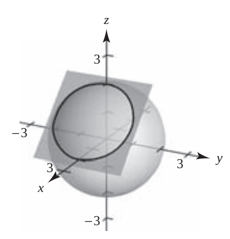
$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} - t\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}$

61.



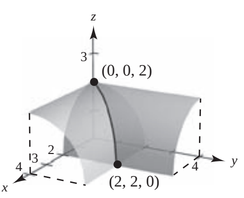
$\mathbf{r}(t) = 2 \operatorname{sen} t\mathbf{i} + 2 \cos t\mathbf{j} + 4 \operatorname{sen}^2 t\mathbf{k}$

63.



$\mathbf{r}(t) = (1 + \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + \sqrt{2} \cos t\mathbf{j} + (1 - \operatorname{sen} t)\mathbf{k}$ y
$\mathbf{r}(t) = (1 + \operatorname{sen} t)\mathbf{i} - \sqrt{2} \cos t\mathbf{j} + (1 - \operatorname{sen} t)\mathbf{k}$

65.

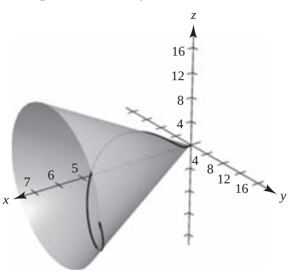


$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \sqrt{4 - t^2}\mathbf{k}$

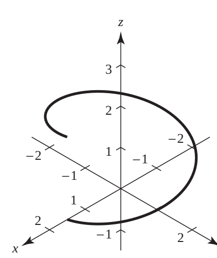
67. Sea $x = t, y = 2t \cos t$ y $z = 2t \operatorname{sen} t$. Entonces

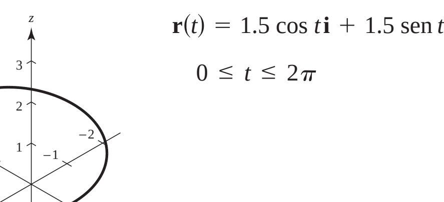
$$y^2 + z^2 = (2t \cos t)^2 + (2t \operatorname{sen} t)^2 = 4t^2 \cos^2 t + 4t^2 \operatorname{sen}^2 t$$
$$= 4t^2(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) = 4t^2.$$

Porque $x = t, y^2 + z^2 = 4x^2$.



69. $\pi\mathbf{i} - \mathbf{j}$ **71.** $\mathbf{0}$ **73.** $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
75. $(-\infty, 0), (0, \infty)$ **77.** $[-1, 1]$
79. $(-\pi/2 + n\pi, \pi/2 + n\pi)$, n es un entero.
81. *a*) $\mathbf{s}(t) = t^2\mathbf{i} + (t - 3)\mathbf{j} + (t + 3)\mathbf{k}$
b) $\mathbf{s}(t) = (t^2 - 2)\mathbf{i} + (t - 3)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$
c) $\mathbf{s}(t) = t^2\mathbf{i} + (t + 2)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$
83. Las respuestas varían. Ejemplo de respuesta:



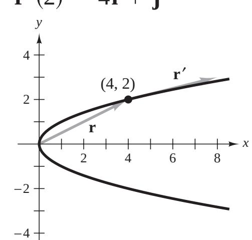


$\mathbf{r}(t) = 1.5 \cos t\mathbf{i} + 1.5 \operatorname{sen} t\mathbf{j} + \frac{1}{\pi}t\mathbf{k},$
$0 \le t \le 2\pi$

85 a 87. Demostraciones **89.** Sí; sí **91.** No necesariamente
93. Verdadero **95.** Verdadero

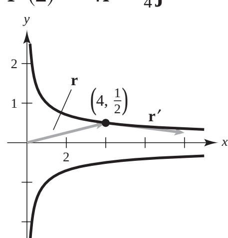
Sección 12.2 (página 848)

1. $\mathbf{r}(2) = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
$\mathbf{r}'(2) = 4\mathbf{i} + \mathbf{j}$



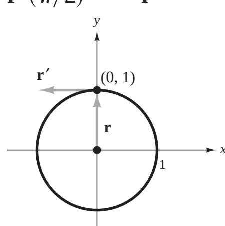
$\mathbf{r}'(t_0)$ es tangente a la curva en t_0.

3. $\mathbf{r}(2) = 4\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$
$\mathbf{r}'(2) = 4\mathbf{i} - \frac{1}{4}\mathbf{j}$



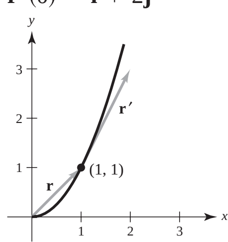
$\mathbf{r}'(t_0)$ es tangente a la curva en t_0.

5. $\mathbf{r}(\pi/2) = \mathbf{j}$
$\mathbf{r}'(\pi/2) = -\mathbf{i}$



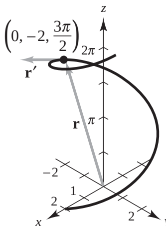
$\mathbf{r}'(t_0)$ es tangente a la curva en t_0.

7. $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$
$\mathbf{r}'(0) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$



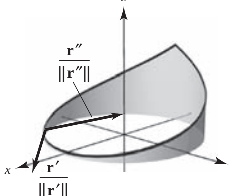
$\mathbf{r}'(t_0)$ es tangente a la curva en t_0.

9. $\mathbf{r}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2\mathbf{j} + \left(\frac{3\pi}{2}\right)\mathbf{k}$
$\mathbf{r}'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2\mathbf{i} + \mathbf{k}$



11. $3t^2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ **13.** $-2 \operatorname{sen} t\mathbf{i} + 5 \cos t\mathbf{j}$
15. $6\mathbf{i} - 14t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$ **17.** $-3a \operatorname{sen} t \cos^2 t\mathbf{i} + 3a \operatorname{sen}^2 t \cos t\mathbf{j}$
19. $-e^{-t}\mathbf{i} + (5te^t + 5e^t)\mathbf{k}$
21. $\langle \operatorname{sen} t + t \cos t, \cos t - t \operatorname{sen} t, 1\rangle$
23. *a*) $3t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j}$ *b*) $6t\mathbf{i} + \mathbf{j}$ *c*) $18t^3 + t$
25. *a*) $-4 \operatorname{sen} t\mathbf{i} + 4 \cos t\mathbf{j}$ *b*) $-4 \cos t\mathbf{i} - 4 \operatorname{sen} t\mathbf{j}$ *c*) 0
27. *a*) $t\mathbf{i} - \mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}$ *b*) $\mathbf{i} + t\mathbf{k}$ *c*) $t^3/2 + t$
29. *a*) $\langle t \cos t, t \operatorname{sen} t, 1\rangle$
b) $\langle \cos t - t \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t + t \cos t, 0\rangle$ *c*) t
31. $\dfrac{\mathbf{r}'(-1/4)}{\|\mathbf{r}'(-1/4)\|} = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi^2 + 1}}\left(\sqrt{2}\pi\mathbf{i} + \sqrt{2}\pi\mathbf{j} - \mathbf{k}\right)$

$\dfrac{\mathbf{r}''(-1/4)}{\|\mathbf{r}''(-1/4)\|} = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi^4 + 4}}\left(-\sqrt{2}\pi^2\mathbf{i} + \sqrt{2}\pi^2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}\right)$



33. $(-\infty, 0), (0, \infty)$ **35.** $(n\pi/2, (n+1)\pi/2)$

37. $(-\infty, \infty)$ **39.** $(-\infty, 0), (0, \infty)$

41. $(-\pi/2 + n\pi, \pi/2 + n\pi)$, n es un entero.

43. *a*) $\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$ *b*) $2\mathbf{k}$ *c*) $8t + 9t^2 + 5t^4$

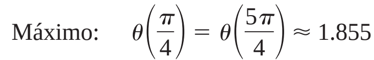
d) $-\mathbf{i} + (9 - 2t)\mathbf{j} + (6t - 3t^2)\mathbf{k}$

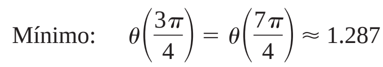
e) $8t^3\mathbf{i} + (12t^2 - 4t^3)\mathbf{j} + (3t^2 - 24t)\mathbf{k}$

f) $(10 + 2t^2)/\sqrt{10 + t^2}$

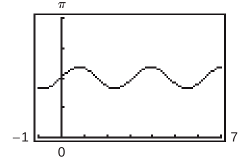
45. *a*) $7t^6$ *b*) $12t^5\mathbf{i} - 5t^4\mathbf{j}$

47. $\theta(t) = \arccos\left(\dfrac{-7 \operatorname{sen} t \cos t}{\sqrt{9 \operatorname{sen}^2 t + 16\cos^2 t}\,\sqrt{9\cos^2 t + 16 \operatorname{sen}^2 t}}\right)$


Máximo: $\theta\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \theta\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) \approx 1.855$


Mínimo: $\theta\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \theta\left(\dfrac{7\pi}{4}\right) \approx 1.287$

Ortogonal: $\dfrac{n\pi}{2}$, n es un entero.



49. $\mathbf{r}'(t) = 3\mathbf{i} - 2t\mathbf{j}$ **51.** $\mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$

53. $t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k} + \mathbf{C}$ **55.** $\ln t\mathbf{i} + t\mathbf{j} - \frac{2}{5}t^{5/2}\mathbf{k} + \mathbf{C}$

57. $(t^2 - t)\mathbf{i} + t^4\mathbf{j} + 2t^{3/2}\mathbf{k} + \mathbf{C}$

59. $\tan t\mathbf{i} + \arctan t\mathbf{j} + \mathbf{C}$ **61.** $4\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} - \mathbf{k}$

63. $a\mathbf{i} + a\mathbf{j} + (\pi/2)\mathbf{k}$

65. $2\mathbf{i} + (e^2 - 1)\mathbf{j} - (e^2 + 1)\mathbf{k}$

67. $2e^{2t}\mathbf{i} + 3(e^t - 1)\mathbf{j}$ **69.** $600\sqrt{3}t\mathbf{i} + (-16t^2 + 600t)\mathbf{j}$

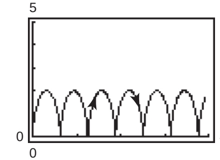
71. $((2 - e^{-t^2})/2)\mathbf{i} + (e^{-t} - 2)\mathbf{j} + (t + 1)\mathbf{k}$

73. Ver la “Definición de la derivada de una función vectorial” y la figura 12.8 en la página 842.

75. Las tres componentes de $\mathbf{u}$ son funciones crecientes de t en $t = t_0$.

77 a 83. Demostraciones


85. *a*)



La curva es una cicloide.

b) El máximo de $\|\mathbf{r}'\|$ es 2; el mínimo de $\|\mathbf{r}'\|$ es 0. El máximo y el mínimo de $\|\mathbf{r}''\|$ es 1.

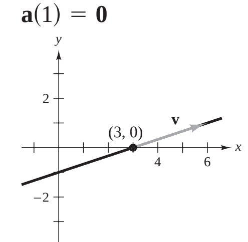
87. Demostración **89.** Verdadero

91. Falso: Sea $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + \mathbf{k}$, entonces $d/dt[\|\mathbf{r}(t)\|] = 0$, pero $\|\mathbf{r}'(t)\| = 1$.

Sección 12.3 (página 856)

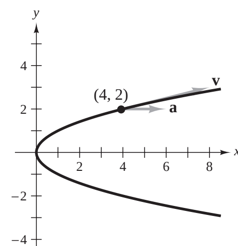
1. $\mathbf{v}(1) = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$

$\mathbf{a}(1) = \mathbf{0}$



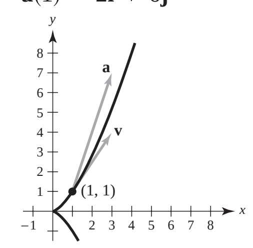
3. $\mathbf{v}(2) = 4\mathbf{i} + \mathbf{j}$

$\mathbf{a}(2) = 2\mathbf{i}$



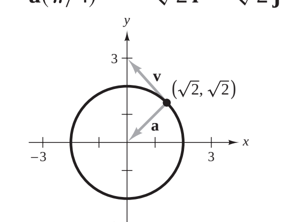
5. $\mathbf{v}(1) = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

$\mathbf{a}(1) = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$



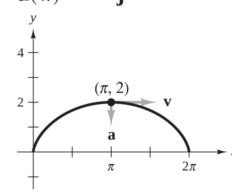
7. $\mathbf{v}(\pi/4) = -\sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j}$

$\mathbf{a}(\pi/4) = -\sqrt{2}\mathbf{i} - \sqrt{2}\mathbf{j}$



9. $\mathbf{v}(\pi) = 2\mathbf{i}$

$\mathbf{a}(\pi) = -\mathbf{j}$



11. $\mathbf{v}(t) = \mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

$\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{35}$

$\mathbf{a}(t) = \mathbf{0}$

13. $\mathbf{v}(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

$\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{1 + 5t^2}$

$\mathbf{a}(t) = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

15. $\mathbf{v}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \left(t/\sqrt{9 - t^2}\right)\mathbf{k}$

$\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{(18 - t^2)/(9 - t^2)}$

$\mathbf{a}(t) = (-9/(9 - t^2)^{3/2})\mathbf{k}$

17. $\mathbf{v}(t) = 4\mathbf{i} - 3\operatorname{sen} t\mathbf{j} + 3\cos t\mathbf{k}$

$\|\mathbf{v}(t)\| = 5$

$\mathbf{a}(t) = -3\cos t\mathbf{j} - 3\operatorname{sen} t\mathbf{k}$

19. $\mathbf{v}(t) = (e^t\cos t - e^t\operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (e^t\operatorname{sen} t + e^t\cos t)\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$

$\|\mathbf{v}(t)\| = e^t\sqrt{3}$

$\mathbf{a}(t) = -2e^t\operatorname{sen} t\mathbf{i} + 2e^t\cos t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$

21. *a*) $x = 1 + t$ *b*) $(1.100, -1.200, 0.325)$

$y = -1 - 2t$

$z = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}t$

23. $\mathbf{v}(t) = t(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$

$\mathbf{r}(t) = (t^2/2)(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$

$\mathbf{r}(2) = 2(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$

25. $\mathbf{v}(t) = \left(t^2/2 + \frac{9}{2}\right)\mathbf{j} + \left(t^2/2 - \frac{1}{2}\right)\mathbf{k}$

$\mathbf{r}(t) = \left(t^3/6 + \frac{9}{2}t - \frac{14}{3}\right)\mathbf{j} + \left(t^3/6 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}\right)\mathbf{k}$

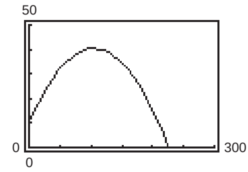
$\mathbf{r}(2) = \frac{17}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$

27. $\mathbf{v}(t) = -\operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}$

$\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

$\mathbf{r}(2) = (\cos 2)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} 2)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

29. $\mathbf{r}(t) = 44\sqrt{3}t\mathbf{i} + (10 + 44t - 16t^2)\mathbf{j}$



31. $v_0 = 40\sqrt{6}$ pies/s; 78 pies **33.** Demostración

35. *a*) $y = -0.004x^2 + 0.37x + 6$

$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (-0.004t^2 + 0.37t + 6)\mathbf{j}$

b)

c) 14.56 pies

d) Velocidad inicial: 67.4 pies/s; $\theta \approx 20.14°$

37. *a*) $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{440}{3}\cos\theta_0\right)t\mathbf{i} + \left[3 + \left(\frac{440}{3}\operatorname{sen}\theta_0\right)t - 16t^2\right]\mathbf{j}$

b)

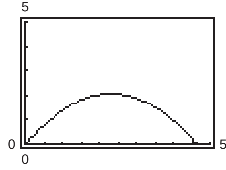
El ángulo mínimo parece ser $\theta_0 = 20°$.

c) $\theta_0 \approx 19.38°$

39. *a*) $v_0 = 28.78$ pies/s; $\theta = 58.28°$ *b*) $v_0 \approx 32$ pies/s

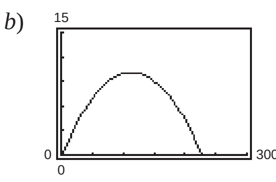
41. 1.91°

43. *a*)



Altura máxima: 2.1 pies
Rango: 46.6 pies

b)

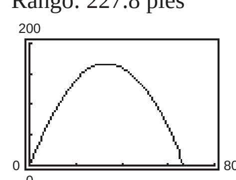


Altura máxima: 10.0 pies
Rango: 227.8 pies

c)

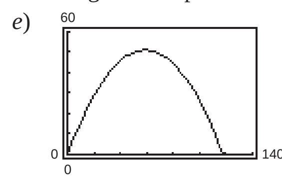
Altura máxima: 34.0 pies
Rango: 136.1 pies

d)



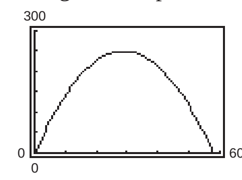
Altura máxima: 166.5 pies
Rango: 666.1 pies

e)



Altura máxima: 51.0 pies
Rango: 117.9 pies

f)



Altura máxima: 249.8 pies
Rango: 576.9 pies

45. Altura máxima: 129.1 m
Rango: 886.3 m

47. $\mathbf{v}(t) = b\omega[(1 - \cos\omega t)\mathbf{i} + \operatorname{sen}\omega t\mathbf{j}]$

$\mathbf{a}(t) = b\omega^2(\operatorname{sen}\omega t\mathbf{i} + \cos\omega t\mathbf{j})$

a) $\|\mathbf{v}(t)\| = 0$ cuando $\omega t = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$

b) $\|\mathbf{v}(t)\|$ es máximo cuando $\omega t = \pi, 3\pi, \ldots$

49. $\mathbf{v}(t) = -b\omega\operatorname{sen}\omega t\mathbf{i} + b\omega\cos\omega t\mathbf{j}$

$\mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{r}(t) = 0$

51. $\mathbf{a}(t) = -b\omega^2(\cos\omega t\mathbf{i} + \operatorname{sen}\omega t\mathbf{j}) = -\omega^2\mathbf{r}(t)$; $\mathbf{a}(t)$ es un múltiplo negativo de un vector unitario desde (0, 0) hasta $(\cos\omega t, \operatorname{sen}\omega t)$, así $\mathbf{a}(t)$ está dirigida hacia el origen.

53. $8\sqrt{10}$ pies/s **55 a 57.** Demostraciones

59. *a*) $\mathbf{v}(t) = -6\operatorname{sen}t\mathbf{i} + 3\cos t\mathbf{j}$

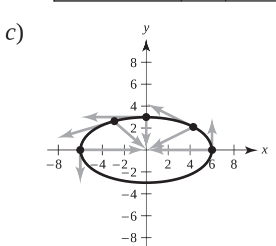
$\|\mathbf{v}(t)\| = 3\sqrt{3\operatorname{sen}^2 t + 1}$

$\mathbf{a}(t) = -6\cos t\mathbf{i} - 3\operatorname{sen}t\mathbf{j}$

b)

t	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π
Velocidad	3	$3\sqrt{10}/2$	6	$3\sqrt{13}/2$	3

c)



d) La velocidad aumenta cuando el ángulo entre **v** y **a** se encuentra en el intervalo $[0, \pi/2)$, y disminuye cuando el ángulo se encuentra en el intervalo $(\pi/2, \pi]$.

61. La velocidad de un objeto tiene magnitud y dirección de movimiento, mientras que la rapidez sólo tiene magnitud.

63. *a*) Velocidad: $\mathbf{r}_2'(t) = 2\mathbf{r}_1'(2t)$

Aceleración: $\mathbf{r}_2''(t) = 4\mathbf{r}_1''(2t)$

b) En general, si $\mathbf{r}_3(t) = \mathbf{r}_1(\omega t)$, entonces:

Velocidad: $\mathbf{r}_3'(t) = \omega\mathbf{r}_1'(\omega t)$

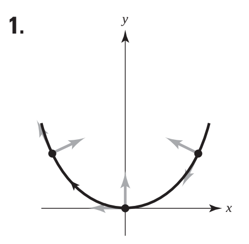
Aceleración: $\mathbf{r}_3''(t) = \omega^2\mathbf{r}_1''(\omega t)$

65. Falso; la aceleración es la derivada de la velocidad.

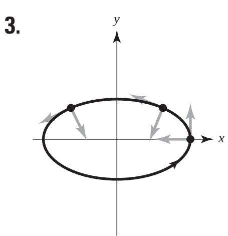
67. Verdadero.

Sección 12.4 (página 865)

1.



3.



5. $\mathbf{T}(1) = \left(\sqrt{2}/2\right)(\mathbf{i} + \mathbf{j})$ **7.** $\mathbf{T}(\pi/4) = \left(\sqrt{2}/2\right)(-\mathbf{i} + \mathbf{j})$

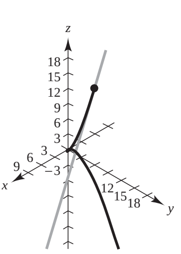
9. $\mathbf{T}(e) = (3e\mathbf{i} - \mathbf{j})/\sqrt{9e^2 + 1} \approx 0.9926\mathbf{i} - 0.1217\mathbf{j}$

11. $\mathbf{T}(0) = \left(\sqrt{2}/2\right)(\mathbf{i} + \mathbf{k})$
$x = t$
$y = 0$
$z = t$

13. $\mathbf{T}(0) = \left(\sqrt{10}/10\right)(3\mathbf{j} + \mathbf{k})$
$x = 3$
$y = 3t$
$z = t$

15. $\mathbf{T}(\pi/4) = \frac{1}{2}\langle -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\rangle$
$x = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,t$
$y = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,t$
$z = 4$

17. $\mathbf{T}(3) = \frac{1}{19}\langle 1, 6, 18\rangle$
$x = 3 + t$
$y = 9 + 6t$
$z = 18 + 18t$



19. Recta tangente: $x = 1 + t$, $y = t$, $z = 1 + \frac{1}{2}t$
$\mathbf{r}(1.1) \approx \langle 1.1, 0.1, 1.05\rangle$

21. 1.2° **23.** $\mathbf{N}(2) = \left(\sqrt{5}/5\right)(-2\mathbf{i} + \mathbf{j})$

25. $\mathbf{N}(2) = \left(-\sqrt{5}/5\right)(2\mathbf{i} - \mathbf{j})$

27. $\mathbf{N}(1) = \left(-\sqrt{14}/14\right)(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$

29. $\mathbf{N}(3\pi/4) = \left(\sqrt{2}/2\right)(\mathbf{i} - \mathbf{j})$

31. $\mathbf{v}(t) = 4\mathbf{i}$
$\mathbf{a}(t) = \mathbf{0}$
$\mathbf{T}(t) = \mathbf{i}$
$\mathbf{N}(t)$ no está definido. La trayectoria es una recta y la velocidad es constante.

33. $\mathbf{v}(t) = 8t\mathbf{i}$
$\mathbf{a}(t) = 8\mathbf{i}$
$\mathbf{T}(t) = \mathbf{i}$
$\mathbf{N}(t)$ no está definido. La trayectoria es una recta y la velocidad es variable.

35. $\mathbf{T}(1) = (\sqrt{2}/2)(\mathbf{i} - \mathbf{j})$
$\mathbf{N}(1) = (\sqrt{2}/2)(\mathbf{i} + \mathbf{j})$
$a_{\mathbf{T}} = -\sqrt{2}$
$a_{\mathbf{N}} = \sqrt{2}$

37. $\mathbf{T}(1) = (-\sqrt{5}/5)(\mathbf{i} - 2\mathbf{j})$
$\mathbf{N}(1) = (-\sqrt{5}/5)(2\mathbf{i} + \mathbf{j})$
$a_{\mathbf{T}} = 14\sqrt{5}/5$
$a_{\mathbf{N}} = 8\sqrt{5}/5$

39. $\mathbf{T}(0) = (\sqrt{5}/5)(\mathbf{i} - 2\mathbf{j})$
$\mathbf{N}(0) = (\sqrt{5}/5)(2\mathbf{i} + \mathbf{j})$
$a_{\mathbf{T}} = -7\sqrt{5}/5$
$a_{\mathbf{N}} = 6\sqrt{5}/5$

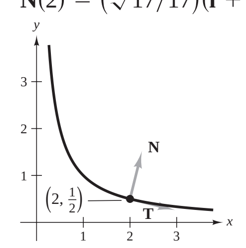
41. $\mathbf{T}(\pi/2) = (\sqrt{2}/2)(-\mathbf{i} + \mathbf{j})$
$\mathbf{N}(\pi/2) = (-\sqrt{2}/2)(\mathbf{i} + \mathbf{j})$
$a_{\mathbf{T}} = \sqrt{2}e^{\pi/2}$
$a_{\mathbf{N}} = \sqrt{2}e^{\pi/2}$

43. $\mathbf{T}(t_0) = (\cos \omega t_0)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} \omega t_0)\mathbf{j}$
$\mathbf{N}(t_0) = (-\operatorname{sen} \omega t_0)\mathbf{i} + (\cos \omega t_0)\mathbf{j}$
$a_{\mathbf{T}} = \omega^2$
$a_{\mathbf{N}} = \omega^3 t_0$

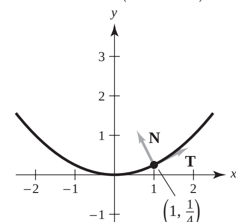
45. $\mathbf{T}(t) = -\operatorname{sen}(\omega t)\mathbf{i} + \cos(\omega t)\mathbf{j}$
$\mathbf{N}(t) = -\cos(\omega t)\mathbf{i} - \operatorname{sen}(\omega t)\mathbf{j}$
$a_{\mathbf{T}} = 0$
$a_{\mathbf{N}} = a\omega^2$

47. $\|\mathbf{v}(t)\| = a\omega$; La velocidad es constante porque $a_{\mathbf{T}} = 0$.

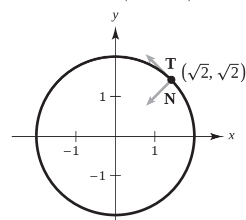
49. $\mathbf{r}(2) = 2\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$
$\mathbf{T}(2) = (\sqrt{17}/17)(4\mathbf{i} - \mathbf{j})$
$\mathbf{N}(2) = (\sqrt{17}/17)(\mathbf{i} + 4\mathbf{j})$



51. $\mathbf{r}(1/4) = \mathbf{i} + (1/4)\mathbf{j}$
$\mathbf{T}(1/4) = (\sqrt{5}/5)(2\mathbf{i} + \mathbf{j})$
$\mathbf{N}(1/4) = (2\sqrt{5}/5)[-(1/2)\mathbf{i} + \mathbf{j}]$



53. $\mathbf{r}(\pi/4) = \sqrt{2}\,\mathbf{i} + \sqrt{2}\,\mathbf{j}$
$\mathbf{T}(\pi/4) = (\sqrt{2}/2)(-\mathbf{i} + \mathbf{j})$
$\mathbf{N}(\pi/4) = (\sqrt{2}/2)(-\mathbf{i} - \mathbf{j})$



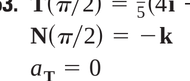
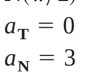
55. $\mathbf{T}(1) = (\sqrt{14}/14)(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$
$\mathbf{N}(1)$ no está definido.
$a_{\mathbf{T}}$ no está definida.
$a_{\mathbf{N}}$ no está definida.

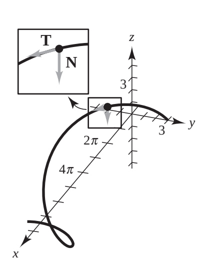
57. $\mathbf{T}(\pi/3) = (\sqrt{5}/5)[-(\sqrt{3}/2)\mathbf{i} + (1/2)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}]$
$\mathbf{N}(\pi/3) = -(1/2)\mathbf{i} - (\sqrt{3}/2)\mathbf{j}$
$a_{\mathbf{T}} = 0$
$a_{\mathbf{N}} = 1$

59. $\mathbf{T}(1) = (\sqrt{6}/6)(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$
$\mathbf{N}(1) = (\sqrt{30}/30)(-5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$
$a_{\mathbf{T}} = 5\sqrt{6}/6$
$a_{\mathbf{N}} = \sqrt{30}/6$

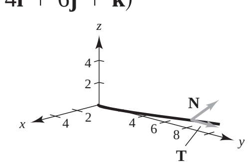
61. $\mathbf{T}(0) = (\sqrt{3}/3)(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$
$\mathbf{N}(0) = (\sqrt{2}/2)(\mathbf{i} - \mathbf{j})$
$a_{\mathbf{T}} = \sqrt{3}$
$a_{\mathbf{N}} = \sqrt{2}$

63. $\mathbf{T}(\pi/2) = \frac{1}{5}(4\mathbf{i} - 3\mathbf{j})$
$\mathbf{N}(\pi/2) = -\mathbf{k}$
$a_{\mathbf{T}} = 0$
$a_{\mathbf{N}} = 3$



65. $\mathbf{T}(2) = (\sqrt{149}/149)(\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$
$\mathbf{N}(2) = (\sqrt{5\,513}/5\,513)(-74\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k})$
$a_{\mathbf{T}} = 74\sqrt{149}/149$
$a_{\mathbf{N}} = \sqrt{5\,513}/149$



67. Sea C una curva suave representada por $\mathbf{r}$ en un intervalo abierto I. El vector unitario tangente $\mathbf{T}(t)$ en t se define como

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|},\ \mathbf{r}'(t) \neq 0.$$

El vector unitario normal principal $\mathbf{N}(t)$ en t se define como

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|},\ \mathbf{T}'(t) \neq 0.$$

Las componentes tangencial y normal de la aceleración se definen como sigue $\mathbf{a}(t) = a_{\mathbf{T}}\mathbf{T}(t) + a_{\mathbf{N}}\mathbf{N}(t)$.

69. *a*) El movimiento de la partícula es en línea recta.
b) La velocidad de la partícula es constante.

71. *a*) $t = \frac{1}{2}$: $a_{\mathbf{T}} = \sqrt{2}\pi^2/2$, $a_{\mathbf{N}} = \sqrt{2}\pi^2/2$
$t = 1$: $a_{\mathbf{T}} = 0$, $a_{\mathbf{N}} = \pi^2$
$t = \frac{3}{2}$: $a_{\mathbf{T}} = -\sqrt{2}\pi^2/2$, $a_{\mathbf{N}} = \sqrt{2}\pi^2/2$
b) $t = \frac{1}{2}$: creciente porque $a_{\mathbf{T}} > 0$.
$t = 1$: máximo porque $a_{\mathbf{T}} = 0$.
$t = \frac{3}{2}$: decreciente porque $a_{\mathbf{T}} < 0$.

73. $\mathbf{T}(\pi/2) = (\sqrt{17}/17)(-4\mathbf{i} + \mathbf{k})$
$\mathbf{N}(\pi/2) = -\mathbf{j}$
$\mathbf{B}(\pi/2) = (\sqrt{17}/17)(\mathbf{i} + 4\mathbf{k})$

75. $\mathbf{T}(\pi/4) = (\sqrt{2}/2)(\mathbf{j} - \mathbf{k})$
$\mathbf{N}(\pi/4) = -(\sqrt{2}/2)(\mathbf{j} + \mathbf{k})$
$\mathbf{B}(\pi/4) = -\mathbf{i}$

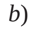
77. $\mathbf{T}(\pi/3) = (\sqrt{5}/5)(\mathbf{i} - \sqrt{3}\mathbf{j} + \mathbf{k})$
$\mathbf{N}(\pi/3) = -\frac{1}{2}(\sqrt{3}\mathbf{i} + \mathbf{j})$
$\mathbf{B}(\pi/3) = (\sqrt{5}/10)(\mathbf{i} - \sqrt{3}\mathbf{j} - 4\mathbf{k})$

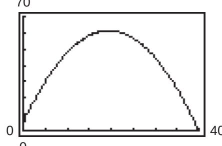
79. $a_{\mathbf{T}} = \dfrac{-32(v_0 \operatorname{sen}\theta - 32t)}{\sqrt{v_0^2\cos^2\theta + (v_0 \operatorname{sen}\theta - 32t)^2}}$

$a_{\mathbf{N}} = \dfrac{32v_0 \cos\theta}{\sqrt{v_0^2\cos^2\theta + (v_0 \operatorname{sen}\theta - 32t)^2}}$

En la altura máxima $a_{\mathbf{T}} = 0$ y $a_{\mathbf{N}} = 32$.

81. *a*) $\mathbf{r}(t) = 60\sqrt{3}t\mathbf{i} + (5 + 60t - 16t^2)\mathbf{j}$

b) 



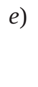
Altura máxima ≈ 61.245 pies
Rango ≈ 398.186 pies

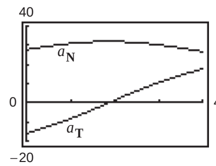
c) $\mathbf{v}(t) = 60\sqrt{3}\mathbf{i} + (60 - 32t)\mathbf{j}$
$\|\mathbf{v}(t)\| = 8\sqrt{16t^2 - 60t + 225}$
$\mathbf{a}(t) = -32\mathbf{j}$

d)

t	0.5	1.0	1.5
Velocidad	112.85	107.63	104.61

t	2.0	2.5	3.0
Velocidad	104	105.83	109.98

e) 



La velocidad es decreciente cuando $a_{\mathbf{T}}$ y $a_{\mathbf{N}}$ tienen signos opuestos.

83. *a*) $4\sqrt{625\pi^2 + 1} \approx 314$ mi/h
b) $a_{\mathbf{T}} = 0$, $a_{\mathbf{N}} = 1\,000\,\pi^2$
$a_{\mathbf{T}} = 0$ porque la velocidad es constante

85. *a*) La componente centrípeta se cuadruplica.
b) La componente centrípeta se reduce a la mitad.

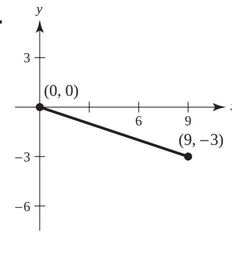
87. 4.82 mi/s **89.** 4.67 mi/s

91. Falso; la aceleración centrípeta puede ocurrir con velocidad constante.

93. *a*) Demostración *b*) Demostración **95 a 97.** Demostraciones

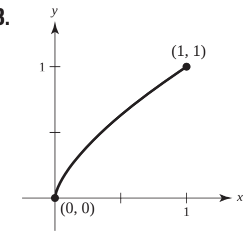
Sección 12.5 (página 877)





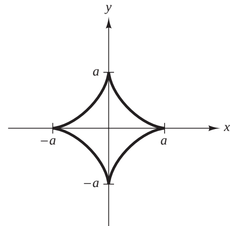
$3\sqrt{10}$

3.



$(13\sqrt{13} - 8)/27$

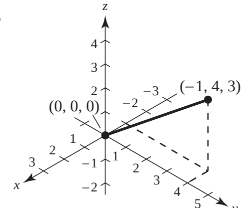
5.



$6a$

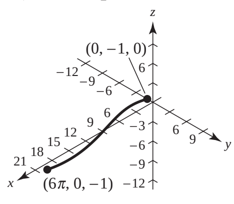
7. *a*) $\mathbf{r}(t) = (50t\sqrt{2})\mathbf{i} + (3 + 50t\sqrt{2} - 16t^2)\mathbf{j}$
b) $\frac{649}{8} \approx 81$ pies *c*) 315.5 pies *d*) 362.9 pies

9.



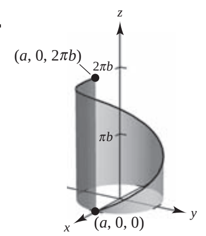
$\sqrt{26}$

11.



$3\sqrt{17}\pi/2$

13.



$2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$

15. 8.37

17. *a*) $2\sqrt{21} \approx 9.165$ *b*) 9.529
c) Aumenta el número de segmentos de recta *d*) 9.571

19. *a*) $s = \sqrt{5}t$ *b*) $\mathbf{r}(s) = 2\cos\dfrac{s}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + 2\operatorname{sen}\dfrac{s}{\sqrt{5}}\mathbf{j} + \dfrac{s}{\sqrt{5}}\mathbf{k}$
c) $s = \sqrt{5}$: (1.081, 1.683, 1.000)
$s = 4$: (−0.433, 1.953, 1.789)
d) Demostración

21. 0 **23.** $\frac{2}{5}$ **25.** 0 **27.** $\sqrt{2}/2$ **29.** 1

31. $\frac{1}{4}$ **33.** $1/a$ **35.** $\sqrt{2}/(4a\sqrt{1 - \cos\omega t})$

37. $\sqrt{5}/(1 + 5t^2)^{3/2}$ **39.** $\frac{3}{25}$ **41.** $\frac{12}{125}$ **43.** $7\sqrt{26}/676$

45. $K = 0$, $1/K$ no está definido.

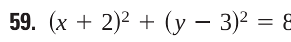
47. $K = 4/17^{3/2}$, $1/K = 17^{3/2}/4$ **49.** $K = 4$, $1/K = 1/4$

51. $K = 1/a$, $1/K = a$

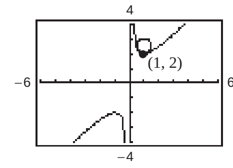
53. $K = 12/145^{3/2}$, $1/K = 145^{3/2}/12$

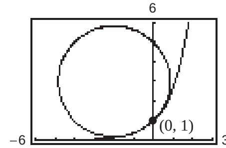
55. *a*) $(x - \pi/2)^2 + y^2 = 1$
b) Porque la curvatura no es tan grande, el radio de curvatura es mayor.

57. $(x - 1)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

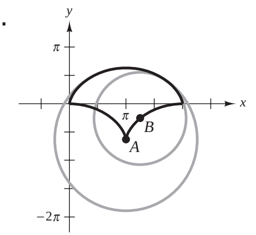


59. $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 8$





61.



63. *a*) $(1, 3)$ *b*) 0

65. *a*) $K \to \infty$ cuando $x \to 0$ (No es máximo) *b*) 0

67. *a*) $\left(1/\sqrt{2}, -\ln 2/2\right)$ *b*) 0

69. *a*) $(\pm \operatorname{arcsenh}(1), 1)$ *b*) 0

71. $(0, 1)$ **73.** $(\pi/2 + K\pi, 0)$

75. *a*) $s = \displaystyle\int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt$

b) Plano: $K = \left\|\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}\right\| = \|\mathbf{T}'(s)\|$

Espacio: $K = \dfrac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \dfrac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$

77. $K = |y''|$; Sí, por ejemplo, $y = x^4$ tiene curvatura 0 en su mínimo relativo (0,0). La curvatura es positiva en cualquier otro punto de la curva.

79. Demostración

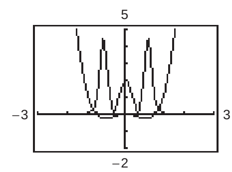
81. *a*) $K = \dfrac{2|6x^2 - 1|}{(16x^6 - 16x^4 + 4x^2 + 1)^{3/2}}$

b) $x = 0$: $x^2 + \left(y + \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

$x = 1$: $x^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{4}$

(Gráfica: ventana de −3 a 3 y de −2 a 2; curva *f*)


c)



La curvatura tiende a ser mayor cerca de los extremos de la función y disminuye cuando $x \to \pm\infty$. Sin embargo, f y K no tienen los mismos números críticos.

Números críticos de f: $x = 0, \pm\sqrt{2}/2 \approx \pm 0.7071$

Números críticos de K: $x = 0, \pm 0.7647, \pm 0.4082$

83. *a*) 12.25 unidades *b*) $\frac{1}{2}$ **85 a 87.** Demostraciones

89. *a*) 0 *b*) 0 **91.** $\frac{1}{4}$ **93.** Demostración

95. $K = [1/(4a)]|\csc(\theta/2)|$ **97.** 3 327.5 lb

Mínimo: $K = 1/(4a)$

No hay un máximo.

99. Demostración

101. Falso. Ver la exploración en la página 869. **103.** Verdadero

105 a 111. Demostraciones

Ejercicios de repaso para el capítulo 12 (página 881)

1. *a*) Todos son reales, excepto $(\pi/2) + n\pi$, n es un entero

b) Continuo excepto en $t = (\pi/2) + n\pi$, n es un entero

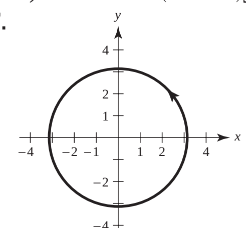
3. *a*) $(0, \infty)$ *b*) Continuo para todo $t > 0$

5. *a*) $\mathbf{i} - \sqrt{2}\mathbf{k}$ *b*) $-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

c) $(2c - 1)\mathbf{i} + (c - 1)^2\mathbf{j} - \sqrt{c + 1}\mathbf{k}$

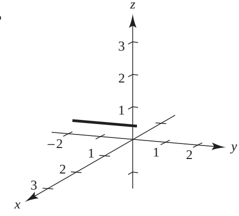
d) $2\Delta t\mathbf{i} + \Delta t(\Delta t + 2)\mathbf{j} - \left(\sqrt{\Delta t + 3} - \sqrt{3}\right)\mathbf{k}$

7.



9. (Gráfica en el espacio, ejes x, y, z)

11.



13. (Gráfica en el espacio, ejes x, y, z)

15. $\mathbf{r}_1(t) = 3t\mathbf{i} + 4t\mathbf{j}$, $0 \le t \le 1$

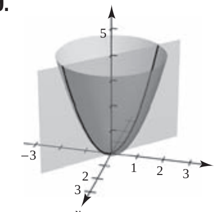
$\mathbf{r}_2(t) = 3\mathbf{i} + (4 - t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 4$

$\mathbf{r}_3(t) = (3 - t)\mathbf{i}$, $0 \le t \le 3$

17. $\mathbf{r}(t) = \langle -2 + 7t, -3 + 4t, 8 - 10t\rangle$

(La respuesta no es única.)

19.




21. $4\mathbf{i} + \mathbf{k}$

$x = t, y = -t, z = 2t^2$

23. *a*) $3\mathbf{i} + \mathbf{j}$ *b*) $\mathbf{0}$ *c*) $4t + 3t^2$

d) $-5\mathbf{i} + (2t - 2)\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}$

e) $(10t - 1)/\sqrt{10t^2 - 2t + 1}$

f) $\left(\frac{8}{3}t^3 - 2t^2\right)\mathbf{i} - 8t^3\mathbf{j} + (9t^2 - 2t + 1)\mathbf{k}$

25. $x(t)$ y $y(t)$ son funciones crecientes en $t = t_0$ y $z(t)$ es una función decreciente en $t = t_0$.

27. $\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + (t \operatorname{sen} t + \cos t)\mathbf{j} + \mathbf{C}$

29. $\frac{1}{2}\left(t\sqrt{1 + t^2} + \ln\left|t + \sqrt{1 + t^2}\right|\right) + \mathbf{C}$

31. $\frac{32}{3}\mathbf{j}$ **33.** $2(e - 1)\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

35. $\mathbf{r}(t) = (t^2 + 1)\mathbf{i} + (e^t + 2)\mathbf{j} - (e^{-t} + 4)\mathbf{k}$

37. $\mathbf{v}(t) = 4\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

$\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{17 + 9t^4}$

$\mathbf{a}(t) = 6t\mathbf{j}$

39. $\mathbf{v}(t) = \langle -3\cos^2 t \operatorname{sen} t, 3\operatorname{sen}^2 t \cos t, 3\rangle$

$\|\mathbf{v}(t)\| = 3\sqrt{\operatorname{sen}^2 t \cos^2 t + 1}$

$\mathbf{a}(t) = \langle 3\cos t(2\operatorname{sen}^2 t - \cos^2 t), 3\operatorname{sen} t(2\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t), 0\rangle$

41. $x(t) = t, y(t) = 16 + 8t, z(t) = 2 + \frac{1}{2}t$

$\mathbf{r}(4.1) \approx \langle 0.1, 16.8, 2.05\rangle$

43. ≈ 191.0 pies **45.** ≈ 38.1 m/s

47. $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{10}$
$\mathbf{a} = \mathbf{0}$
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = 0$
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{N}$ no existe.

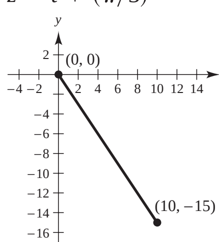
49. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + [1/(2\sqrt{t})]\mathbf{j}$
$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{4t+1}/(2\sqrt{t})$
$\mathbf{a} = [-1/(4t\sqrt{t})]\mathbf{j}$
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = -1/(4t\sqrt{t}\sqrt{4t+1})$
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{N} = 1/(2t\sqrt{4t+1})$

51. $\mathbf{v} = e^t\mathbf{i} - e^{-t}\mathbf{j}$
$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}$
$\mathbf{a} = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j}$
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = \dfrac{e^{2t} - e^{-2t}}{\sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}}$
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{N} = \dfrac{2}{\sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}}$

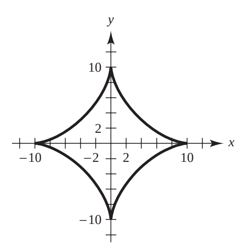
53. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$
$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1 + 5t^2}$
$\mathbf{a} = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = \dfrac{5t}{\sqrt{1 + 5t^2}}$
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{N} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{1 + 5t^2}}$

55. $x = -\sqrt{3}t + 1$
$y = t + \sqrt{3}$
$z = t + (\pi/3)$

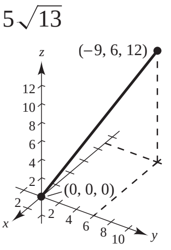
57. 4.58 mi/s

59.


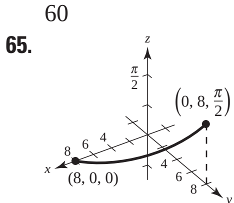
$5\sqrt{13}$

61.


60

63.


$3\sqrt{29}$

65.


$\sqrt{65}\pi/2$

67. 0 **69.** $(2\sqrt{5})/(4 + 5t^2)^{3/2}$ **71.** $\sqrt{2}/3$

73. $K = \sqrt{17}/289;\ r = 17\sqrt{17}$ **75.** $K = \sqrt{2}/4;\ r = 2\sqrt{2}$

77. La curvatura cambia bruscamente de cero a una constante no cero en los puntos B y C.

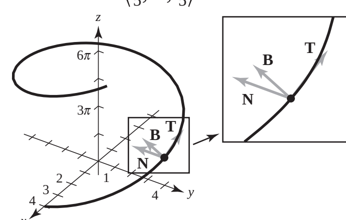
SP Solución de problemas (página 883)

1. *a*) a *b*) πa *c*) $K = \pi a$

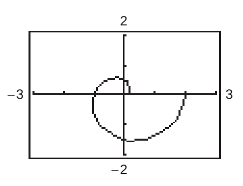
3. Velocidad inicial: 447.21 pies/s; $\theta \approx 63.43°$

5 a 7. Demostraciones

9. Tangente unitario: $\langle -\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5} \rangle$
Normal unitario: $\langle 0, -1, 0 \rangle$
Binormal: $\langle \frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5} \rangle$

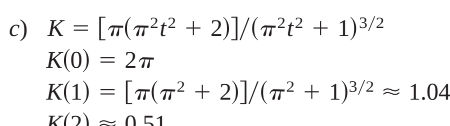


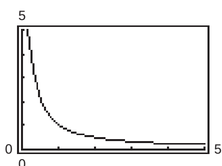
11. *a*) Demostración *b*) Demostración

13. *a*)


b) 6.766

c) $K = [\pi(\pi^2t^2 + 2)]/(\pi^2t^2 + 1)^{3/2}$
$K(0) = 2\pi$
$K(1) = [\pi(\pi^2 + 2)]/(\pi^2 + 1)^{3/2} \approx 1.04$
$K(2) \approx 0.51$



d)


e) $\lim_{t\to\infty} K = 0$

f) Cuando $t \to \infty$, la gráfica forma una espiral hacia afuera y la curva decrece.

Capítulo 13

Sección 13.1 (página 894)

1. No es una función porque para algunos valores de x y y (por ejemplo $x = y = 0$) hay dos valores de z.

3. z es una función de x y y. **5.** z no es una función de x y y.

7. *a*) 6 *b*) -4 *c*) 150 *d*) $5y$ *e*) $2x$ *f*) $5t$

9. *a*) 5 *b*) $3e^2$ *c*) $2/e$ *d*) $5e^y$ *e*) xe^2 *f*) te^t

11. *a*) $\frac{2}{3}$ *b*) 0 *c*) $-\frac{3}{2}$ *d*) $-\frac{10}{3}$

13. *a*) $\sqrt{2}$ *b*) $3 \operatorname{sen} 1$ *c*) $-3\sqrt{3}/2$ *d*) 4

15. *a*) -4 *b*) -6 *c*) $-\frac{25}{4}$ *d*) $\frac{9}{4}$

17. *a*) $2,\ \Delta x \neq 0$ *b*) $2y + \Delta y,\ \Delta y \neq 0$

19. Dominio: $\{(x, y): x, y$ son cualquier número real$\}$
Rango: $z \geq 0$

21. Dominio: $\{(x, y): y \geq 0\}$
Rango: Todos los números reales

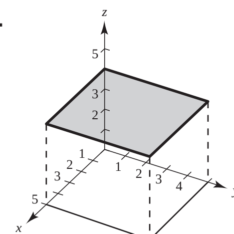
23. Dominio: $\{(x, y): x \neq 0, y \neq 0\}$
Rango: Todos los números reales

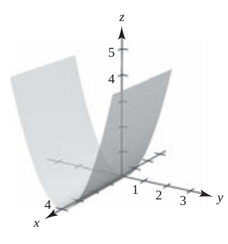
25. Dominio: $\{(x, y): x^2 + y^2 \leq 4\}$
Rango: $0 \leq z \leq 2$

27. Dominio: $\{(x, y): -1 \leq x + y \leq 1\}$
Rango: $0 \leq z \leq \pi$

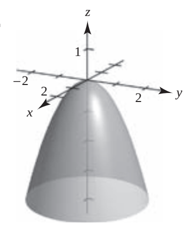
29. Dominio: $\{(x, y): y < -x + 4\}$
Rango: Todos los números reales

31. *a*) (20, 0, 0) *b*) (−15, 10, 20)
c) (20, 15, 25) *d*) (20, 20, 0)

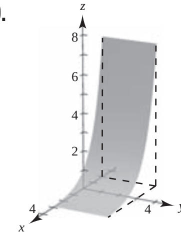
33.


35.


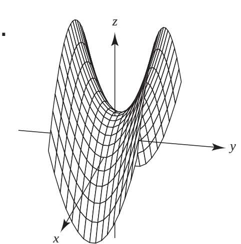
37.



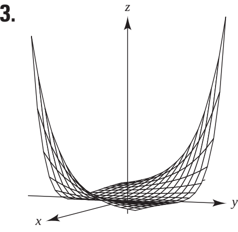
39.



41.

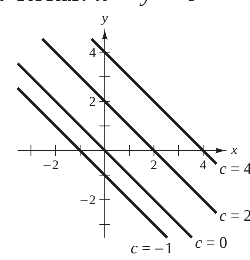


43.

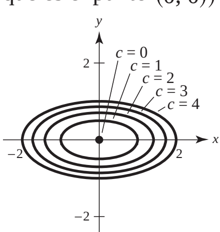


45. *c* **46.** *d* **47.** *b* **48.** *a*

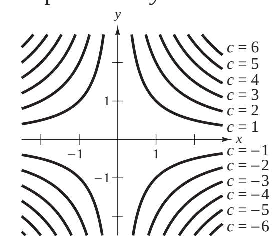
49. Rectas: $x + y = c$



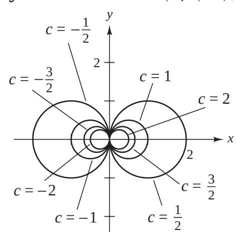
51. Elipses: $x^2 + 4y^2 = c$ (excepto $x^2 + 4y^2 = 0$ que es el punto $(0, 0)$)



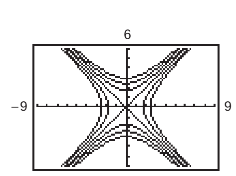
53. Hipérbolas: $xy = c$



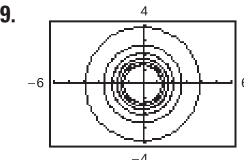
55. Círculos que pasan por $(0, 0)$ y con centro en $(1/(2c), 0)$



57.



59.



61. La gráfica de una función de dos variables es el conjunto de todos los puntos (x, y, z) para los cuales $z = f(x, y)$ y donde (x, y) está en el dominio de *f*. La gráfica puede ser interpretada como una superficie en el espacio. Las curvas de nivel son los campos escalares $f(x, y) = c$, donde *c* es una constante.

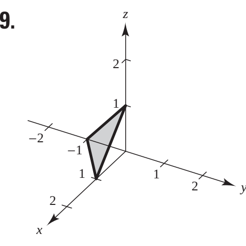
63. $f(x, y) = x/y$; las curvas de nivel son las rectas $y = (1/c)x$.

65. La superficie puede tener la forma de una silla de montar. Por ejemplo, sea $f(x, y) = xy$. La gráfica no es única: cualquier traslación vertical producirá las mismas curvas de nivel.

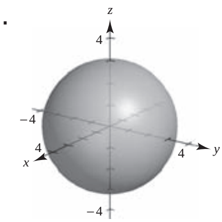
67.

	Tasa de inflación		
Tasa de impuesto	**0**	**0.03**	**0.05**
0	$1 790.85	$1 332.56	$1 099.43
0.28	$1 526.43	$1 135.80	$937.09
0.35	$1 466.07	$1 090.90	$900.04

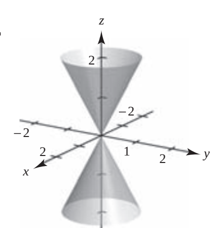
69.



71.

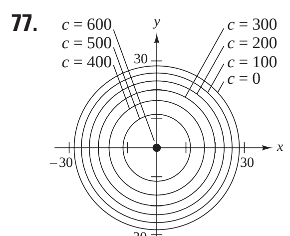


73.

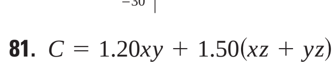


75. *a*) 243 pies-tablón
b) 507 pies-tablón

77.



79. Demostración



81. $C = 1.20xy + 1.50(xz + yz)$

83. *a*) $k = \frac{520}{3}$
b) $P = 520T/(3V)$
Las curvas de nivel son rectas.

85. *a*) *C* *b*) *A* *c*) *B*

87. *a*) No; las curvas de nivel son irregulares y están espaciadas esporádicamente.
b) Utilizar más colores.

89. Falso: sea $f(x, y) = 4$. **91.** Verdadero

Sección 13.2 (página 904)

1 a 3. Demostraciones **5.** 1 **7.** 12 **9.** 9, continua
11. e^2, continua **13.** 0, continua para $y \neq 0$
15. $\frac{1}{2}$, continua, excepto en $(0, 0)$ **17.** 0, continua
19. 0, continua para $xy \neq 1$, $|xy| \leq 1$
21. $2\sqrt{2}$, continua para $x + y + z \geq 0$ **23.** 0
25. No existe el límite. **27.** 4 **29.** No existe el límite.
31. No existe el límite. **33.** 0
35. No existe el límite. **37.** Continua, 1

39.

(x, y)	$(1, 0)$	$(0.5, 0)$	$(0.1, 0)$	$(0.01, 0)$	$(0.001, 0)$
$f(x, y)$	0	0	0	0	0

$y = 0$: 0

(x, y)	$(1, 1)$	$(0.5, 0.5)$	$(0.1, 0.1)$
$f(x, y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

(x, y)	$(0.01, 0.01)$	$(0.001, 0.001)$
$f(x, y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$y = x$: $\frac{1}{2}$

No existe el límite.

Continua excepto en $(0, 0)$

41.

(x, y)	$(1, 1)$	$(0.25, 0.5)$	$(0.01, 0.1)$
$f(x, y)$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

(x, y)	$(0.0001, 0.01)$	$(0.000001, 0.001)$
$f(x, y)$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

$x = y^2$: $-\frac{1}{2}$

(x, y)	$(-1, 1)$	$(-0.25, 0.5)$	$(-0.01, 0.1)$
$f(x, y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

(x, y)	$(-0.0001, 0.01)$	$(-0.000001, 0.001)$
$f(x, y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$x = -y^2$: $\frac{1}{2}$

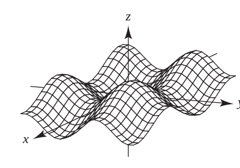
No existe el límite.

Continua excepto en $(0, 0)$

43. f es continua. y es continua excepto en $(0, 0)$. y tiene una discontinuidad removible en $(0, 0)$.

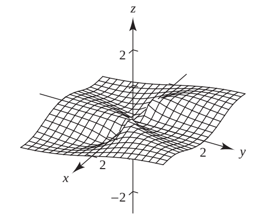
45. f es continua. g es continua excepto en $(0, 0)$. g tiene una discontinuidad removible en $(0, 0)$.

47. 0

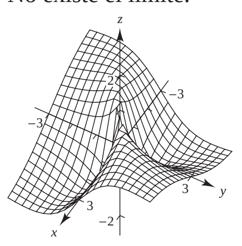


49. No existe el límite.





51. No existe el límite.



53. 0 **55.** 0 **57.** 1 **59.** 1 **61.** 0

63. Continua excepto en $(0, 0, 0)$ **65.** Continua

67. Continua **69.** Continua

71. Continua para $y \neq 2x/3$ **73.** *a*) $2x$ *b*) -4

75. *a*) $1/y$ *b*) $-x/y^2$ **77.** *a*) $3 + y$ *b*) $x - 2$

79. Verdadero **81.** Falso: sea $f(x, y) = \begin{cases} \ln(x^2 + y^2), & x \neq 0, y \neq 0 \\ 0, & x = 0, y = 0 \end{cases}$.

83. *a*) $(1 + a^2)/a, \quad a \neq 0$ *b*) No existe el límite.

c) No, el límite no existe. Trayectorias diferentes dan límites distintos.

85. 0 **87.** $\pi/2$ **89.** Demostración

91. Ver la “Definición del límite de una función de dos variables”, en la página 899; mostrar que el valor de $\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y)$ no es el mismo para dos diferentes trayectorias hacia (x_0, y_0).

93. *a*) Verdadero. Para hallar el primer límite, sustituir (2, 3) por (x, y). Para hallar el segundo límite, sustituir 3 por y para encontrar una función de x. Entonces sustituir 2 por x.

b) Falso. La convergencia de una trayectoria no implica la convergencia de todas las trayectorias.

c) Falso. Sea $f(x, y) = 4\left(\dfrac{(x-2)^2 - (y-3)^2}{(x-2)^2 + (y-3)^2}\right)^2$.

d) Verdadero. Cuando se multiplica por cero a cualquier número real, siempre se obtiene cero.

Sección 13.3 (página 914)

1. $f_x(4, 1) < 0$ **3.** $f_y(4, 1) > 0$

5. No. Porque al calcular la derivada parcial con respecto a y, se considera a x constante. De manera que el denominador se considera como una constante y no contiene variables.

7. Sí. Porque al calcular la derivada parcial con respecto a x, se considera a y constante. De manera que tanto el numerador como el denominador contienen variables.

9. $f_x(x, y) = 2$
$f_y(x, y) = -5$

11. $f_x(x, y) = 2xy^3$
$f_y(x, y) = 3x^2y^2$

13. $\partial z/\partial x = \sqrt{y}$
$\partial z/\partial y = x/(2\sqrt{y})$

15. $\partial z/\partial x = 2x - 4y$
$\partial z/\partial y = -4x + 6y$

17. $\partial z/\partial x = ye^{xy}$
$\partial z/\partial y = xe^{xy}$

19. $\partial z/\partial x = 2xe^{2y}$
$\partial z/\partial y = 2x^2e^{2y}$

21. $\partial z/\partial x = 1/x$
$\partial z/\partial y = -1/y$

23. $\partial z/\partial x = 2x/(x^2 + y^2)$
$\partial z/\partial y = 2y/(x^2 + y^2)$

25. $\partial z/\partial x = (x^3 - 3y^3)/(x^2y)$
$\partial z/\partial y = (-x^3 + 12y^3)/(2xy^2)$

27. $h_x(x, y) = -2xe^{-(x^2+y^2)}$
$h_y(x, y) = -2ye^{-(x^2+y^2)}$

29. $f_x(x, y) = x/\sqrt{x^2 + y^2}$
$f_y(x, y) = y/\sqrt{x^2 + y^2}$

31. $\partial z/\partial x = -y \operatorname{sen} xy$
$\partial z/\partial y = -x \operatorname{sen} xy$

33. $\partial z/\partial x = 2\sec^2(2x - y)$
$\partial z/\partial y = -\sec^2(2x - y)$

35. $\partial z/\partial x = ye^y \cos xy$
$\partial z/\partial y = e^y(x \cos xy + \operatorname{sen} xy)$

37. $\partial z/\partial x = 2 \cosh(2x + 3y)$
$\partial z/\partial y = 3 \cosh(2x + 3y)$

39. $f_x(x, y) = 1 - x^2$
$f_y(x, y) = y^2 - 1$

41. $f_x(x, y) = 3$
$f_y(x, y) = 2$

43. $f_x(x, y) = 1/\left(2\sqrt{x + y}\right)$
$f_y(x, y) = 1/\left(2\sqrt{x + y}\right)$

45. $\partial z/\partial x = -1$
$\partial z/\partial y = 0$

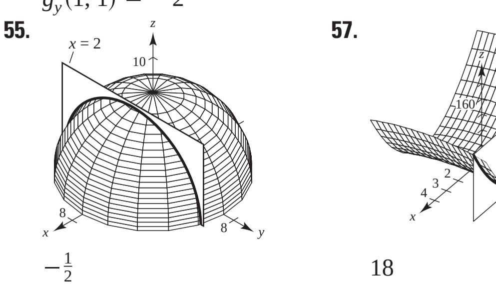
47. $\partial z/\partial x = -1$
$\partial z/\partial y = \frac{1}{2}$

49. $\partial z/\partial x = \frac{1}{4}$
$\partial z/\partial y = \frac{1}{4}$

51. $\partial z/\partial x = -\frac{1}{4}$
$\partial z/\partial y = \frac{1}{4}$

53. $g_x(1, 1) = -2$
$g_y(1, 1) = -2$

55.



$-\frac{1}{2}$

57. 18

59. $H_x(x, y, z) = \cos(x + 2y + 3z)$
$H_y(x, y, z) = 2 \cos(x + 2y + 3z)$
$H_z(x, y, z) = 3 \cos(x + 2y + 3z)$

61. $\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
$\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
$\dfrac{\partial w}{\partial z} = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

63. $F_x(x, y, z) = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$
$F_y(x, y, z) = \dfrac{y}{x^2 + y^2 + z^2}$
$F_z(x, y, z) = \dfrac{z}{x^2 + y^2 + z^2}$

65. $f_x = 3;\ f_y = 1;\ f_z = 2$

67. $f_x = 1;\ f_y = 1;\ f_z = 1$

69. $f_x = 0;\ f_y = 0;\ f_z = 1$

71. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x$
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y$

73. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6$
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2$

75. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{-xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$

77. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x \tan y$
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2e^x \sec^2 y \tan y$
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^x \sec^2 y$

79. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -y^2 \cos xy$
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x^2 \cos xy$
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -xy \cos xy - \operatorname{sen} xy$

81. $x = 2, y = -2$ **83.** $x = -6, y = 4$

85. $x = 1, y = 1$ **87.** $x = 0, y = 0$

89. $\partial z/\partial x = \sec y$
$\partial z/\partial y = x \sec y \tan y$
$\partial^2 z/\partial x^2 = 0$
$\partial^2 z/\partial y^2 = x \sec y(\sec^2 y + \tan^2 y)$
$\partial^2 z/\partial y \partial x = \partial^2 z/\partial x \partial y = \sec y \tan y$
No existen valores de x y y tales que $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$.

91. $\partial z/\partial x = (y^2 - x^2)/[x(x^2 + y^2)]$
$\partial z/\partial y = -2y/(x^2 + y^2)$
$\partial^2 z/\partial x^2 = (x^4 - 4x^2y^2 - y^4)/[x^2(x^2 + y^2)^2]$
$\partial^2 z/\partial y^2 = 2(y^2 - x^2)/(x^2 + y^2)^2$
$\partial^2 z/\partial y \partial x = \partial^2 z/\partial x \partial y = 4xy/(x^2 + y^2)^2$
No existen valores de x y y tales que $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$.

93. $f_{xyy}(x, y, z) = f_{yxy}(x, y, z) = f_{yyx}(x, y, z) = 0$

95. $f_{xyy}(x, y, z) = f_{yxy}(x, y, z) = f_{yyx}(x, y, z) = z^2 e^{-x} \operatorname{sen} yz$

97. $\partial^2 z/\partial x^2 + \partial^2 z/\partial y^2 = 0 + 0 = 0$

99. $\partial^2 z/\partial x^2 + \partial^2 z/\partial y^2 = e^x \operatorname{sen} y - e^x \operatorname{sen} y = 0$

101. $\partial^2 z/\partial t^2 = -c^2 \operatorname{sen}(x - ct) = c^2(\partial^2 z/\partial x^2)$

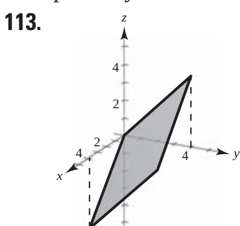
103. $\partial^2 z/\partial t^2 = -c^2/(x + ct)^2 = c^2(\partial^2 z/\partial x^2)$

105. $\partial z/\partial t = -e^{-t} \cos x/c = c^2(\partial^2 z/\partial x^2)$

107. Sí, $f(x, y) = \cos(3x - 2y)$. **109.** 0

111. Si $z = f(x, y)$, entonces para encontrar f_x se considera a y como constante y se deriva con respecto a x. De la misma forma, para encontrar f_y se considera a x como constante y se deriva con respecto a y.

113.



115. Las derivadas parciales combinadas son iguales. Ver teorema 13.3.

117. *a*) 72 *b*) 72

119. $IQ_M = \dfrac{100}{C},\ IQ_M(12, 10) = 10$

El IQ crece con una razón de 10 puntos por año de edad mental cuando la edad mental es de 12 y la edad cronológica es de 10.

$IQ_C = -\dfrac{100M}{C^2},\ IQ_C(12, 10) = -12$

El IQ disminuye con una razón de 12 puntos por año de edad mental cuando la edad mental es de 12 y la edad cronológica es de 10.

121. Un incremento en el costo de la comida y alojamiento o en el de la matrícula causará una disminución del número de solicitantes.

123. $\partial T/\partial x = -2.4°/\text{m},\ \partial T/\partial y = -9°/\text{m}$

125. $T = PV/(nR) \implies \partial T/\partial P = V/(nR)$
$P = nRT/V \implies \partial P/\partial V = -nRT/V^2$
$V = nRT/P \implies \partial V/\partial T = nR/P$
$\partial T/\partial P \cdot \partial P/\partial V \cdot \partial V/\partial T = -nRT/(VP) = -nRT/(nRT) = -1$

127. *a*) $\partial z/\partial x = -0.92;\ \partial z/\partial y = 1.03$
b) Cuando el consumo de la leche de sabor (x) crece, el consumo de las leches light y descremada (z) disminuye. Cuando el consumo de la leche baja en grasas (y) disminuye, el consumo de la leche descremada también disminuye.

129. Falso; sea $z = x + y + 1$. **131.** Verdadero

133. *a*) $f_x(x, y) = \dfrac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$

$f_y(x, y) = \dfrac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$

b) $f_x(0, 0) = 0,\ f_y(0, 0) = 0$

c) $f_{xy}(0, 0) = -1,\ f_{yx}(0, 0) = 1$

d) f_{xy} o f_{yx} o ambas no son continuas en $(0, 0)$.

135. *a*) $f_x(0, 0) = 1, f_y(0, 0) = 1$

b) $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ no existen cuando $y = -x$.

Sección 13.4 (página 923)

1. $dz = 4xy^3\,dx + 6x^2y^2\,dy$

3. $dz = 2(x\,dx + y\,dy)/(x^2 + y^2)^2$

5. $dz = (\cos y + y \operatorname{sen} x)\,dx - (x \operatorname{sen} y + \cos x)\,dy$

7. $dz = (e^x \operatorname{sen} y)\,dx + (e^x \cos y)\,dy$

9. $dw = 2z^3y\cos x\,dx + 2z^3 \operatorname{sen} x\,dy + 6z^2\,y \operatorname{sen} x\,dz$

11. *a*) $f(2, 1) = 1, f(2.1, 1.05) = 1.05, \Delta z = 0.05$

b) $dz = 0.05$

13. *a*) $f(2, 1) = 11, f(2.1, 1.05) = 10.4875, \Delta z = -0.5125$

b) $dz = -0.5$

15. *a*) $f(2, 1) = e^2 \approx 7.3891, f(2.1, 1.05) = 1.05e^{2.1} \approx 8.5745,$ $\Delta z \approx 1.1854$

b) $dz \approx 1.1084$

17. 0.44 **19.** -0.012

21. Si $z = f(x, y)$ y Δx y Δy son incrementos de x y y, y x y y son variables independientes, entonces el diferencial total de la variable dependiente z es

$dz = (\partial z/\partial x)\,dx + (\partial z/\partial y)\,dy = f_x(x, y)\,\Delta x + f_y(x, y)\,\Delta y.$

23. La aproximación de Δz por dz se llama una aproximación lineal, donde dz representa el cambio en la altura del plano tangente a la superficie en el punto $P(x_0, y_0)$.

25. $dA = h\,dl + l\,dh$

Δh dA $\Delta A - dA$
h dA
l Δl

$\Delta A - dA = dl\,dh$

27.

Δr	Δh	dV	ΔV	$\Delta V - dV$
0.1	0.1	8.3776	8.5462	0.1686
0.1	-0.1	5.0265	5.0255	-0.0010
0.001	0.002	0.1005	0.1006	0.0001
-0.0001	0.0002	-0.0034	-0.0034	0.0000

29. *a*) $dz = -0.92\,dx + 1.03\,dy$

b) $dz = \pm 0.4875;\ dz/z \approx 8.1\%$

31. 10% **33.** $dC = \pm 2.4418;\ dC/C = 19\%$

35. *a*) $V = 18 \operatorname{sen} \theta \text{ ft}^3;\ \theta = \pi/2$

b) 1.047 ft^3

37. 10% **39.** $L \approx 8.096 \times 10^{-4} \pm 6.6 \times 10^{-6}$ microhenrys

41. Las respuestas varían. Ejemplo:

$\varepsilon_1 = \Delta x$

$\varepsilon_2 = 0$

43. Las respuestas varían. Ejemplo:

$\varepsilon_1 = y\,\Delta x$

$\varepsilon_2 = 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2$

45 a 47. Demostraciones

Sección 13.5 (página) 931

1. $26t$ **3.** $e^t(\operatorname{sen} t + \cos t)$ **5.** *a*) y *b*) $-e^{-t}$

7. *a*) y *b*) $2e^{2t}$ **9.** *a*) y *b*) $3(2t^2 - 1)$

11. $-11\sqrt{29}/29 \approx -2.04$ **13.** $\dfrac{4}{(e^t + e^{-t})^2};\ 1$

15. $\partial w/\partial s = 4s, 4$
$\partial w/\partial t = 4t, 0$

17. $\partial w/\partial s = 5\cos(5s - t), 0$
$\partial w/\partial t = -\cos(5s - t), 0$

19. $\partial w/\partial r = 2r/\theta^2$
$\partial w/\partial \theta = -2r^2/\theta^3$

21. $\partial w/\partial r = 0$
$\partial w/\partial \theta = 1$

23. $\dfrac{\partial w}{\partial s} = t^2(3s^2 - t^2)$

$\dfrac{\partial w}{\partial t} = 2st(s^2 - 2t^2)$

25. $\dfrac{\partial w}{\partial s} = te^{s^2 - t^2}(2s^2 + 1)$

$\dfrac{\partial w}{\partial t} = se^{s^2 - t^2}(1 - 2t^2)$

27. $\dfrac{y - 2x + 1}{2y - x + 1}$ **29.** $-\dfrac{x^2 + y^2 + x}{x^2 + y^2 + y}$

31. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-x}{z}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-y}{z}$

33. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{x}{y + z}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{z}{y + z}$

35. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-\sec^2(x + y)}{\sec^2(y + z)}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = -1 - \dfrac{\sec^2(x + y)}{\sec^2(y + z)}$

37. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{(ze^{xz} + y)}{xe^{xz}}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = -e^{-xz}$

39. $\dfrac{\partial w}{\partial x} = -\dfrac{y + w}{x - z}$

$\dfrac{\partial w}{\partial y} = -\dfrac{x + z}{x - z}$

$\dfrac{\partial w}{\partial z} = \dfrac{w - y}{x - z}$

41. $\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{y \operatorname{sen} xy}{z}$

$\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{x \operatorname{sen} xy - z\cos yz}{z}$

$\dfrac{\partial w}{\partial z} = -\dfrac{y\cos yz + w}{z}$

43. *a*) $f(tx, ty) = \dfrac{(tx)(ty)}{\sqrt{(tx)^2 + (ty)^2}} = t\left(\dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = tf(x, y);\ n = 1$

b) $xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1f(x, y)$

45. *a*) $f(tx, ty) = e^{tx/ty} = e^{x/y} = f(x, y);\ n = 0$

b) $xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = \dfrac{xe^{x/y}}{y} - \dfrac{xe^{x/y}}{y} = 0$

47. 47 **49.** $dw/dt = (\partial w/\partial x \cdot dx/dt) + (\partial w/\partial y \cdot dy/dt)$

51. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}$

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{f_x(x, y, z)}{f_z(x, y, z)}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{f_y(x, y, z)}{f_z(x, y, z)}$

53. $4\,608\,\pi$ pulg^3/min; 624π pulg^2/min

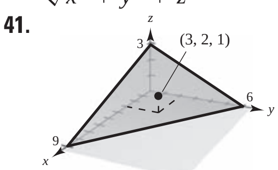
55. $\dfrac{dT}{dt} = \dfrac{1}{mR}\left[V\dfrac{dp}{dt} + p\dfrac{dV}{dt}\right]$ **57.** $28m$ cm^2/s

59. Demostración **61.** *a*) Demostración *b*) Demostración

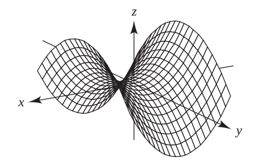
63 a 65. Demostraciones

Sección 13.6 (página 942)

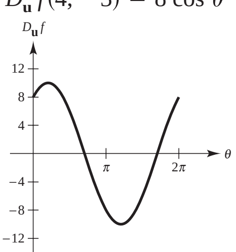
1. 1 **3.** -1 **5.** $-e$ **7.** $-\frac{7}{25}$ **9.** $2\sqrt{3}/3$ **11.** $\frac{8}{3}$
13. $\sqrt{2}(x + y)$ **15.** $\left[(2 + \sqrt{3})/2\right]\cos(2x + y)$ **17.** 6
19. $-8/\sqrt{5}$ **21.** $3\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$ **23.** $4\mathbf{i} - \mathbf{j}$ **25.** $6\mathbf{i} - 10\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$
27. $3\sqrt{2}$ **29.** $2\sqrt{5}/5$ **31.** $2[(x + y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}]; 2\sqrt{2}$
33. $\tan y\mathbf{i} + x\sec^2 y\mathbf{j}, \sqrt{17}$ **35.** $e^{-x}(-y\mathbf{i} + \mathbf{j}); \sqrt{26}$
37. $\dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, 1$ **39.** $yz(yz\mathbf{i} + 2xz\mathbf{j} + 2xy\mathbf{k}); \sqrt{33}$
41.



43. *a*) $-5\sqrt{2}/12$ *b*) $\frac{3}{5}$ *c*) $-\frac{1}{5}$ *d*) $-11\sqrt{10}/60$
45. $\sqrt{13}/6$
47. *a*) Las respuestas varían. Ejemplo: $-4\mathbf{i} + \mathbf{j}$
b) $-\frac{2}{5}\mathbf{i} + \frac{1}{10}\mathbf{j}$ *c*) $\frac{2}{5}\mathbf{i} - \frac{1}{10}\mathbf{j}$
En dirección opuesta al gradiente
49. *a*)



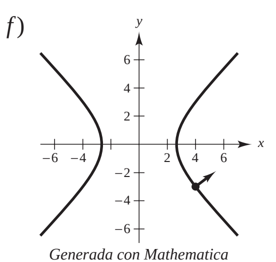
b) $D_{\mathbf{u}}f(4, -3) = 8\cos\theta + 6\operatorname{sen}\theta$



Generada con Mathematica

c) $\theta \approx 2.21, \theta \approx 5.36$
Direcciones en las cuales no hay cambio en f
d) $\theta \approx 0.64, \theta \approx 3.79$
Direcciones de mayor tasa de cambio en f
e) 10; magnitud de la mayor razón de cambio

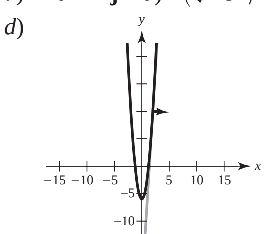
f)



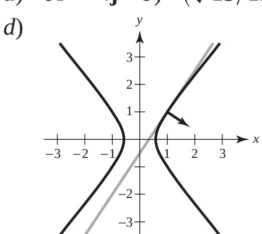
Generada con Mathematica

Ortogonal a la curva de nivel

51. $-2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ **53.** $3\mathbf{i} - \mathbf{j}$
55. *a*) $16\mathbf{i} - \mathbf{j}$ *b*) $(\sqrt{257}/257)(16\mathbf{i} - \mathbf{j})$ *c*) $y = 16x - 22$
d)



57. *a*) $6\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ *b*) $(\sqrt{13}/13)(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j})$ *c*) $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$
d)

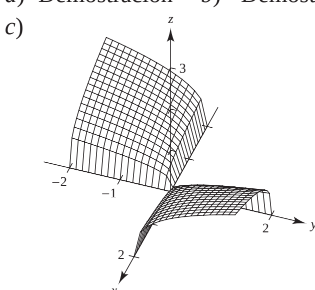


59. La derivada direccional de $z = f(x, y)$ en la dirección de $\mathbf{u} = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$ es

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta) - f(x, y)}{t}$$

si el límite existe.
61. Ver la definición en la página 936. Ver las propiedades en la página 937.
63. El vector gradiente es normal a las curvas de nivel.
65. $\frac{1}{625}(7\mathbf{i} - 24\mathbf{j})$
67. **69.** $y^2 = 10x$
71. *a*)

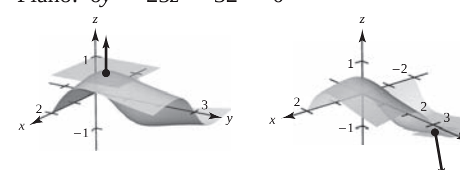
b) El calor no cambia en las direcciones perpendiculares al gradiente: $\pm(\mathbf{i} - 6\mathbf{j})$.
c) El aumento es mayor en la dirección del gradiente: $-3\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}$.
73. Verdadero **75.** Verdadero
77. $f(x, y, z) = e^x\cos y + \frac{1}{2}z^2 + C$
79. *a*) Demostración *b*) Demostración
c)



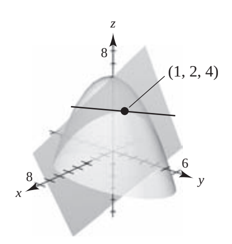
Sección 13.7 (página 951)

1. La superficie de nivel se puede escribir como $3x - 5y + 3z = 15$, que es la ecuación de un plano en el espacio.
3. La superficie de nivel se puede escribir como $4x^2 + 9y^2 - 4z^2 = 0$, que es la ecuación de un cono elíptico en el espacio que se encuentra en el eje z.

5. $\frac{1}{13}(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k})$ **7.** $(\sqrt{6}/6)(\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k})$
9. $(\sqrt{145}/145)(12\mathbf{i} - \mathbf{k})$ **11.** $\frac{1}{13}(4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 12\mathbf{k})$
13. $(\sqrt{3}/3)(\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$ **15.** $(\sqrt{113}/113)(-\mathbf{i} - 6\sqrt{3}\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$
17. $4x + 2y - z = 2$ **19.** $3x + 4y - 5z = 0$
21. $2x - 2y - z = 2$ **23.** $2x + 3y + 3z = 6$
25. $3x + 4y - 25z = 25(1 - \ln 5)$ **27.** $x - 4y + 2z = 18$
29. $6x - 3y - 2z = 11$ **31.** $x + y + z = 9$
$x - 3 = y - 3 = z - 3$
33. $2x + 4y + z = 14$
$\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-4}{1}$
35. $6x - 4y - z = 5$
$\dfrac{x-3}{6} = \dfrac{y-2}{-4} = \dfrac{z-5}{-1}$
37. $10x + 5y + 2z = 30$
$\dfrac{x-1}{10} = \dfrac{y-2}{5} = \dfrac{z-5}{2}$
39. $x - y + 2z = \pi/2$
$\dfrac{(x-1)}{1} = \dfrac{(y-1)}{-1} = \dfrac{z-(\pi/4)}{2}$
41. *a*) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{1}$ *b*) $\dfrac{1}{2}$, no son ortogonales
43. *a*) $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-4}{-3}$ *b*) $\dfrac{16}{25}$, no son ortogonales
45. *a*) $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-1}{5} = \dfrac{z-2}{-4}$ *b*) 0, son ortogonales
47. 86.0° **49.** 77.4° **51.** $(0, 3, 12)$ **53.** $(2, 2, -4)$
55. $(0, 0, 0)$ **57.** Demostración
59. *a*) Demostración *b*) Demostración
61. $(-2, 1, -1)$ o $(2, -1, 1)$
63. $F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$
65. Las respuestas varían.
67. *a*) Recta: $x = 1, y = 1, z = 1 - t$
Plano: $z = 1$
b) Recta: $x = -1, y = 2 + \frac{6}{25}t, z = -\frac{4}{5} - t$
Plano: $6y - 25z - 32 = 0$
c)



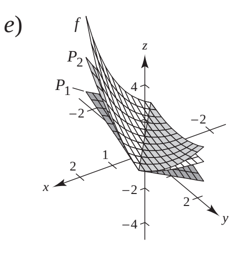
69. *a*) $x = 1 + t$
$y = 2 - 2t$
$z = 4$
$\theta \approx 48.2°$
b)



71. $F(x, y, z) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1$
$F_x(x, y, z) = 2x/a^2$
$F_y(x, y, z) = 2y/b^2$
$F_z(x, y, z) = 2z/c^2$
Plano: $\dfrac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \dfrac{2y_0}{b^2}(y - y_0) + \dfrac{2z_0}{c^2}(z - z_0) = 0$
$\dfrac{x_0x}{a^2} + \dfrac{y_0y}{b^2} + \dfrac{z_0z}{c^2} = 1$
73. $F(x, y, z) = a^2x^2 + b^2y^2 - z^2$
$F_x(x, y, z) = 2a^2x$
$F_y(x, y, z) = 2b^2y$
$F_z(x, y, z) = -2z$
Plano: $2a^2x_0(x - x_0) + 2b^2y_0(y - y_0) - 2z_0(z - z_0) = 0$
$a^2x_0x + b^2y_0y - z_0z = 0$
Por lo tanto, el plano pasa por el origen.
75. *a*) $P_1(x, y) = 1 + x - y$
b) $P_2(x, y) = 1 + x - y + \frac{1}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2$
c) Si $x = 0$, $P_2(0, y) = 1 - y + \frac{1}{2}y^2$.
Éste es el polinomio de Taylor de segundo grado para e^{-y}.
Si $y = 0$, $P_2(x, 0) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$.
Éste es el polinomio de Taylor de segundo grado para e^x.
d)

x	y	$f(x, y)$	$P_1(x, y)$	$P_2(x, y)$
0	0	1	1	1
0	0.1	0.9048	0.9000	0.9050
0.2	0.1	1.1052	1.1000	1.1050
0.2	0.5	0.7408	0.7000	0.7450
1	0.5	1.6487	1.5000	1.6250

e)

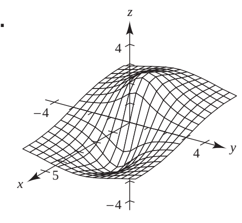


77. Demostración

Sección 13.8 (página 960)

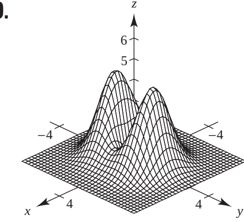
1. Mínimo relativo: $(1, 3, 0)$ **3.** Mínimo relativo: $(0, 0, 1)$
5. Mínimo relativo: $(-1, 3, -4)$
7. Mínimo relativo: $(1, 1, 11)$
9. Máximo relativo: $(5, -1, 2)$
11. Mínimo relativo: $(3, -4, -5)$
13. Mínimo relativo: $(0, 0, 0)$
15. Máximo relativo: $(0, 0, 4)$

17.



Máximo relativo: $(-1, 0, 2)$
Mínimo relativo: $(1, 0, -2)$

19.



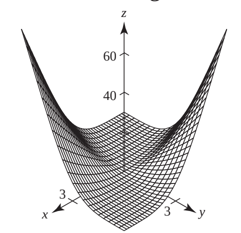
Mínimo relativo: $(0, 0, 0)$
Máximos relativos: $(0, \pm 1, 4)$
Puntos silla: $(\pm 1, 0, 1)$

21. Máximo relativo: $(40, 40, 3\,200)$

23. Puntos silla: $(0, 0, 0)$ **25.** Puntos silla: $(1, -1, -1)$

27. No hay números críticos.

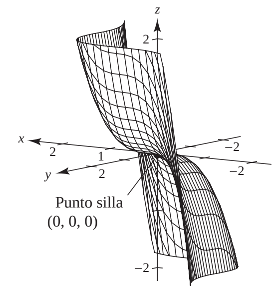
29. z nunca es negativo. Mínimo: $z = 0$ cuando $x = y \neq 0$.



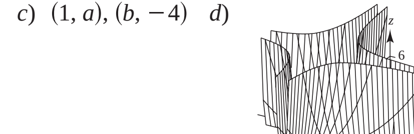
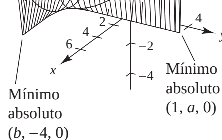
31. Información insuficiente. **33.** Punto silla.

35. $-4 < f_{xy}(3, 7) < 4$

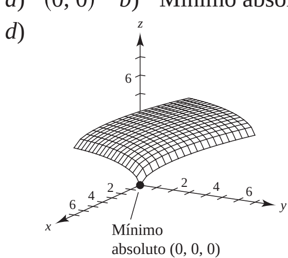
37. *a*) $(0, 0)$ *b*) Punto silla. $(0, 0, 0)$ *c*) $(0, 0)$
d)



39. *a*) $(1, a), (b, -4)$ *b*) Mínimos absolutos: $(1, a, 0), (b, -4, 0)$
c) $(1, a), (b, -4)$ *d*)

41. *a*) $(0, 0)$ *b*) Mínimo absoluto: $(0, 0, 0)$ *c*) $(0, 0)$
d)



43. Mínimo relativo: $(0, 3, -1)$

45. Máximo absoluto: $(4, 0, 21)$
Mínimo absoluto: $(4, 2, -11)$

47. Máximo absoluto: $(0, 1, 10)$
Mínimo absoluto: $(1, 2, 5)$

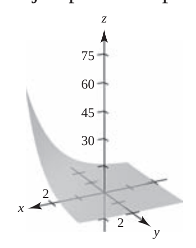
49. Máximos absolutos: $(\pm 2, 4, 28)$
Mínimo absoluto: $(0, 1, -2)$

51. Máximos absolutos: $(-2, -1, 9), (2, 1, 9)$
Mínimos absolutos: $(x, -x, 0),\ |x| \leq 1$

53. Máximo absoluto: $(1, 1, 1)$
Mínimo absoluto: $(0, 0, 0)$

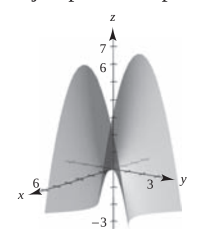
55. El punto A es un punto silla.

57. Las respuestas varían.
Ejemplo de respuesta:



No hay extremos

59. Las respuestas varían.
Ejemplo de respuesta:



Punto silla

61. Falso. Sea $f(x, y) = 1 - |x| - |y|$ en el punto $(0, 0, 1)$.

63. Falso. Sea $f(x, y) = x^2y^2$ (ver ejemplo 4 de la página 958).

Sección 13.9 (página 966)

1. $\sqrt{3}$ **3.** $\sqrt{7}$ **5.** $x = y = z = 3$ **7.** 10, 10, 10

9. 9 pies × 9 pies × 8.25 pies; \$26.73

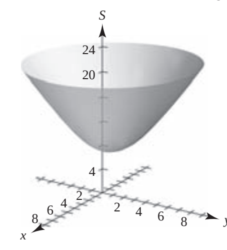
11. Sea $a + b + c = k$.
$V = 4\pi abc/3 = \frac{4}{3}\pi ab(k - a - b) = \frac{4}{3}\pi(kab - a^2b - ab^2)$
$\left.\begin{array}{l} V_a = \frac{4}{3}\pi(kb - 2ab - b^2) = 0 \\ V_b = \frac{4}{3}\pi(ka - a^2 - 2ab) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} kb - 2ab - b^2 = 0 \\ kb - a^2 - 2ab = 0 \end{array}$
Así, $a = b$ y $b = k/3$. Por tanto, $a = b = c = k/3$.

13. Sean x, y y z la longitud, ancho y altura, respectivamente, y sea V_0 el volumen dado. Entonces $V_0 = xyz$ y $z = V_0/xy$. El área de la superficie es
$S = 2xy + 2yz + 2xz = 2(xy + V_0/x + V_0/y)$.
$\left.\begin{array}{l} S_x = 2(y - V_0/x^2) = 0 \\ S_y = 2(x - V_0/y^2) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x^2y - V_0 = 0 \\ xy^2 - V_0 = 0 \end{array}$
Así, $x = \sqrt[3]{V_0}$, $y = \sqrt[3]{V_0}$, y $z = \sqrt[3]{V_0}$.

15. $x_1 = 3$; $x_2 = 6$ **17.** Demostración

19. $x = \sqrt{2}/2 \approx 0.707$ km
$y = \left(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}\right)/6 \approx 1.284$ km

21. *a*) $S = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x + 2)^2 + (y - 2)^2} + \sqrt{(x - 4)^2 + (y - 2)^2}$



La superficie tiene un mínimo.

b) $S_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{x + 2}{\sqrt{(x + 2)^2 + (y - 2)^2}} + \dfrac{x - 4}{\sqrt{(x - 4)^2 + (y - 2)^2}}$

$S_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{y - 2}{\sqrt{(x + 2)^2 + (y - 2)^2}} + \dfrac{y - 2}{\sqrt{(x - 4)^2 + (y - 2)^2}}$

c) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{2}{\sqrt{10}}\right)\mathbf{j}$

$\theta \approx 186.0°$

d) $t = 1.344$; $(x_2, y_2) \approx (0.05, 0.90)$

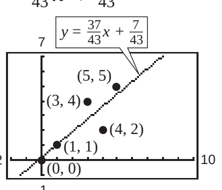
e) $(x_4, y_4) \approx (0.06, 0.45)$; $S = 7.266$

f) $-\nabla S(x, y)$ da la dirección de la máxima tasa de decrecimiento de S. Usar $\nabla S(x, y)$ para encontrar un máximo.

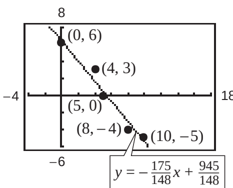
23. Expresar la ecuación a maximizar o minimizar como una función de dos variables. Tomar las derivadas parciales e igualarlas a cero o indefinido para obtener los puntos críticos. Utilizar el criterio de las segundas derivadas parciales para extremos relativos utilizando los puntos críticos. Verificar los puntos frontera.

25. *a*) $y = \frac{3}{4}x + \frac{4}{3}$ *b*) $\frac{1}{6}$ **27.** *a*) $y = -2x + 4$ *b*) 2

29. $y = \frac{37}{43}x + \frac{7}{43}$

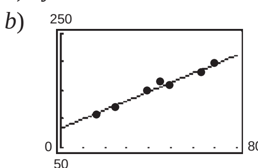


31. $y = -\frac{175}{148}x + \frac{945}{148}$



33. *a*) $y = 1.6x + 84$

b)



c) 1.6

35. $y = 14x + 19$

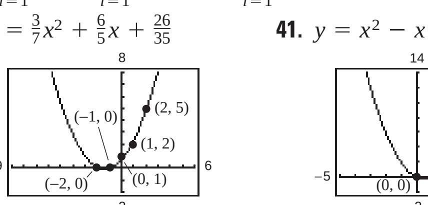
41.4 bushels por acre

37. $a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i$

$a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + cn = \sum_{i=1}^{n} y_i$

39. $y = \frac{3}{7}x^2 + \frac{6}{5}x + \frac{26}{35}$ **41.** $y = x^2 - x$

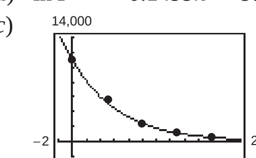


43. *a*) $y = -0.22x^2 + 9.66x - 1.79$

b)

45. *a*) $\ln P = -0.1499h + 9.3018$ *b*) $P = 10{,}957.7e^{-0.1499h}$

c)

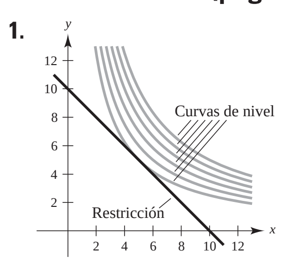


d) Demostración

47. Demostración

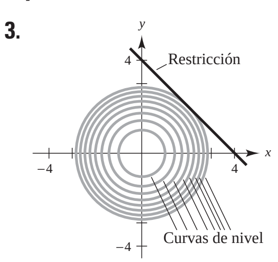
Sección 13.10 (página 976)

1.



$f(5, 5) = 25$

3.



$f(2, 2) = 8$

5. $f(1, 2) = 5$ **7.** $f(25, 50) = 2\,600$

9. $f(1, 1) = 2$ **11.** $f(3, 3, 3) = 27$ **13.** $f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$

15. Máximos: $f\left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right) = \frac{5}{2}$

$f\left(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\right) = \frac{5}{2}$

Mínimos: $f\left(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right) = -\frac{1}{2}$

$f\left(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\right) = -\frac{1}{2}$

17. $f(8, 16, 8) = 1024$ **19.** $\sqrt{2}/2$ **21.** $3\sqrt{2}$ **23.** $\sqrt{11}/2$

25. 0.188 **27.** $\sqrt{3}$ **29.** $(-4, 0, 4)$

31. Los problemas de optimización que tienen restricciones sobre los valores que pueden ser usados para producir las soluciones óptimas se conocen como problemas de optimización restringidos.

33. $\sqrt{3}$ **35.** $x = y = z = 3$

37. 9 pies × 9 pies × 8.25 pies; \$26.73 **39.** $a = b = c = k/3$

41. Demostración **43.** $2\sqrt{3}a/3 \times 2\sqrt{3}b/3 \times 2\sqrt{3}c/3$

45. $\sqrt[3]{360} \times \sqrt[3]{360} \times \frac{4}{3}\sqrt[3]{360}$ pies

47. $r = \sqrt[3]{\dfrac{v_0}{2\pi}}$ y $h = 2\sqrt[3]{\dfrac{v_0}{2\pi}}$ **49.** Demostración

51. $P(15\,625/18, 3\,125) \approx 226\,869$

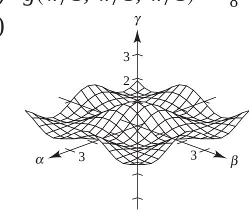
53. $x \approx 191.3$

$y \approx 688.7$

Costo ≈ \$55 095.60

55. *a*) $g(\pi/3, \pi/3, \pi/3) = \frac{1}{8}$

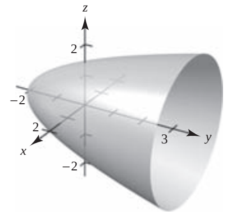
b)



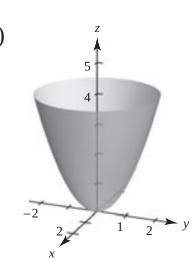
Los valores máximos ocurren cuando $\alpha = \beta$.

Ejercicios de repaso para el capítulo 13 (página 978)

1.



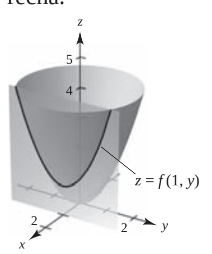
3. *a*)



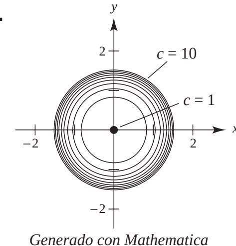
b) *g* es una traslación vertical de *f* dos unidades hacia arriba.

c) *g* es una traslación horizontal de *f* dos unidades hacia la derecha.

d)

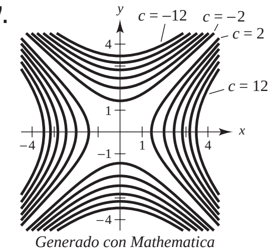


5.



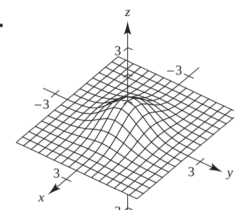
Generado con Mathematica

7.



Generado con Mathematica

9.



11. Límite: $\frac{1}{2}$
Continua excepto en $(0, 0)$

13. Límite: 0
Continua

15. $f_x(x, y) = e^x \cos y$
$f_y(x, y) = -e^x \operatorname{sen} y$

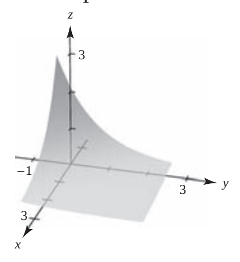
17. $\partial z/\partial x = -e^{-x}$
$\partial z/\partial y = -e^{-y}$

19. $g_x(x, y) = [y(y^2 - x^2)]/(x^2 + y^2)^2$
$g_y(x, y) = [x(x^2 - y^2)]/(x^2 + y^2)^2$

21. $f_x(x, y, z) = -yz/(x^2 + y^2)$
$f_y(x, y, z) = xz/(x^2 + y^2)$
$f_z(x, y, z) = \arctan y/x$

23. $u_x(x, t) = cne^{-n^2t} \cos nx$
$u_t(x, t) = -cn^2e^{-n^2t} \operatorname{sen} nx$

25. Las respuestas varían. Ejemplo:



27. $f_{xx}(x, y) = 6$
$f_{yy}(x, y) = 12y$
$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = -1$

29. $h_{xx}(x, y) = -y \cos x$
$h_{yy}(x, y) = -x \operatorname{sen} y$
$h_{xy}(x, y) = h_{yx}(x, y) = \cos y - \operatorname{sen} x$

31. $\partial^2 z/\partial x^2 + \partial^2 z/\partial y^2 = 2 + (-2) = 0$

33. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{6x^2y - 2y^3}{(x^2 + y^2)^3} + \dfrac{-6x^2y + 2y^3}{(x^2 + y^2)^3} = 0$

35. $(xy \cos xy + \operatorname{sen} xy)\, dx + (x^2 \cos xy)\, dy$

37. 0.6538 cm, 5.03% **39.** $\pm\pi$ pulg^3

41. $dw/dt = (8t - 1)/(4t^2 - t + 4)$

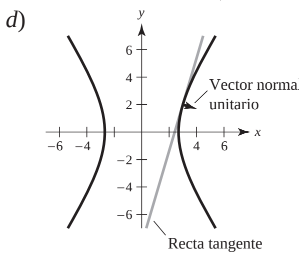
43. $\partial w/\partial r = (4r^2t - 4rt^2 - t^3)/(2r - t)^2$
$\partial w/\partial t = (4r^2t - rt^2 + 4r^3)/(2r - t)^2$

45. $\partial z/\partial x = (-2x - y)/(y + 2z)$
$\partial z/\partial y = (-x - 2y - z)/(y + 2z)$

47. -50 **49.** $\frac{2}{3}$ **51.** $\langle 4, 4\rangle, 4\sqrt{2}$ **53.** $\langle -\frac{1}{2}, 0\rangle, \frac{1}{2}$

55. *a*) $54\mathbf{i} - 16\mathbf{j}$ *b*) $\dfrac{27}{\sqrt{793}}\mathbf{i} - \dfrac{8}{\sqrt{793}}\mathbf{j}$ *c*) $y = \dfrac{27}{8}x - \dfrac{65}{8}$

d)

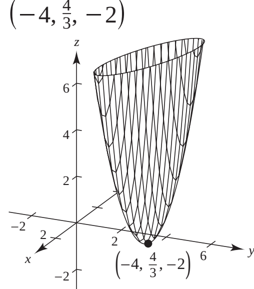


57. Plano tangente: $4x + 4y - z = 8$
Recta normal: $x = 2 + 4t, y = 1 + 4t, z = 4 - t$

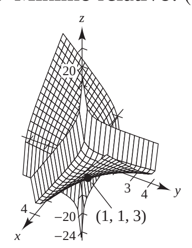
59. Plano tangente: $z = 4$
Recta normal: $x = 2, y = -3, z = 4 + t$

61. $(x - 2)/1 = (y - 2)/1 = (z - 5)/(-4)$ **63.** $\theta \approx 36.7°$

65. Mínimo relativo: $\left(-4, \frac{4}{3}, -2\right)$



67. Mínimo relativo: $(1, 1, 3)$



69. Las curvas de nivel son hipérbolas. El punto crítico (0,0) puede ser un punto silla o un extremo.

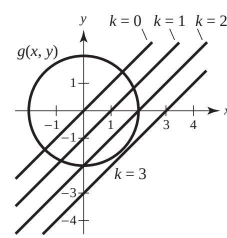
71. $x_1 = 94, x_2 = 157$ **73.** $f(49.4, 253) = 13\,201.8$
75. *a*) $y = 0.004x^2 + 0.07x + 19.4$ *b*) 50.6 kg
77. Máximo: $f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$
79. $x = \sqrt{2}/2 \approx 0.707$ km; $y = \sqrt{3}/3 \approx 0.577$ km;
$z = \left(60 - 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right)/6 \approx 8.716$ km

SP Solución de problemas (página 981)

1. *a*) 12 unidades cuadradas *b*) Demostración *c*) Demostración

3. *a*) $y_0z_0(x - x_0) + x_0z_0(y - y_0) + x_0y_0(z - z_0) = 0$
b) $x_0y_0z_0 = 1 \Longrightarrow z_0 = 1/x_0y_0$
Entonces el plano tangente es
$$y_0\left(\frac{1}{x_0y_0}\right)(x-x_0) + x_0\left(\frac{1}{x_0y_0}\right)(y-y_0) + x_0y_0\left(z - \frac{1}{x_0y_0}\right) = 0.$$
Intersecciones: $(3x_0, 0, 0), (0, 3y_0, 0), \left(0, 0, \frac{3}{x_0y_0}\right)$
$V = \frac{1}{3}bh = \frac{9}{2}$

5. *a*)



Valor máximo: $2\sqrt{2}$

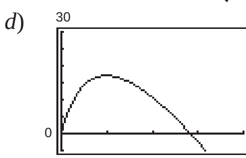
b)

Valores máximo y mínimo: 0
El método de los multiplicadores de Lagrange no se aplica porque $\nabla g(x_0, y_0) = \mathbf{0}$.

7. $2\sqrt[3]{150} \times 2\sqrt[3]{150} \times 5\sqrt[3]{150}/3$

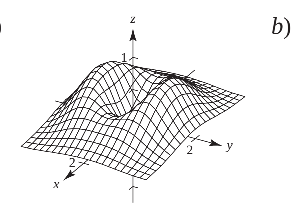
9. *a*)
$$\begin{aligned} x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} &= xCy^{1-a}ax^{a-1} + yCx^a(1-a)y^{1-a-1} \\ &= ax^aCy^{1-a} + (1-a)x^aC(y^{1-a}) \\ &= Cx^ay^{1-a}[a + (1-a)] \\ &= Cx^ay^{1-a} \\ &= f(x, y) \end{aligned}$$
b)
$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= C(tx)^a(ty)^{1-a} \\ &= Ctx^ay^{1-a} \\ &= tCx^ay^{1-a} \\ &= tf(x, y) \end{aligned}$$

11. *a*) $x = 32\sqrt{2}t$
$y = 32\sqrt{2}t - 16t^2$
b) $\alpha = \arctan\left(\frac{y}{x + 50}\right) = \arctan\left(\frac{32\sqrt{2}t - 16t^2}{32\sqrt{2}t + 50}\right)$
c) $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{-16\left(8\sqrt{2}t^2 + 25t - 25\sqrt{2}\right)}{64t^4 - 256\sqrt{2}t^3 + 1024t^2 + 800\sqrt{2}t + 625}$
d)



No; la razón de cambio de α es mayor cuando el proyectil está más cerca de la cámara.
e) α es máximo cuando $t = 0.98$ segundos.
No; el proyectil alcanza su máxima altura cuando $t = \sqrt{2} \approx 1.41$ segundos.

13. *a*)



Mínimo: (0, 0, 0)
Máximos: $(0, \pm1, 2e^{-1})$
Puntos silla: $(\pm1, 0, e^{-1})$

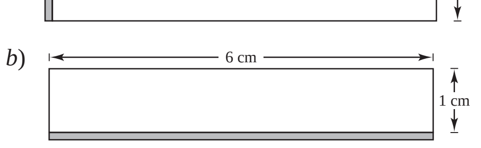
b)

Mínimos: $(\pm1, 0, -e^{-1})$
Máximos: $(0, \pm1, 2e^{-1})$
Puntos silla: (0, 0, 0)

c) $\alpha > 0$
Mínimo: (0, 0, 0)
Máximos: $(0, \pm1, \beta e^{-1})$
Puntos silla: $(\pm1, 0, \alpha e^{-1})$

$\alpha < 0$
Mínimos: $(\pm1, 0, \alpha e^{-1})$
Máximos: $(0, \pm1, \beta e^{-1})$
Puntos silla: (0, 0, 0)

15. *a*)



b)

c) Altura
d) $dl = 0.01, dh = 0$: $dA = 0.01$
$dl = 0, dh = 0.01$: $dA = 0.06$

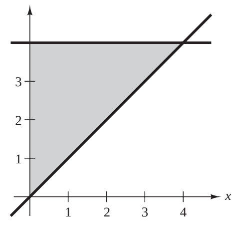
17 a 19. Demostraciones

Capítulo 14

Sección 14.1 (página 990)

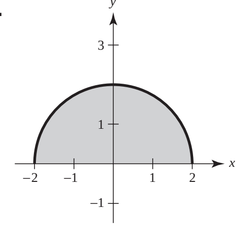
1. $2x^2$ **3.** $y\ln(2y)$ **5.** $(4x^2 - x^4)/2$
7. $(y/2)[(\ln y)^2 - y^2]$ **9.** $x^2(1 - e^{-x^2} - x^2e^{-x^2})$ **11.** 3
13. $\frac{8}{3}$ **15.** $\frac{1}{2}$ **17.** 2 **19.** $\frac{1}{3}$ **21.** 1 629 **23.** $\frac{2}{3}$ **25.** 4
27. $\pi/2$ **29.** $\pi^2/32 + \frac{1}{8}$ **31.** $\frac{1}{2}$ **33.** Diverge **35.** 24
37. $\frac{16}{3}$ **39.** $\frac{8}{3}$ **41.** 5 **43.** πab **45.** $\frac{9}{2}$

47.



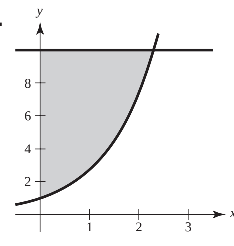
$$\int_0^4\int_x^4 f(x, y)\,dy\,dx$$

49.



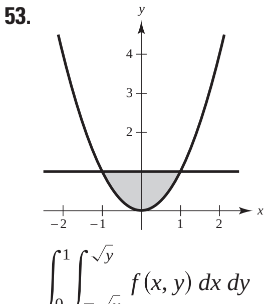
$$\int_0^2\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y)\,dx\,dy$$

51.



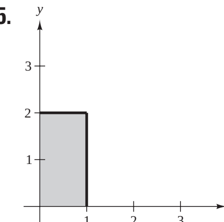
$$\int_0^{\ln 10}\int_{e^x}^{10} f(x, y)\,dy\,dx$$

53.



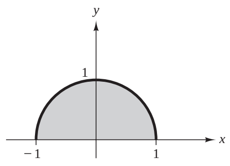
$$\int_0^1\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx\,dy$$

55.



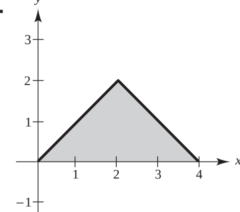
$$\int_0^1\int_0^2 dy\,dx = \int_0^2\int_0^1 dx\,dy = 2$$

57.



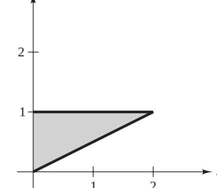
$$\int_0^1\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx\,dy = \int_{-1}^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\,dx = \frac{\pi}{2}$$

59.



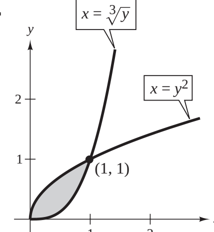
$$\int_0^2\int_0^x dy\,dx + \int_2^4\int_0^{4-x} dy\,dx = \int_0^2\int_y^{4-y} dx\,dy = 4$$

61.



$$\int_0^2\int_{x/2}^1 dy\,dx = \int_0^1\int_0^{2y} dx\,dy = 1$$

63.

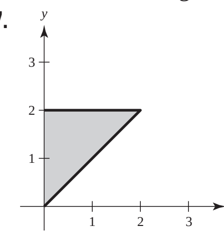


$$\int_0^1\int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} dx\,dy = \int_0^1\int_{x^3}^{\sqrt{x}} dy\,dx = \frac{5}{12}$$

65. La primera integral surge utilizando rectángulos representativos verticales. Las dos segundas surgen utilizando rectángulos representativos horizontales.

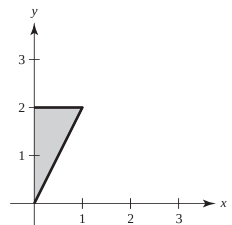
Valor de las integrales: $15\,625\pi/24$

67.



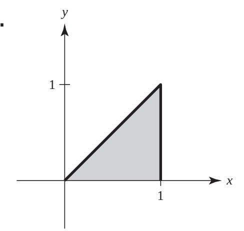
$$\int_0^2\int_x^2 x\sqrt{1+y^3}\,dy\,dx = \frac{26}{9}$$

69.



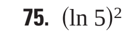
$$\int_0^1\int_{2x}^2 4e^{y^2}\,dy\,dx = e^4 - 1 \approx 53.598$$

71.

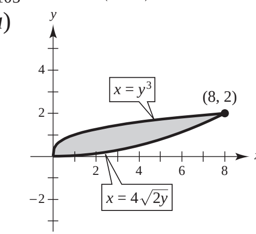


$$\int_0^1\int_y^1 \operatorname{sen} x^2\,dx\,dy = \frac{1}{2}(1-\cos 1) \approx 0.230$$

73. $\frac{1\,664}{105}$ **75.** $(\ln 5)^2$



77. *a*)



b) $\displaystyle\int_0^8\int_{x^2/32}^{\sqrt[3]{x}} (x^2y - xy^2)\,dy\,dx$ *c*) $67\,520/693$

79. 20.5648 **81.** $15\pi/2$

83. Una integral iterada es una integral de una función de varias variables. Se integra con respecto a una variable mientras las otras variables se mantienen constantes.

85. Si los cuatro límites de integración son constantes, la región de integración es rectangular.

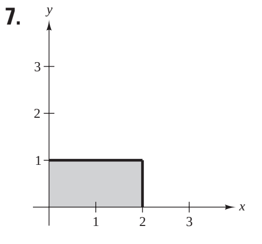
87. Verdadero

Sección 14.2 (página 1000)

1. 24 (la aproximación es exacta)

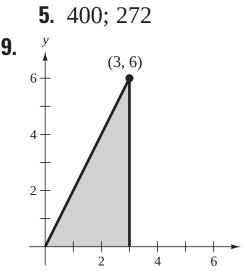
3. Aproximación: 52; Exacto: $\frac{160}{3}$ **5.** 400; 272

7.



8

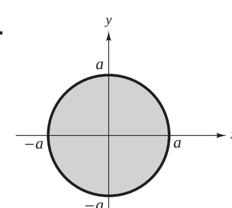
9.



36



11.



0

13. $\int_0^3 \int_0^5 xy\, dy\, dx = \frac{225}{4}$

$\int_0^5 \int_0^3 xy\, dx\, dy = \frac{225}{4}$

15. $\int_1^2 \int_x^{2x} \frac{y}{x^2 + y^2}\, dy\, dx = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2}$

$\int_1^2 \int_1^y \frac{y}{x^2 + y^2}\, dx\, dy + \int_2^4 \int_{y/2}^2 \frac{y}{x^2 + y^2}\, dx\, dy = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2}$

17. $\int_0^1 \int_{4-x}^{4-x^2} -2y\, dy\, dx = -\frac{6}{5}$

$\int_3^4 \int_{4-y}^{\sqrt{4-y}} -2y\, dx\, dy = -\frac{6}{5}$

19. $\int_0^3 \int_{4y/3}^{\sqrt{25-y^2}} x\, dx\, dy = 25$

$\int_0^4 \int_0^{3x/4} x\, dy\, dx + \int_4^5 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} x\, dy\, dx = 25$

21. 4 **23.** 4 **25.** 12 **27.** $\frac{3}{8}$ **29.** 1 **31.** $32\sqrt{2}\pi/3$

33. $\int_0^1 \int_0^x xy\, dy\, dx = \frac{1}{8}$ **35.** $\int_0^2 \int_0^4 x^2\, dy\, dx = \frac{32}{3}$

37. $2\int_0^1 \int_0^x \sqrt{1 - x^2}\, dy\, dx = \frac{2}{3}$

39. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x + y)\, dy\, dx = \frac{16}{3}$

41. $2\int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} (2x - x^2 - y^2)\, dy\, dx$

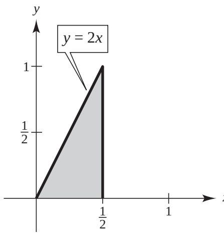
43. $4\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2)\, dy\, dx$

45. $\int_0^2 \int_{-\sqrt{2-2(y-1)^2}}^{\sqrt{2-2(y-1)^2}} (4y - x^2 - 2y^2)\, dx\, dy$

47. $81\pi/2$ **49.** 1.2315 **51.** Demostración

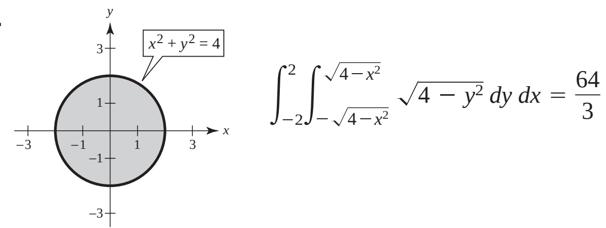


53.



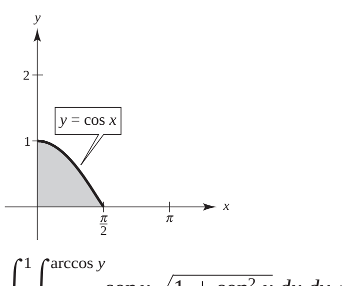
$\int_0^1 \int_{y/2}^{1/2} e^{-x^2}\, dx\, dy = 1 - e^{-1/4} \approx 0.221$

55.



$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4 - y^2}\, dy\, dx = \frac{64}{3}$

57.



$\int_0^1 \int_0^{\arccos y} \operatorname{sen} x \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}\, dx\, dy = \frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)$

59. 2 **61.** $\frac{8}{3}$ **63.** $(e - 1)^2$ **65.** 25 645.24

67. Ver la definición de integral doble en la página 994. La integral doble de una función $f(x, y) \geq 0$ sobre la región de integración da el volumen de esa región.

69. *a*) La caída de nieve total en el país *R*

b) El promedio de caída de nieve en el país *R*

71. No; 6π es el valor más grande posible. **73.** Demostración; $\frac{1}{5}$

75. Demostración; $\frac{7}{27}$ **77.** 2 500 m^3 **79.** *a*) 1.784 *b*) 1.788

81. *a*) 11.057 *b*) 11.041 **83.** d

85. Falso. $V = 8\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$.

87. $\frac{1}{2}(1 - e)$ **89.** R: $x^2 + y^2 \leq 9$ **91.** ≈ 0.82736

93. Problema Putnam A2, 1989

Sección 14.3 (página 1009)

1. Rectangular **3.** Polar

5. La región *R* es un medio círculo de radio 8. Se puede describir en coordenadas polares como

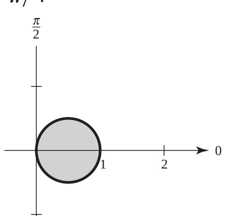
$R = \{(r, \theta): 0 \leq r \leq 8, 0 \leq \theta \leq \pi\}$.

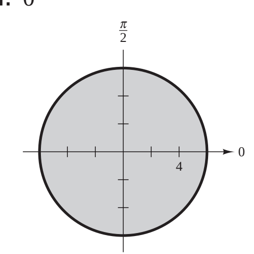
7. La región *R* es una cardioide con $a = b = 3$. Se puede describir en coordenadas polares como

$R = \{(r, \theta): 0 \leq r \leq 3 + 3 \operatorname{sen} \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.

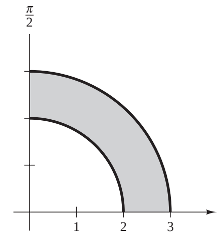


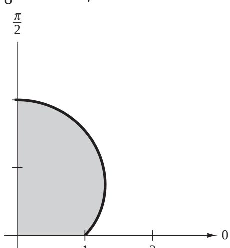
9. $\pi/4$ **11.** 0





13. $5\sqrt{5}\pi/6$ **15.** $\frac{9}{8} + 3\pi^2/32$





17. $a^3/3$ **19.** 4π **21.** $243\pi/10$ **23.** $\frac{2}{3}$ **25.** $(\pi/2)$ sen 1

27. $\int_0^{\pi/4} \int_0^{2\sqrt{2}} r^2\, dr\, d\theta = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3}$

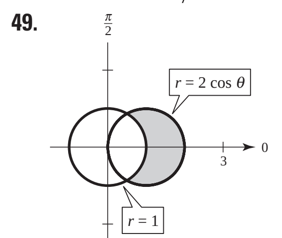
29. $\int_0^{\pi/2}\int_0^2 r^2(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\,dr\,d\theta = \frac{16}{3}$

31. $\int_0^{\pi/4}\int_1^2 r\theta\,dr\,d\theta = \frac{3\pi^2}{64}$ **33.** $\frac{1}{8}$ **35.** $\frac{250\pi}{3}$

37. $\frac{64}{9}(3\pi - 4)$ **39.** $2\sqrt{4 - 2\sqrt[3]{2}}$ **41.** 1.2858

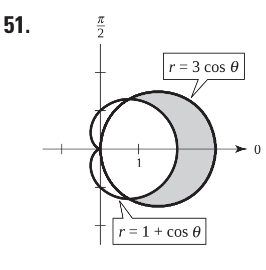
43. 9π **45.** $3\pi/2$ **47.** π

49.



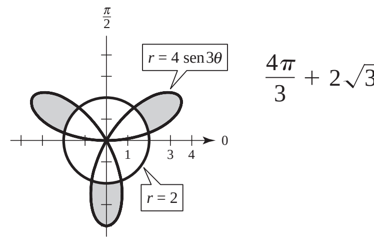
$\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

51.



π

53.



$\frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$

55. Sea R una región acotada por las gráficas de $r = g_1(\theta)$ y $r = g_2(\theta)$ y las rectas $\theta = a$ y $\theta = b$. Al utilizar coordenadas polares para evaluar una integral doble sobre R, R puede ser particionada en pequeños sectores polares.

57. Las regiones r-simples tienen límites fijos para θ y límites variables para r.

Las regiones θ-simples tienen límites variables para θ y límites fijos para r.

59. *a)* $\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y)\,dy\,dx$

b) $\int_0^{2\pi}\int_0^3 f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\,r\,dr\,d\theta$

c) Escoger la integral en el apartado *b*) porque los límites de integración son menos complicados.

61. Insertar un factor de r; sector de un círculo **63.** 56.051 **65.** c

67. Falso. Sea $f(r, \theta) = r - 1$ y sea R un sector donde $0 \le r \le 6$ y $0 \le \theta \le \pi$.

69. *a)* 2π (b) $\sqrt{2\pi}$ **71.** 486 788

73. *a)* $\int_2^4\int_{y/\sqrt{3}}^{y} f\,dx\,dy$

b) $\int_{2/\sqrt{3}}^{2}\int_2^{\sqrt{3}x} f\,dy\,dx + \int_2^{4/\sqrt{3}}\int_x^{\sqrt{3}x} f\,dy\,dx + \int_{4/\sqrt{3}}^{4}\int_x^4 f\,dy\,dx$

c) $\int_{\pi/4}^{\pi/3}\int_{2\csc\theta}^{4\csc\theta} f\,r\,dr\,d\theta$

75. $A = \frac{\Delta\theta r_2^2}{2} - \frac{\Delta\theta r_1^2}{2} = \Delta\theta\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)(r_2 - r_1) = r\,\Delta r\,\Delta\theta$

Sección 14.4 (página 1018)

1. $m = 4$ **3.** $m = \frac{1}{8}$

5. *a)* $m = ka^2$, $(a/2, a/2)$ *b)* $m = ka^3/2$, $(a/2, 2a/3)$

c) $m = ka^3/2$, $(2a/3, a/2)$

7. *a)* $m = ka^2/2$, $(a/3, 2a/3)$ *b)* $m = ka^3/3$, $(3a/8, 3a/4)$

c) $m = ka^3/6$, $(a/2, 3a/4)$

9. *a)* $\left(\frac{a}{2} + 5, \frac{a}{2}\right)$ *b)* $\left(\frac{a}{2} + 5, \frac{2a}{3}\right)$

c) $\left(\frac{2(a^2 + 15a + 75)}{3(a + 10)}, \frac{a}{2}\right)$

11. $m = k/4$, $(2/3, 8/15)$ **13.** $m = 30k$, $(14/5, 4/5)$

15. *a)* $m = k(e - 1)$, $\left(\frac{1}{e - 1}, \frac{e + 1}{4}\right)$

b) $m = \frac{k}{4}(e^2 - 1)$, $\left(\frac{e^2 + 1}{2(e^2 - 1)}, \frac{4(e^3 - 1)}{9(e^2 - 1)}\right)$

17. $m = 256k/15$, $(0, 16/7)$ **19.** $m = \frac{2kL}{\pi}$, $\left(\frac{L}{2}, \frac{\pi}{8}\right)$

21. $m = \frac{k\pi a^2}{8}$, $\left(\frac{4\sqrt{2}a}{3\pi}, \frac{4a(2 - \sqrt{2})}{3\pi}\right)$

23. $m = \frac{k}{8}(1 - 5e^{-4})$, $\left(\frac{e^4 - 13}{e^4 - 5}, \frac{8}{27}\left[\frac{e^6 - 7}{e^6 - 5e^2}\right]\right)$

25. $m = k\pi/3$, $(81\sqrt{3}/(40\pi), 0)$

27. $\bar{\bar{x}} = \sqrt{3}b/3$ **29.** $\bar{\bar{x}} = a/2$ **31.** $\bar{\bar{x}} = a/2$

$\bar{\bar{y}} = \sqrt{3}h/3$ $\bar{\bar{y}} = a/2$ $\bar{\bar{y}} = a/2$

33. $I_x = kab^4/4$

$I_y = kb^2a^3/6$

$I_0 = (3kab^4 + 2ka^3b^2)/12$

$\bar{\bar{x}} = \sqrt{3}a/3$

$\bar{\bar{y}} = \sqrt{2}b/2$

35. $I_x = 32k/3$

$I_y = 16k/3$

$I_0 = 16k$

$\bar{\bar{x}} = 2\sqrt{3}/3$

$\bar{\bar{y}} = 2\sqrt{6}/3$

37. $I_x = 16k$

$I_y = 512k/5$

$I_0 = 592k/5$

$\bar{\bar{x}} = 4\sqrt{15}/5$

$\bar{\bar{y}} = \sqrt{6}/2$

39. $I_x = 3k/56$

$I_y = k/18$

$I_0 = 55k/504$

$\bar{\bar{x}} = \sqrt{30}/9$

$\bar{\bar{y}} = \sqrt{70}/14$

41. $2k\int_{-b}^{b}\int_0^{\sqrt{b^2-x^2}} (x - a)^2\,dy\,dx = \frac{k\pi b^2}{4}(b^2 + 4a^2)$

43. $\int_0^4\int_0^{\sqrt{x}} kx(x - 6)^2\,dy\,dx = \frac{42\,752k}{315}$

45. $\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} k(a - y)(y - a)^2\,dy\,dx = ka^5\left(\frac{7\pi}{16} - \frac{17}{15}\right)$

47. Ver definiciones en la página 1014. **49.** Las respuestas varían.

51. $L/3$ **53.** $L/2$ **55.** Demostración

Sección 14.5 (página 1025)

1. 24 **3.** 12π **5.** $\frac{1}{2}\left[4\sqrt{17} + \ln(4 + \sqrt{17})\right]$

7. $\frac{4}{27}(31\sqrt{31} - 8)$ **9.** $\sqrt{2} - 1$ **11.** $\sqrt{2}\pi$

13. $2\pi a(a - \sqrt{a^2 - b^2})$ **15.** $48\sqrt{14}$ **17.** 20π

19. $\int_0^1\int_0^x \sqrt{5 + 4x^2}\,dy\,dx = \frac{27 - 5\sqrt{5}}{12} \approx 1.3183$

21. $\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dy\,dx$

$= \frac{\pi}{6}(37\sqrt{37} - 1) \approx 117.3187$

23. $\int_0^1\int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dy\,dx \approx 1.8616$ **25.** e

27. 2.0035 **29.** $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + 9(x^2 - y)^2 + 9(y^2 - x)^2}\, dy\, dx$

31. $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{1 + e^{-2x}}\, dy\, dx$

33. $\int_{0}^{4}\int_{0}^{10} \sqrt{1 + e^{2xy}(x^2 + y^2)}\, dy\, dx$

35. Si f y sus primeras derivadas parciales son continuas sobre una región cerrada R en el plano xy, entonces el área de la superficie dada por $z = f(x, y)$ sobre la región R es

$$\int_R\int \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\, dA.$$

37. No. La gráfica no cambia de tamaño ni de forma, sólo de posición. Por lo anterior, el área de la superficie no crece.

39. 16 **41.** (a) $812\pi\sqrt{609}$ cm³ (b) $100\pi\sqrt{609}$ cm²

Sección 14.6 (página 1035)

1. 18 **3.** $\frac{1}{10}$ **5.** $\frac{15}{2}(1 - 1/e)$ **7.** $-\frac{40}{3}$ **9.** $\frac{324}{5}$

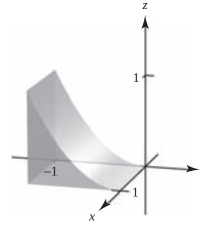
11. 2.44167 **13.** $V = \int_0^5\int_0^{5-x}\int_0^{5-x-y} dz\, dy\, dx$

15. $V = \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}}\int_{-\sqrt{6-y^2}}^{\sqrt{6-y^2}}\int_0^{6-x^2-y^2} dz\, dx\, dy$

17. $V = \int_{-4}^{4}\int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}}\int_{(x^2+y^2)/2}^{\sqrt{80-x^2-y^2}} dz\, dy\, dx$

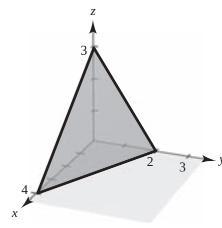
19. $\frac{256}{15}$ **21.** $4\pi a^3/3$ **23.** $\frac{256}{15}$ **25.** 10

27.



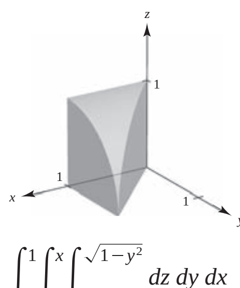
$\int_0^1\int_0^1\int_{-1}^{-\sqrt{z}} dy\, dz\, dx$

29.



$\int_0^3\int_0^{(12-4z)/3}\int_0^{(12-4z-3x)/6} dy\, dx\, dz$

31.



$\int_0^1\int_0^x\int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz\, dy\, dx$

33. $\int_0^1\int_0^x\int_0^3 xyz\, dz\, dy\, dx$, $\int_0^1\int_y^1\int_0^3 xyz\, dz\, dx\, dy$,
$\int_0^1\int_0^3\int_0^x xyz\, dy\, dz\, dx$, $\int_0^3\int_0^1\int_0^x xyz\, dy\, dx\, dz$,
$\int_0^3\int_0^1\int_y^1 xyz\, dx\, dy\, dz$, $\int_0^1\int_0^3\int_y^1 xyz\, dx\, dz\, dy$

35. $\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^4 xyz\, dz\, dy\, dx$, $\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}}\int_0^4 xyz\, dz\, dx\, dy$,
$\int_{-3}^{3}\int_0^4\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} xyz\, dy\, dz\, dx$, $\int_0^4\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} xyz\, dy\, dx\, dz$,
$\int_0^4\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} xyz\, dx\, dy\, dz$, $\int_{-3}^{3}\int_0^4\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} xyz\, dx\, dz\, dy$

37. $\int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^{1-y^2} dx\, dy\, dz$, $\int_0^1\int_0^{1-y}\int_0^{1-y^2} dx\, dz\, dy$,
$\int_0^1\int_0^{2z-z^2}\int_0^{1-z} 1\, dy\, dx\, dz + \int_0^1\int_{2z-z^2}^1\int_0^{\sqrt{1-x}} 1\, dy\, dx\, dz$,
$\int_0^1\int_{1-\sqrt{1-x}}^1\int_0^{1-z} 1\, dy\, dz\, dx + \int_0^1\int_0^{1-\sqrt{1-x}}\int_0^{\sqrt{1-x}} 1\, dy\, dz\, dx$,
$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x}}\int_0^{1-y} dz\, dy\, dx$

39. $m = 8k$ **41.** $m = 128k/3$
$\bar{x} = \frac{3}{2}$ $\bar{z} = 1$

43. $m = k\int_0^b\int_0^b\int_0^b xy\, dz\, dy\, dx$

$M_{yz} = k\int_0^b\int_0^b\int_0^b x^2y\, dz\, dy\, dx$

$M_{xz} = k\int_0^b\int_0^b\int_0^b xy^2\, dz\, dy\, dx$

$M_{xy} = k\int_0^b\int_0^b\int_0^b xyz\, dz\, dy\, dx$

45. $\bar{x}$ será más grande que 2, mientras que $\bar{y}$ y $\bar{z}$ no cambian.

47. $\bar{x}$ y $\bar{z}$ no cambian, mientras que $\bar{y}$ será más grande que 0.

49. $(0, 0, 3h/4)$ **51.** $\left(0, 0, \frac{3}{2}\right)$ **53.** $\left(5, 6, \frac{5}{4}\right)$

55. *a*) $I_x = 2ka^5/3$, $I_y = 2ka^5/3$, $I_z = 2ka^5/3$
b) $I_x = ka^8/8$, $I_y = ka^8/8$, $I_z = ka^8/8$

57. *a*) $I_x = 256k$, $I_y = 512k/3$, $I_z = 256k$
b) $I_x = 2\,048\,k/3$, $I_y = 1\,024\,k/3$, $I_z = 2\,048\,k/3$

59. Demostración **61.** $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_0^{1-x} (x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dz\, dy\, dx$

63. *a*) $m = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{4-x^2-y^2} kz\, dz\, dy\, dx$

b) $\bar{x} = \bar{y} = 0$, por simetría

$\bar{z} = \frac{1}{m}\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{4-x^2-y^2} kz^2\, dz\, dy\, dx$

c) $I_z = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{4-x^2-y^2} kz(x^2 + y^2)\, dz\, dy\, dx$

65. Ver “Definición de Integral Triple” en la página 1027 y el teorema 14.4, “Evaluación por integrales iteradas” en la página 1028.

67. *a*) El sólido *B*.

b) El sólido *B* tiene el momento de inercia mayor porque es más denso.

c) El sólido *A* llegará primero abajo. Como el sólido *B* tiene un momento de inercia mayor, tiene una resistencia mayor al movimiento de rotación.

69. $\frac{13}{3}$ **71.** $\frac{3}{2}$

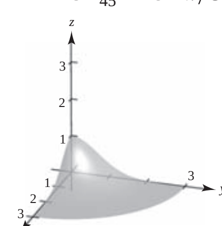
73. Q: $3z^2 + y^2 + 2x^2 \le 1$; $4\sqrt{6}\pi/45 \approx 0.684$

75. $a = 2, \frac{16}{3}$ **77.** Problema Putnam B1, 1965

Sección 14.7 (página 1043)

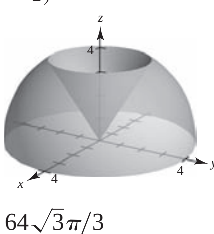
1. 27 **3.** $\frac{52}{45}$ **5.** $\pi/8$ **7.** $\pi(e^4 + 3)$

9.



$(1 - e^{-9})\pi/4$

11.



$64\sqrt{3}\pi/3$

13. Cilíndrica: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2}^4 r^2\cos\theta\, dz\, dr\, d\theta = 0$

Esférica: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\arctan(1/2)}\int_0^{4\sec\phi}\rho^3\,\text{sen}^2\,\phi\cos\theta\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

$\displaystyle + \int_0^{2\pi}\int_{\arctan(1/2)}^{\pi/2}\int_0^{\cot\phi\csc\phi}\rho^3\,\text{sen}^2\,\phi\cos\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta = 0$

15. Cilíndrica: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_a^{a+\sqrt{a^2-r^2}} r^2\cos\theta\, dz\, dr\, d\theta = 0$

Esférica: $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\int_{a\sec\phi}^{2a\cos\phi}\rho^3\,\text{sen}^2\,\phi\cos\theta\, d\rho\, d\theta\, d\phi = 0$

17. $(2a^3/9)(3\pi - 4)$ **19.** $\pi/16$ **21.** $(2a^3/9)(3\pi - 4)$

23. $48k\pi$ **25.** $\pi r_0^2 h/3$ **27.** $(0, 0, h/5)$

29. $\displaystyle I_z = 4k\int_0^{\pi/2}\int_0^{r_0}\int_0^{h(r_0-r)/r_0} r^3\, dz\, dr\, d\theta = 3mr_0^2/10$

31. Demostración **33.** $9\pi\sqrt{2}$ **35.** $16\pi^2$

37. $k\pi a^4$ **39.** $(0, 0, 3r/8)$ **41.** $k\pi/192$

43. Rectangulares a cilíndricas: $r^2 = x^2 + y^2$
$\tan\theta = y/x$
$z = z$

Cilíndricas a rectangulares: $x = r\cos\theta$
$y = r\,\text{sen}\,\theta$
$z = z$

45. $\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)}\int_{h_1(r\cos\theta,\, r\,\text{sen}\,\theta)}^{h_2(r\cos\theta,\, r\,\text{sen}\,\theta)} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, z) r\, dz\, dr\, d\theta$

47. *a*) r constante: cilindro circular recto en torno al eje z.
θ constante: plano paralelo al eje z.
z constante: plano paralelo al plano xy.

b) ρ constante: esfera.
θ constante: plano paralelo al eje z.
ϕ constante: cono.

49. $\frac{1}{2}\pi^2 a^4$ **51.** Problema Putnam A1, 2006

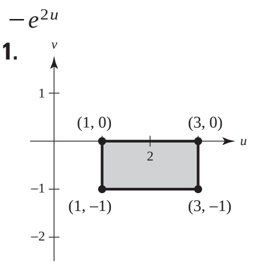
Sección 14.8 (página 1050)

1. $-\frac{1}{2}$ **3.** $1 + 2v$ **5.** 1 **7.** $-e^{2u}$

9.

v
(0, 1)
(1, 0)
u

11.



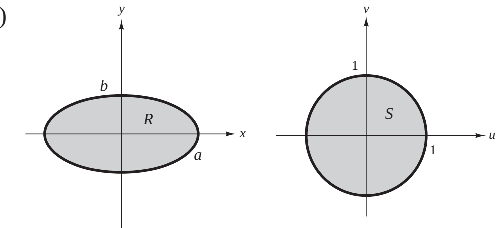
13. $\displaystyle\int_R\int 3xy\, dA = \int_{-2/3}^{2/3}\int_{1-x}^{(1/2)x+2} 3xy\, dy\, dx$

$\displaystyle + \int_{2/3}^{4/3}\int_{(1/2)x}^{(1/2)x+2} 3xy\, dy\, dx + \int_{4/3}^{8/3}\int_{(1/2)x}^{4-x} 3xy\, dy\, dx = \frac{164}{9}$

15. $\frac{8}{3}$ **17.** 36 **19.** $(e^{-1/2} - e^{-2})\ln 8 \approx 0.9798$ **21.** 96

23. $12(e^4 - 1)$ **25.** $\frac{100}{9}$ **27.** $\frac{2}{5}a^{5/2}$ **29.** Uno

31. *a*)



b) ab *c*) πab

33. Ver la "Definición de jacobiano" en la página 1045. **35.** u^2v

37. $-uv$ **39.** $-\rho^2\,\text{sen}\,\phi$ **41.** Problema Putnam A2, 1994

Ejercicios de repaso para el capítulo 14 (página 1052)

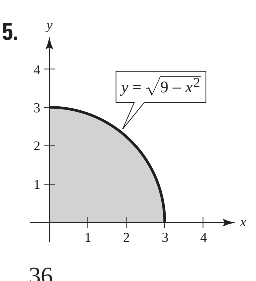
1. $x - x^3 + x^3\ln x^2$

3.

y
$y = x + 1$
x

$\frac{29}{6}$

5.



36

7. $\displaystyle\int_0^3\int_0^{(3-x)/3} dy\, dx = \int_0^1\int_0^{3-3y} dx\, dy = \frac{3}{2}$

9. $\displaystyle\int_{-5}^{3}\int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} dy\, dx$

$\displaystyle = \int_{-5}^{-4}\int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} dx\, dy + \int_{-4}^{4}\int_{-\sqrt{25-y^2}}^{3} dx\, dy$

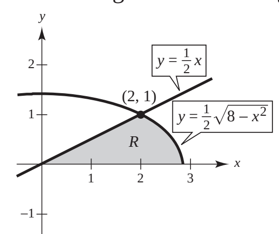
$\displaystyle + \int_4^5\int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} dx\, dy$

$= 25\pi/2 + 12 + 25\,\text{arcsen}\,\frac{3}{5} \approx 67.36$

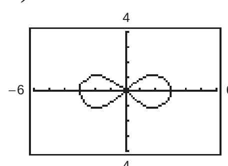
11. $\displaystyle 4\int_0^1\int_0^{x\sqrt{1-x^2}} dy\, dx = 4\int_0^{1/2}\int_{\sqrt{(1-\sqrt{1-4y^2})/2}}^{\sqrt{(1+\sqrt{1-4y^2})/2}} dx\, dy = \frac{4}{3}$

13. $\displaystyle\int_2^5\int_{x-3}^{\sqrt{x-1}} dy\,dx + 2\int_1^2\int_0^{\sqrt{x-1}} dy\,dx = \int_{-1}^2\int_{y^2+1}^{y+3} dx\,dy = \frac{9}{2}$

15. Ambas integraciones son sobre la región común R, como se muestra en la figura. Ambas integrales dan $\frac{4}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{2}$.



17. $\frac{3\,296}{15}$ **19.** $\frac{40}{3}$ **21.** 13.67°C **23.** $k = 1$, 0.070 **25.** c
27. Verdadero **29.** Verdadero **31.** $(h^3/6)\left[\ln\left(\sqrt{2}+1\right) + \sqrt{2}\right]$
33. $9\pi/2$ **35.** $\pi h^3/3$
37. *a)* $r = 3\sqrt{\cos 2\theta}$



b) 9 *c)* $3\left(3\pi - 16\sqrt{2} + 20\right) \approx 20.392$
39. *a)* $m = k/4, \left(\frac{32}{45}, \frac{64}{55}\right)$ *b)* $m = 17k/30, \left(\frac{936}{1\,309}, \frac{784}{663}\right)$
41. $I_x = ka^2b^3/6$
$I_y = ka^4b/4$
$I_0 = (2ka^2b^3 + 3ka^4b)/12$
$\bar{\bar{x}} = a/\sqrt{2}$
$\bar{\bar{y}} = b/\sqrt{3}$
43. $\dfrac{\left(101\sqrt{101} - 1\right)\pi}{6}$ **45.** $\dfrac{1}{6}\left(37\sqrt{37} - 1\right)$
47. *a)* 30 415.74 pies^3 *b)* 2 081.53 pies^2 **49.** $324\pi/5$
51. $(abc/3)(a^2 + b^2 + c^2)$ **53.** $8\pi/15$ **55.** $\frac{32}{3}\left(\pi/2 - \frac{2}{3}\right)$
57. $\left(0, 0, \frac{1}{4}\right)$ **59.** $(3a/8, 3a/8, 3a/8)$ **61.** $833k\pi/3$
63. *a)* $\dfrac{1}{3}\pi h^2(3a - h)$ *b)* $\left(0, 0, \dfrac{3(2a-h)^2}{4(3a-h)}\right)$ *c)* $\left(0, 0, \dfrac{3}{8}a\right)$
d) a *e)* $(\pi/30)h^3(20a^2 - 15ah + 3h^2)$ *f)* $4\pi a^5/15$
65. El volumen de un toro generado por un círculo de radio 3, con centro en (0, 3, 0) al girar sobre el eje z.
67. -9 **69.** $5\ln 5 - 3\ln 3 - 2 \approx 2.751$

SP Solución de problemas (página 1055)

1. $8\left(2 - \sqrt{2}\right)$ **3.** *a)* a *g)* Demostraciones **5.** $\frac{1}{3}$
7.

$\displaystyle\int_0^3\int_0^{2x}\int_x^{6-x} dy\,dz\,dx = 18$

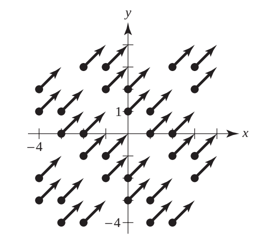
9. $\sqrt{\pi}/4$

11. Si $a, k > 0$, entonces $1 = ka^2$ o $a = 1/\sqrt{k}$.
13. Las respuestas varían.
15. Entre más grande sea el ángulo entre el plano dado y el plano xy, más grande es el área de la superficie. Así, $z_2 < z_1 < z_4 < z_3$.
17. Los resultados no son los mismos. El teorema de Fubini no es válido porque f no es continua en la región $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

Capítulo 15

Sección 15.1 (página 1067)

1. *d* **2.** *c* **3.** *e* **4.** *b* **5.** *a* **6.** *f*
7. $\sqrt{2}$

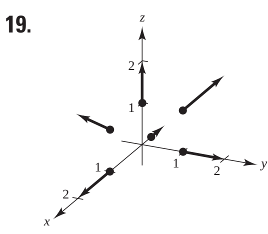


9. $\sqrt{x^2 + y^2}$

11. $3|y|$ **13.** $\sqrt{16x^2 + y^2}$

15. $\sqrt{3}$ **17.**

19.



21. $2x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j}$

23. $(10x + 3y)\mathbf{i} + (3x + 2y)\mathbf{j}$ **25.** $6yz\mathbf{i} + 6xz\mathbf{j} + 6xy\mathbf{k}$
27. $2xye^{x^2}\mathbf{i} + e^{x^2}\mathbf{j} + \mathbf{k}$
29. $[xy/(x+y) + y\ln(x+y)]\mathbf{i} + [xy/(x+y) + x\ln(x+y)]\mathbf{j}$
31 a 33. Demostraciones **35.** Conservativo porque $\partial N/\partial x = \partial M/\partial y$.
37. No conservativo porque $\partial N/\partial x \neq \partial M/\partial y$.
39. Conservativo: $f(x, y) = xy + K$
41. Conservativo: $f(x, y) = x^2y + K$

43. No conservativo **45.** No conservativo
47. Conservativo: $f(x, y) = e^x \cos y + K$ **49.** $4\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
51. $-2\mathbf{k}$ **53.** $2x/(x^2 + y^2)\mathbf{k}$
55. $\cos(y - z)\mathbf{i} + \cos(z - x)\mathbf{j} + \cos(x - y)\mathbf{k}$
57. Conservativo: $f(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2y^2z^2) + K$
59. No conserv ativo **61.** Conservativo: $f(x, y, z) = xz/y + K$
63. $2x + 4y$ **65.** $\cos x - \operatorname{sen} y + 2z$ **67.** 4 **69.** 0
71. Ver la "Definición de campo vectorial" en la página 1058. Algunos ejemplos físicos de campos vectoriales son los campos de velocidades, campos gravitacionales y campos de fuerza eléctrica.
73. Ver la "Definición del rotacional de un campo vectorial" en la página 1064.
75. $9x\mathbf{j} - 2y\mathbf{k}$ **77.** $z\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ **79.** $3z + 2x$ **81.** 0
83 a 89. Demostraciones
91. $f(x, y, z) = \|\mathbf{F}(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\ln f = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2 + z^2)$$
$$\nabla \ln f = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}\mathbf{i} + \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}\mathbf{j} + \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}\mathbf{k} = \frac{\mathbf{F}}{f^2}$$

93. $f^n = \|\mathbf{F}(x, y, z)\|^n = \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^n$

$$\nabla f^n = n\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^{n-1}\left(\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = nf^{n-2}\mathbf{F}$$

95. Verdadero
97. Falso. El rotacional de f sólo tiene significado para campos vectoriales, que consideran la dirección.

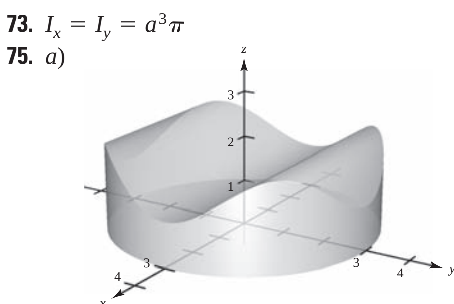
Sección 15.2 (página 1079)

1. $\mathbf{r}(t) = \begin{cases} t\mathbf{i} + t\mathbf{j}, & 0 \le t \le 1 \\ (2 - t)\mathbf{i} + \sqrt{2 - t}\mathbf{j}, & 1 \le t \le 2 \end{cases}$

3. $\mathbf{r}(t) = \begin{cases} t\mathbf{i}, & 0 \le t \le 3 \\ 3\mathbf{i} + (t - 3)\mathbf{j}, & 3 \le t \le 6 \\ (9 - t)\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, & 6 \le t \le 9 \\ (12 - t)\mathbf{j}, & 9 \le t \le 12 \end{cases}$

5. $\mathbf{r}(t) = 3\cos t\mathbf{i} + 3\operatorname{sen} t\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi$ **7.** 20 **9.** $5\pi/2$
11. *a*) C: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}$, $0 \le t \le 1$ *b*) $2\sqrt{2}/3$
13. *a*) C: $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j}$, $0 \le t \le \pi/2$ *b*) $\pi/2$
15. *a*) C: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i}$, $0 \le t \le 1$ *b*) $1/2$
17. *a*) C: $\mathbf{r}(t) = \begin{cases} t\mathbf{i}, & 0 \le t \le 1 \\ (2 - t)\mathbf{i} + (t - 1)\mathbf{j}, & 1 \le t \le 2 \\ (3 - t)\mathbf{j}, & 2 \le t \le 3 \end{cases}$
b) $\frac{19}{6}\left(1 + \sqrt{2}\right)$
19. *a*) C: $\mathbf{r}(t) = \begin{cases} t\mathbf{i}, & 0 \le t \le 1 \\ \mathbf{i} + t\mathbf{k}, & 0 \le t \le 1 \\ \mathbf{i} + t\mathbf{j} + \mathbf{k}, & 0 \le t \le 1 \end{cases}$ *b*) $\frac{23}{6}$
21. $8\sqrt{5}\pi(1 + 4\pi^2/3) \approx 795.7$ **23.** 2
25. $(k/12)\left(41\sqrt{41} - 27\right)$ **27.** 1 **29.** $\frac{1}{2}$ **31.** $\frac{9}{4}$
33. ≈ 249.49 **35.** 66 **37.** 0 **39.** $-10\pi^2$
41. Positivo **43.** Cero
45. *a*) $\frac{236}{3}$; la orientación es de izquierda a derecha, así que el valor es positivo.
b) $-\frac{236}{3}$; la orientación es de derecha a izquierda, así que el valor es negativo.

47. $\mathbf{F}(t) = -2t\mathbf{i} - t\mathbf{j}$
$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
$\mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = -2t + 2t = 0$
$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$
49. $\mathbf{F}(t) = (t^3 - 2t^2)\mathbf{i} + (t - t^2/2)\mathbf{j}$
$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$
$\mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = t^3 - 2t^2 + 2t^2 - t^3 = 0$
$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$
51. 1 010 **53.** $\frac{190}{3}$ **55.** 25 **57.** $\frac{63}{2}$ **59.** $-\frac{11}{6}$ **61.** $\frac{316}{3}$
63. $5h$ **65.** $\frac{1}{2}$ **67.** $(h/4)\left[2\sqrt{5} + \ln\left(2 + \sqrt{5}\right)\right]$
69. $\frac{1}{120}\left(25\sqrt{5} - 11\right)$
71. *a*) $12\pi \approx 37.70$ cm^2 *b*) $12\pi/5 \approx 7.54$ cm^3
c)
73. $I_x = I_y = a^3\pi$
75. *a*)



b) 9π cm$^2 \approx 28.274$ cm^2
c) Volumen $= 2\int_0^3 2\sqrt{9 - y^2}\left[1 + 4\frac{y^2}{9}\left(1 - \frac{y^2}{9}\right)\right] dy$
$= 27\pi/2 \approx 42.412$ cm^3
77. 1 750 pies-lb
79. Ver la "Definición de integral de línea" y el teorema 15.4, "Evaluación de una integral de línea como integral definida".
81. z_3, z_1, z_2, z_4; Entre más grande sea la altura de la superficie sobre la curva $y = \sqrt{x}$, más grande es el área de la superficie lateral.
83. Falso: $\int_C xy\, ds = \sqrt{2}\int_0^1 t^2\, dt$.
85. Falso: las orientaciones son diferentes. **87.** -12

Sección 15.3 (página 1090)

1. *a*) $\int_0^1 (t^2 + 2t^4)\, dt = \frac{11}{15}$
b) $\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta + 2\operatorname{sen}^4\theta\cos\theta)\, d\theta = \frac{11}{15}$
3. *a*) $\int_0^{\pi/3} (\sec\theta\tan^2\theta - \sec^3\theta)\, d\theta \approx -1.317$
b) $\int_0^3 \left[\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{t + 1}} - \frac{\sqrt{t + 1}}{2\sqrt{t}}\right] dt \approx -1.317$

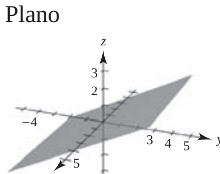
5. Conservativo **7.** No conservativo **9.** Conservativo
11. *a*) 1 *b*) 1 **13.** *a*) 0 *b*) $-\frac{1}{3}$ *c*) $-\frac{1}{2}$
15. *a*) 64 *b*) 0 *c*) 0 *d*) 0 **17.** *a*) $\frac{64}{3}$ *b*) $\frac{64}{3}$
19. *a*) 32 *b*) 32 **21.** *a*) $\frac{2}{3}$ *b*) $\frac{17}{6}$ **23.** *a*) 0 *b*) 0
25. 72 **27.** -1 **29.** 0 **31.** *a*) 2 *b*) 2 *c*) 2
33. 11 **35.** 30 366 **37.** 0
39. *a*) $d\mathbf{r} = (\mathbf{i} - \mathbf{j})\,dt \Rightarrow \int_0^{50} 175\,dt = 8\,750$ pies-lb
b) $d\mathbf{r} = \left(\mathbf{i} - \frac{1}{25}(50 - t)\mathbf{j}\right)dt \Rightarrow 7\int_0^{50} (50 - t)\,dt$
$= 8\,750$ pies-lb
41. Ver teorema 15.5, “Teorema fundamental de las integrales de línea” en la página 1084.
43. *a*) 2π *b*) 2π *c*) -2π *d*) 0
45. Sí, porque el trabajo necesario para ir de un punto a otro es independiente de la trayectoria seguida.
47. Falso. Sería verdadero si **F** fuera conservativo.
49. Verdadero **51.** Demostración
53. *a*) Demostración *b*) $-\pi$ *c*) π
d) -2π; no contradice el teorema 15.7 porque **F** no es continuo en (0, 0) en la región *R* encerrada por *C*.
e) $\nabla\left(\arctan\frac{x}{y}\right) = \frac{1/y}{1 + (x/y)^2}\,\mathbf{i} + \frac{-x/y^2}{1 + (x/y)^2}\,\mathbf{j}$

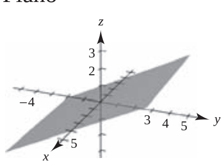
Sección 15.4 (página 1099)

1. $\frac{1}{30}$ **3.** 0 **5.** ≈ 19.99 **7.** $\frac{9}{2}$ **9.** 56 **11.** $\frac{4}{3}$ **13.** 0
15. 0 **17.** $\frac{1}{12}$ **19.** 32π **21.** π **23.** $\frac{225}{2}$ **25.** πa^2 **27.** $\frac{9}{2}$
29. Ver teorema 15.8 en la página 1093. **31.** Demostración
33. $\left(0, \frac{8}{5}\right)$
35. $\left(\frac{8}{15}, \frac{8}{21}\right)$ **37.** $3\pi a^2/2$ **39.** $\pi - 3\sqrt{3}/2$
41. *a*) $51\pi/2$ *b*) $243\pi/2$
43. $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C M\,dx + N\,dy = \int\int_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)dA = 0;$
$I = -2\pi$ cuando *C* es un círculo que contiene al origen.
45. $\frac{19}{2}$ **47 a 49.** Demostraciones

Sección 15.5 (página 1109)

1. *e* **2.** *f* **3.** *b* **4.** *a* **5.** *d* **6.** *c*
7. $y - 2z = 0$
Plano

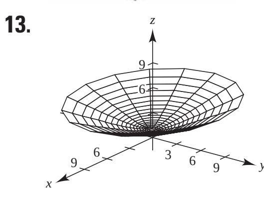




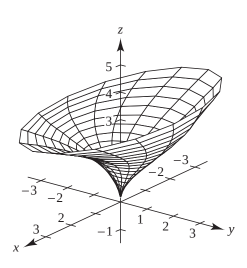
9. $x^2 + z^2 = 4$
Cilindro

11.

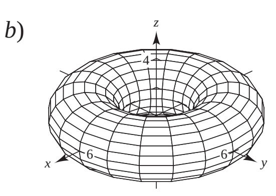
13.



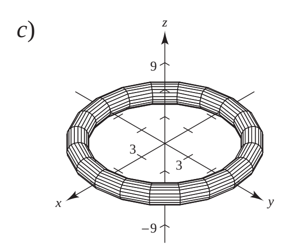
15.



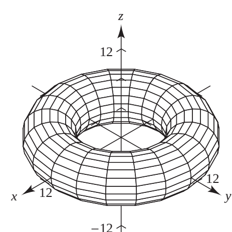
17. El paraboloide se refleja (invertido) en el plano *xy*.
19. La altura del paraboloide aumenta de 4 a 9.
21. $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + v\mathbf{k}$
23. $\mathbf{r}(u, v) = \frac{1}{2}u\cos v\mathbf{i} + u\mathbf{j} + \frac{1}{3}u \operatorname{sen} v\mathbf{k},\ u \ge 0,\ 0 \le v \le 2\pi$ o
$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + \sqrt{4x^2 + 9y^2}\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
25. $\mathbf{r}(u, v) = 5\cos u\mathbf{i} + 5\operatorname{sen} u\mathbf{j} + v\mathbf{k}$
27. $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$
29. $\mathbf{r}(u, v) = v\cos u\mathbf{i} + v\operatorname{sen} u\mathbf{j} + 4\mathbf{k},\quad 0 \le v \le 3$
31. $x = u, y = \frac{u}{2}\cos v, z = \frac{u}{2}\operatorname{sen} v,\quad 0 \le u \le 6, 0 \le v \le 2\pi$
33. $x = \operatorname{sen} u\cos v, y = \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, z = u$
$0 \le u \le \pi,\ 0 \le v \le 2\pi$
35. $x - y - 2z = 0$ **37.** $4y - 3z = 12$ **39.** $8\sqrt{2}$
41. $2\pi ab$ **43.** $\pi ab^2\sqrt{a^2 + 1}$
45. $(\pi/6)\left(17\sqrt{17} - 1\right) \approx 36.177$
47. Ver la “Definición de superficie paramétrica” en la página 1102.
49 a 51. Demostraciones
53. *a*) *b*)



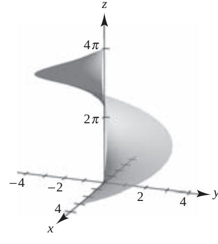
c)



d)



El radio del círculo generador que es girado en torno al eje *z* es *b*, y su centro está a *a* unidades del eje de revolución.
55. $400\pi\ \mathrm{m}^2$
57.

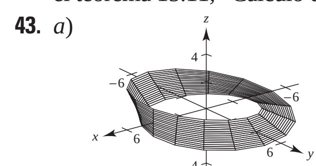


$2\pi\left[\frac{3}{2}\sqrt{13} + 2\ln\left(3 + \sqrt{13}\right) - 2\ln 2\right]$

59. Las respuestas varían. Ejemplo de respuesta: Sea
$x = (2 - u)(5 + \cos v) \cos 3\pi u$
$y = (2 - u)(5 + \cos v) \operatorname{sen} 3\pi u$
$z = 5u + (2 - u) \operatorname{sen} v$
donde $-\pi \leq u \leq \pi$ y $-\pi \leq v \leq \pi$.

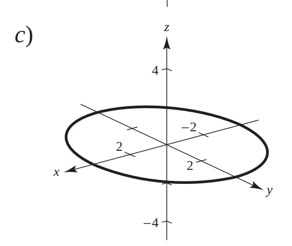
Sección 15.6 (página 1122)

1. $12\sqrt{2}$ **3.** 2π **5.** $27\sqrt{3}/8$ **7.** $(391\sqrt{17} + 1)/240$
9. ≈ -11.47 **11.** $\frac{364}{3}$ **13.** $12\sqrt{5}$ **15.** 8 **17.** $\sqrt{3}\pi$
19. $32\pi/3$ **21.** 486π **23.** $-\frac{4}{3}$ **25.** $3\pi/2$ **27.** 20π
29. 384π **31.** 0 **33.** Demostración **35.** $2\pi a^3 h$ **37.** $64\pi\rho$
39. Ver el teorema 15.10, "Cálculo de integral de superficie" en la página 1112.
41. Ver la "Definición de la integral de flujo" en la página 1118; ver el teorema 15.11, "Cálculo de integral de flujo" en la página 1118.
43. *a*)



b) Si un vector normal a un punto P sobre una superficie se mueve alrededor de la banda de Möbius, éste apuntará en la dirección opuesta.

c)



Círculo

d) Construcción
e) Una banda con doble vuelta y doble longitud que la banda de Möbius.

Sección 15.7 (página 1130)

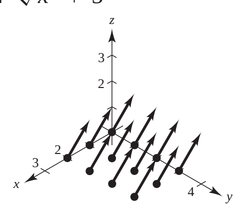
1. a^4 **3.** 18 **5.** π **7.** $3a^4$ **9.** 0 **11.** 108π
13. 0 **15.** 2 304 **17.** $1\,024\pi/3$ **19.** 0
21. Ver teorema 15.12, "El teorema de la divergencia" en la página 1124. **23 a 29.** Demostraciones

Sección 15.8 (página 1137)

1. $(xz - e^z)\mathbf{i} - (yz + 1)\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ **3.** $[2 - 1/(1 + x^2)]\mathbf{j} - 8x\mathbf{k}$
5. $z(x - 2e^{y^2+z^2})\mathbf{i} - yz\mathbf{j} - 2ye^{x^2+y^2}\mathbf{k}$ **7.** 18π **9.** 0
11. -12 **13.** 2π **15.** 0 **17.** $\frac{8}{3}$ **19.** $a^5/4$ **21.** 0
23. Ver el teorema 15.13, "El teorema de Stokes" en la página 1132.
25 a 27. Demostraciones **29.** Problema Putnam A5, 1987

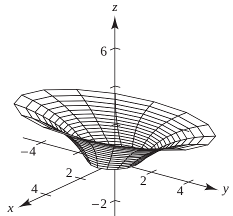
Ejercicios de repaso para el capítulo 15 (página 1138)

1. $\sqrt{x^2 + 5}$

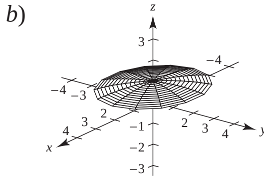


3. $(4x + y)\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$

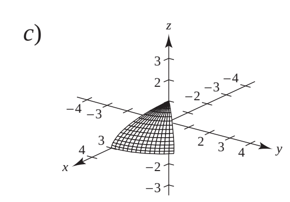
5. Conservativo: $f(x, y) = y/x + K$
7. Conservativo: $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 + K$
9. No conservativo **11.** Conservativo: $f(x, y, z) = x/(yz) + K$
13. *a*) $\operatorname{div} \mathbf{F} = 2x + 2xy + x^2$ *b*) $\operatorname{rot} \mathbf{F} = -2xz\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$
15. *a*) $\operatorname{div} \mathbf{F} = -y \operatorname{sen} x - x \cos y + xy$
b) $\operatorname{rot} \mathbf{F} = xz\mathbf{i} - yz\mathbf{j}$
17. *a*) $\operatorname{div} \mathbf{F} = 1/\sqrt{1 - x^2} + 2xy + 2yz$
b) $\operatorname{rot} \mathbf{F} = z^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{k}$
19. *a*) $\operatorname{div} \mathbf{F} = \dfrac{2x + 2y}{x^2 + y^2} + 1$
b) $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \dfrac{2x - 2y}{x^2 + y^2}\mathbf{k}$
21. *a*) $\frac{125}{3}$ *b*) 2π **23.** 6π **25.** *a*) 18 *b*) 18π
27. $9a^2/5$ **29.** $(\sqrt{5}/3)(19 - \cos 6) \approx 13.446$ **31.** 1
33. $2\pi^2$ **35.** 36 **37.** $\frac{4}{3}$ **39.** $\frac{8}{3}(3 - 4\sqrt{2}) \approx -7.085$
41. 6 **43.** *a*) 15 *b*) 15 *c*) 15
45. 1 **47.** 0 **49.** 0
51.



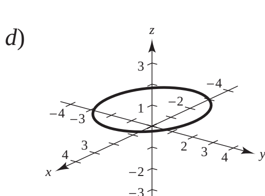
53. *a*) *b*)



c)



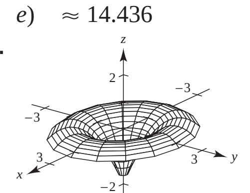
d)



Círculo

e) ≈ 14.436 *f*) ≈ 4.269

55.



0

57. 66 **59.** $2a^6/5$ **61.** Demostración

SP Solución de problemas (página 1141)

1. *a*) $(25\sqrt{2}/6)k\pi$ *b*) $(25\sqrt{2}/6)k\pi$
3. $I_x = (\sqrt{13}\pi/3)(27 + 32\pi^2)$; $I_y = (\sqrt{13}\pi/3)(27 + 32\pi^2)$;
$I_z = 18\sqrt{13}\pi$
5. Demostración **7.** $3a^2\pi$ **9.** *a*) 1 *b*) $\frac{13}{15}$ *c*) $\frac{5}{2}$
11. Demostración
13. $M = 3mxy(x^2 + y^2)^{-5/2}$
$\partial M/\partial y = 3mx(x^2 - 4y^2)/(x^2 + y^2)^{7/2}$
$N = m(2y^2 - x^2)(x^2 + y^2)^{-5/2}$
$\partial N/\partial x = 3mx(x^2 - 4y^2)/(x^2 + y^2)^{7/2}$
Por lo tanto, $\partial N/\partial x = \partial M/\partial y$ y $\mathbf{F}$ es conservativo.

Índice analítico

N

O

P

R

S

T

V

W